第41卷 第1期　　厦门大学学报(自然科学版)　　Vol.41 No.1
2002年1月　　Journal of Xiamen University (Natural Science)　　Jan. 2002

文章编号: 0438-0479(2002)01-0006-04

关于Hessenberg矩阵与Toeplitz矩阵的相似

卢琳璋, 张美红

(厦门大学数学系, 福建 厦门 361005)

摘要: 用解矩阵方程的方法直接证明: 对任一个单位上Hessenberg矩阵 H, 存在上Hessenberg的Toeplitz矩阵 T 和单位上三角阵 X, 使得 $XHX^{-1} = T$, 并且证明这样的 T 和 X 都是唯一的.

关键词: Hessenberg矩阵; Toeplitz矩阵; 矩阵方程

中图分类号: O 241.6　　文献标识码: A

Toeplitz矩阵出现在很多的应用领域, 特别是在数字信号处理方面, 如谱分析、线性预测、最小二乘估计等等. Toeplitz矩阵的特征值计算比一般矩阵特征值的计算容易些. 文献[1]通过引进算子用比较抽象的方法证明了: 对任一个单位上Hessenberg矩阵H, 存在唯一的上Hessenberg的Toeplitz矩阵T与之相似. 本文采用直接解矩阵方程的简单方法证明这一结论, 并且证明单位上三角的相似变换矩阵的唯一性.

1 记 号

为叙述方便, 把 n 阶方阵 A 的元素 $a_{i,j}$ 的下标满足 $j - i = k$ 所在的位置称为 A 的第 k 条对角线. 这样 n 阶矩阵 A 共有 $2n-1$ 条对角线. 若 A 的每条对角线上的元素都相等, 则称 A 为Toeplitz矩阵, 即 n 阶Toeplitz矩阵形如:

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ & & \cdots & & \\ a_{-n+1} & \cdots & \cdots & a_{-1} & a_0 \end{bmatrix}$$

简记它为 $Toep(a_{-n+1}, \cdots, a_{-1}, a_0, \cdots a_{n-1})$, 这里 $a_i (i = -n+1, \cdots, 0, 1, \cdots, n-1)$ 是 $2n-1$ 个复数.

对一个 n 阶矩阵 $H = (h_{i,j})$, 若 $i > j+1$ 时, $h_{i,j} = 0$, 则称 H 上Hessenberg阵. 若又有 $h_{i+1,i} = 1$, 则称 H 为单位上Hessenberg阵. $Toep(0, \cdots, 0, 1, a_0, \cdots, a_{n-1})$ 称为单位上Hessenberg的Toeplitz矩阵.

2 存在性证明

容易证明, 一个单位上Hessenberg矩阵左乘或右乘一个单位上三角矩阵后, 仍是一个单位上Hessenberg矩阵.

定理1　设 H 是一个单位上Hessenberg矩阵, 那么存在一个单位上三角矩阵 X 和一个单位上Hessenberg的Toeplitz矩阵 T, 使得 $XHX^{-1} = T$.

证　设 $T = Toep(0, \cdots, 0, 1, a_0, \cdots, a_{n-1})$, 要使 $XHX^{-1} = T$, 即 $XH = TX$, 或

$$\begin{bmatrix} 1 & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,n} \\ 0 & 1 & x_{2,3} & \cdots & x_{2,n} \\ & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & x_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

收稿日期: 2000-11-30
基金项目: 国家自然科学基金(19801029)和福建省自然科学基金(F00023)资助项目
作者简介: 卢琳璋(1957-), 男, 教授.

$$\begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} & \cdots & h_{1,n} \\ 1 & h_{2,2} & h_{2,3} & \cdots & h_{2,n} \\ 0 & 1 & & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & & h_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & h_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 1 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ 0 & 1 & & \cdots & \\ & \cdots & & a_0 & a_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & a_0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,n} \\ 0 & 1 & x_{2,3} & \cdots & x_{2,n} \\ & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & x_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

我们将证明方程(1) 有解. 显然, $XH = TX$ 当且仅当方程(1) 两边的每条对角线元素均对应相等. 利用这一点, 可递推求出 a_i 和 $x_{i,j}$. 由前面所述, XH 和 TX 均是单位上 Hessenberg 矩阵, 故方程(1) 两边的第 $-n+1, -n+2, \cdots, -1$ 条对角线元素相等.

比较(1) 两边的第 0 条对角线, 可得:

$$\begin{cases} h_{1,1} + x_{1,2} = a_0 \\ h_{i,i} + x_{i,i+1} = x_{i-1,i} + a_0 \quad (i = 2, \cdots, n-1) \\ h_{n,n} = x_{n-1,n} + a_0 \end{cases} \tag{2}$$

把这 n 个方程相加, 得到:

$$\sum_{i=1}^{n} h_{i,i} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{i,i+1} = \sum_{i=2}^{n} x_{i-1,i} + n \times a_0$$

因此, $a_0 = \sum_{i=1}^{n} h_{i,i} / n$.

把 a_0 代回方程组(2), 可求得 X 的第 1 条对角线元素为:

$$x_{i,i+1} = i \times a_0 - \sum_{l=1}^{i} h_{l,l} (i = 1, 2, \cdots, n-1).$$

更一般地, 假设已确定 X 的前 $k+1$ 条线(从第 0 条开始计数) 和 T 的前 k 条对角线元素, 比较(1) 式两边的第 k 条对角线, 我们得到:

$$\begin{cases} h_{1,k+1} + x_{1,2} h_{2,k+1} + \cdots + x_{1,k+1} h_{k+1,k+1} + x_{1,k+2} = \\ \quad a_0 x_{1,k+1} + \cdots + a_{k-1} x_{k,k+1} + a_k \\ h_{i,i+k} + x_{i,i+1} h_{i+1,i+k} + \cdots + x_{i,i+k} h_{i+k,i+k} + x_{i,i+k+1} = \\ \quad x_{i-1,i+k} + a_0 x_{i,i+k} + \cdots + a_{k-1} x_{i+k-1,i+k} + a_k \\ \quad (i = 2, \cdots, n-k-1) \\ h_{n-k,n} + x_{n-k,n-k+1} h_{n-k+1,n} + \cdots + x_{n-k,n} h_{n,n} = \\ \quad x_{n-k-1,n} + a_0 x_{n-k,n} + \cdots + a_{k-1} x_{n-1,n} + a_k \end{cases} \tag{3}$$

解方程组(3) 得到:

$$\begin{cases} a_k = \sum_{l=1}^{n-k} \left(h_{l,l+k} + \sum_{j=l+1}^{l+k} x_{l,j} h_{j,l+k} - \sum_{j=0}^{k-1} a_j x_{l+j,l+k} \right) \\ \quad / (n-k) \\ x_{i,i+k+1} = i \times a_k + \sum_{l=1}^{i} \left(\sum_{j=0}^{k-1} x_{j+l,k+l} - h_{l,k+l} - \right. \\ \quad \left. \sum_{j=l+1}^{k+l} x_{l,j} h_{j,k+l} \right) \\ k = 1, 2, \cdots, n-1, \qquad i = 1, 2, \cdots, n-k-1 \end{cases} \tag{4}$$

从方程(4) 和上面刚得到的 a_0 和 $x_{i,i+1}$ $i = 1, 2, \cdots n-1$, 可递推求得 T 的第 k 条对角线 a_k 和 X 的第 $k+1$ 条对角线元素 $x_{i,i+k+1}$, 即求得满足定理条件的 X 和 T.

3　唯一性的证明

下一个定理将指出定理 1 中的 T 和 X 是唯一的.

定理 2　对任一个单位上 Hessenberg 矩阵 H, 若存在单位上三角矩阵 X_1, X_2 和单位上 Hessenberg 的 Toeplitz 矩阵 T_1, T_2, 使得 $X_1 H = T_1 X_1$, $X_2 H = T_2 X_2$, 那么 $X_1 = X_2$, $T_1 = T_2$.

证　设 $X_1 = (x_{i,j})$, $X_2 = (\tilde{x}_{i,j})$, 以及

$T_1 = Toep(0, \cdots, 0, 1, a_0, \cdots, a_{n-1})$,

$T_2 = Toep(0, \cdots, 0, 1, \tilde{a}_0, \cdots, \tilde{a}_{n-1})$

记 $Y = X_1 - X_2 = (y_{i,j})$.

由 H 相似于 T_1, H 相似于 T_2, 我们得到 $tr(H) = tr(T_1) = tr(T_2)$, 因此 $a_0 = \tilde{a}_0$.

下面根据对角线的序数用归纳法证明定理.

由 $(X_1 - X_2)H = YH = T_1 X_1 - T_2 X_2$, 即有

$$
\begin{bmatrix}
0 & y_{1,2} & y_{1,3} & \cdots & y_{1,n} \\
0 & 0 & y_{2,3} & \cdots & y_{2,n} \\
 & & \cdots & & \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & y_{n-1,n} \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix} \times
\begin{bmatrix}
h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} & \cdots & h_{1,n} \\
1 & h_{2,2} & h_{2,3} & \cdots & h_{2,n} \\
0 & 1 & & \cdots & \\
 & \cdots & \cdots & & h_{n-1,n} \\
0 & \cdots & \cdots & 1 & h_{n,n}
\end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\
1 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\
0 & 1 & & \cdots & \\
 & \cdots & & a_0 & a_1 \\
0 & \cdots & \cdots & 1 & a_0
\end{bmatrix} \times
\begin{bmatrix}
1 & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,n} \\
0 & 1 & x_{2,3} & \cdots & x_{2,n} \\
 & & \cdots & & \\
0 & \cdots & \cdots & 1 & x_{n-1,n} \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{bmatrix} -
\begin{bmatrix}
\tilde{a}_0 & \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \cdots & \tilde{a}_{n-1} \\
1 & \tilde{a}_0 & \tilde{a}_1 & \cdots & a_{n-2} \\
0 & 1 & & \cdots & \\
 & \cdots & & \tilde{a}_0 & \tilde{a}_1 \\
0 & \cdots & \cdots & 1 & \tilde{a}_0
\end{bmatrix} \times
\begin{bmatrix}
1 & \tilde{x}_{1,2} & \tilde{x}_{1,3} & \cdots & \tilde{x}_{1,n} \\
0 & 1 & \tilde{x}_{2,3} & \cdots & \tilde{x}_{2,n} \\
 & & \cdots & & \\
0 & \cdots & \cdots & 1 & \tilde{x}_{n-1,n} \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{bmatrix} \tag{5}
$$

当 $k = 0$ 时, 有

$$
\begin{cases}
y_{1,2} = a - 0 - \tilde{a}_0 \\
y_{i,i+1} = x_{i-1,i} + a_0 - \tilde{x}_{i-1,i} - \tilde{a}_0 = \\
\qquad y_{i-1,i} + a_0 - \tilde{a}_0, \quad i = 2, \cdots, n-2 \\
0 = x_{n-1,n} + a_0 - \tilde{x}_{n-1,n} - \tilde{a}_0 = y_{n-1,n} + a_0 - \tilde{a}_0
\end{cases} \tag{6}
$$

由 $a_0 = \tilde{a}_0$ 容易得到 $y_{i,i+1} = 0\ (i = 1, 2, \cdots, n-1)$, 即 Y 的第 1 条对角线元素均为 0.

假设 Y 的第 $k+1$ 条(从第 0 条开始计数) 对角线元素均为 0, 且 $a_i = \tilde{a}_i\ (i = 0, 1, \cdots, k-1)$, 再由(6) 式两边的第 k 条对角线元素对应相等, 有

$$
\begin{cases}
y_{1,2}h_{2,k+1} + \cdots + y_{1,k+1}h_{k+1,k+1} + y_{1,k+2} = \\
\quad a_0 y_{1,k+1} + \cdots + a_{k-1} y_{k,k+1} + a_k - \tilde{a}_k \\
y_{i,i+1}h_{i+1,i+k} + \cdots + y_{i,i+k}h_{i+k,i+k} + y_{i,i+k+1} = \\
\quad y_{i-1,i+k} + a_0 y_{i,i+k} + \cdots + a_{k-1} y_{i+k-1,i+k} + \\
\quad a_k - \tilde{a}_k \quad (i = 2, \cdots, n-k-1) \\
y_{n-k,n-k+1}h_{n-k+1,n} + \cdots + y_{n-k,n-1}h_{n-1,n} + y_{n-k,n}h_{n,n} = \\
\quad y_{n-k-1,n} + a_0 y_{n-k,n} + \cdots + a_{k-1} y_{n-1,n} + a_k - \tilde{a}_k
\end{cases} \tag{7}
$$

由归纳假设, 式(7) 可化简得到

$$
\begin{cases}
y_{1,k+2} = a_k - \tilde{a}_k \\
y_{i,i+k+1} = y_{i-1,i+k} + a_k - \tilde{a}_k (i = 2, \cdots, n-k-1) \\
0 = y_{n-k-1,n} + a_k - \tilde{a}_k
\end{cases} \tag{8}
$$

把这 $n-k$ 个方程相加, 得 $\sum_{i=1}^{n-k-1} y_{i,i+k+1} = \sum_{i=2}^{n-k} y_{i-1,i+k} + (n-k)(a_k - \tilde{a}_k)$, 即 $(n-k)(a_k - \tilde{a}_k) = 0$, 我们有 $a_k = \tilde{a}_k$.

把 $a_k = \tilde{a}_k$ 代回方程(8) 求解, 可得 $y_{i,i+k+1} = 0\ (i = 1, 2, \cdots, n-k-1)$. 综上所述可知 $Y = X_1 - X_2 = 0$, $T_1 = T_2$.

综合定理 1 和定理 2, 证明了摘要中所叙述的结论.

4　算法和例子

由前面简单和构造性的证明, 很容易编制出计算程序.

算法: 下面的算法对任意给定的单位上 Hessenberg 矩阵 H, 计算上 Hessenberg 的 Toeplitz 矩阵 T 和单位上三角阵 X, 使得 $XHX^{-1} = T$.

第 1 步: 计算: $a_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} h_{i,i}\right) / n$ 和 $x_{i,i+1} = i \times a_0 - \sum_{l=1}^{i} h_{l,l}\ (i = 1, 2, \cdots, n-1)$.

第 2 步: 对 $k = 1$ 到 $n-1$ 和 $i = 1$ 到 $n-k-1$, 计算:

$$
a_k = \sum_{l=1}^{n-k} \left(h_{l,l+k} + \sum_{j=l+1}^{l+k} x_{l,j} h_{j,l+k} - \sum_{j=0}^{k-1} a_j x_{l+j,l+k} \right) /
$$

$$(n-k)\quad x_{i,i+k+1} = i\times a_k + \sum_{l=1}^{i}\left(\sum_{j=0}^{k-1} x_{j+l,k+l} - h_{l,k+l} - \sum_{j=l+1}^{k+l} x_{l,j}h_{j,k+l}\right)$$

下面举一个 4 阶单位上 Hessenberg 矩阵的例子.

例: 假设

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

根据算法程序算出相应的 X 和 T 如下:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T = Toep(0, 0, 1, 5, 6, 7, 8) = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

参考文献:

[1] Steven Mackey D, Niloufer Mackey. Is every matrix similar to a Toeplitz matrix[J]. Linear Algebra and its Applications, 1999, 297: 87- 105.

[2] 卢琳璋, 曾晓明, 许传炬, 等. 线性代数[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

On Similarity of Hessenberg Matrix and Toeplizt Matrix

LU Lin-zhang, ZHANG Mei-hong

(Dept. of Math., Xiamen Univ., Xiamen 361005, China)

Abstract: For any $n\times n$ complex unit upper Hessenberg matrix H, there exist a unique unit triangular matrix X and a unique unit upper Hessenberg Toeplitz matrix T such that $XHX^{-1} = T$. The proof is simple and constructive, by means of solving the matrix equation directly.

Key words: Hessenberg matrix; Toeplitz matrix; matrix equation