第 44卷 第 4期
2005年 7月
厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)
Vol. 44 No. 4
Jul. 2005

Toeplitz P-阵的完成问题

何 明, 卢琳璋*
(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 部分阵的完成问题有着广泛的应用背景, 本文从研究行列式符号的角度出发, 主要讨论了 P-阵的完成问题, 指出三阶的部分位置对称 Toeplitz P-阵都有相应完成, 给出了四阶 Toeplitz P-阵有相应完成的充分条件, 在此基础上给出了 $n\times n$部分位置对称 Toeplitz P-阵有相应完成的一些模式.

关键词: P-阵; Toeplitz阵; 部分阵的完成; 完全非对称矩阵
中图分类号: O 151 文献标识码: A 文章编号: 0438-0479(2005)04-0450-03

部分阵的完成问题在地震重构, 数据密码传输, 图象质量的提高以及工程计算上都有着广泛的应用. 在这些问题中, 数据可能是不完备的, 幸运的是, 如果把这些数据放到矩阵当中来考虑, 这些矩阵必须满足一定的性质, 研究这些矩阵的完成问题就可以检测已知数据的正确性并对丢失数据提出一定的推测, 这就产生了对部分矩阵完成问题的研究.

定义 1 一个实方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 P-矩阵, 如果 $\boldsymbol{A}$ 的所有主子式都是正的. 若所有主子式为非负, 则称为 P_0 阵.

定义 2 如果一个矩阵的一部分元素已知, 另一部分元素未知, 则称该矩阵为部分矩阵. 如果一个部分实方阵的已知元所能构成的主子阵都是 P-阵, 则称这个方阵为部分 P-阵.

一个 n 阶方阵的模式是由这个 n 阶方阵的一些位置构成的, 也就是说, 是集合 $\{1, 2, \cdots, n\}\times\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个子集. 部分矩阵的完成问题通常都是考虑模式的完成问题, 即已知元素在哪些位置上的某一类部分阵是否能完成为该类矩阵. 在完成问题上已经做了大量的研究, 比如: 非负 P_0 阵的完成[1]、弱符号对称的 P-阵的完成[2]、P-阵的完成[4] 等等.

定义 3 Toeplitz矩阵是一个 $T = (t_{k,j})_{n\times n}$ 的矩阵, 其中 $t_{k,j} = t_{k-j}$. 即

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & & \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ t_{-(n-1)} & & \cdots & & t_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

本文考虑的是部分 Toeplitz P-阵的完成问题, 为考虑方便, 我们把平行于主对角线的元素所在位置也称为对角线, 分别设为第 i对角线 $i = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm(n-1)$ (在 (1) 中, t_i 元位于第 i对角线上). 显然, 若模式中不包含主对角线, 则相应的部分 Toeplitz P-阵一定有 Toeplitz P-阵完成, 因为我们只要取主对角线上的元素足够大就可以了. 所以, 在接下来的讨论中, 我们都假设模式中包含了主对角线, 又因为 P-阵在正对角矩阵的乘法下是封闭的, 所以我们不妨设主对角线上的元素为 1.

1 三、四阶情形

先考虑阶数为三和四的情形, 这对我们考虑高阶的情形很有帮助.

结论 1 所有三阶的部分位置对称 Toeplitz P-阵都有相应完成.

证明 分情况加以证明.

(i) 部分阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & a & x \\ b & 1 & a \\ y & b & 1 \end{pmatrix}$$

其中 x, y 为未知元, a, b 为已知元, 这是一个主对角线及第 ± 1条对角线已知的模式. 取 $x = a^2, y = 0$可得到一个 Toeplitz P-阵完成, 或者取 $y = -x$, x取足够大也可. 也就是说, 存在正数 M. 当 $x > M$ 时, 完成的 Toeplitz阵为 P-阵.

收稿日期: 2004-09-18
基金项目: 国家自然科学基金 (10271099)资助
作者简介: 何明 (1975-), 男, 博士研究生.
* 通讯作者: lzlu@xmu.edu.cn

(ii) 部分阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & x & a \\ y & 1 & x \\ b & y & 1 \end{pmatrix}$$

在该模式下, 取 $x = y = 0$即可.

若第 ±1, ±2条对角线均未知, 显然有完成, 取所有未知元为零即可. 所以三阶是一定有完成的.

对于四阶的情形, 也同样分情况来讨论, 由于三阶一定有完成, 所以在讨论四阶的时候只需要考虑一对对称的非主对角线未知的情形.

(i) 部分阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & x & a_3 \\ b_1 & 1 & a_1 & x \\ y & b_1 & 1 & a_1 \\ b_3 & y & b_1 & 1 \end{pmatrix}$$

取 $y = - x$, 显然 2阶主子式都大于零, 考虑 $\boldsymbol{A}$中 4个三阶主子式以及行列式 $\boldsymbol{A}$. 由三阶的完成知, 存在 M_1, 当 $x > M_1$时, 有 $\det\boldsymbol{A}\{1, 2, 3\} = \det\boldsymbol{A}\{2, 3, 4\} > 0$又 $\det\boldsymbol{A}\{1, 3, 4\}$中, 最高次 x^2的系数为 1, 是一个正数, 所以存在M_2, 当 $x > M_2$时, 有 $\det\boldsymbol{A}\{1, 3, 4\} > 0$ 同理, 由于在 $\det\boldsymbol{A}\{1, 2, 4\}$最高次 x^2和 $\det\boldsymbol{A}\{1, 2, 3, 4\}$中最高次 x^4的系数均为 1, 所以分别存在M_3, M_4, 当 $x > M_3$时, 有 $\det\boldsymbol{A}\{1, 2, 4\} > 0$, 当 $x > M_4$时, 有 $\det\boldsymbol{A}\{1, 2, 3, 4\} > 0$ 由上可得, 取$M = \max\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$, 当 $x > M$ 时, 完成该 Toeplitz阵为 P-阵.

(ii) 部分阵为

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & x \\ b_1 & 1 & a_1 & a_2 \\ b_2 & b_1 & 1 & a_1 \\ y & b_2 & b_1 & 1 \end{pmatrix}$$

取 $y = - x$, 显然二阶主子式都大于零, 又有两个三阶子式是已知的, 考虑 $\boldsymbol{A}$中其余两个三阶主子式以及行列式 $\boldsymbol{B}$. 与上同, 存在 M_1, 当 $x > M_1$时, 有 $\det\boldsymbol{A}\{1, 2, 4\} > 0$(最高次 x^2系数为 1). 存在M_2, 当 $x > M_2$时, 有 $\det\boldsymbol{A}\{1, 3, 4\} > 0$(最高次 x^2系数为 1). 又 $\det\boldsymbol{A}\{1, 2, 3, 4\}$中最高次 x^2的系数为 $1 - a_1 b_1$, 是 $\boldsymbol{A}$中子阵 $\boldsymbol{A}\{2, 3\}$的行列式, 所以有 $1 - a_1 b_1 > 0$ 于是存在M_3, 当 $x > M_3$时, 有 $\det\boldsymbol{A}\{1, 2, 3, 4\} > 0$ 综上可得, 取 $M = \max\{M_1, M_2, M_3\}$, 当 $x > M$ 时可完成该 Toeplitz阵为 P-阵.

(iii) 部分阵

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & x & a_2 & a_3 \\ y & 1 & x & a_2 \\ b_2 & y & 1 & x \\ b_3 & b_2 & y & 1 \end{pmatrix}$$

在条件 $a_2 + b_2 > - 2$下有 Toeplitz P-阵完成. 取 $y = - x$, 显然 2阶主子式都大于零. 考虑 4个三阶主子式和行列式 $\boldsymbol{C}$. $\det\boldsymbol{A}\{1, 2, 3\} = \det\boldsymbol{A}\{2, 3, 4\}$, 且最高次 x^2的系数为 $2 + a_2 + b_2 > 0$ 所以存在 M_1, 当 $x > M_1$时, 有 $\det\boldsymbol{A}\{1, 2, 3\} = \det\boldsymbol{A}\{2, 3, 4\} > 0$ 同样, 由于 $\det\boldsymbol{A}\{1, 2, 4\}$, $\det\boldsymbol{A}\{1, 3, 4\}$, $\det\boldsymbol{A}\{1, 2, 3, 4\}$中 x的最高次幂的系数为 1, 所以分别存在 M_2, M_3, M_4, 当 $x > \max\{M_2, M_3, M_4\}$时, 这些行列式为正. 综上可得, 取$M = \max\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$, 当 $x > M$ 时, 可完成该 Toeplitz阵为 P-阵.

2　高阶部分 Toeplitz P-阵的完成

引理 1　仅 $a_{1,n}$, $a_{n,1}$两元素未知的部分位置对称 Toeplitz P-阵有完成.

证明　令该类部分阵的形式为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{21}^T & x \\ b_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & a_{23} \\ y & b_{23}^T & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

其中 a_{21}, a_{23}, b_{21}, b_{23}为列向量, $\boldsymbol{A}_{22}$为 $(n - 2)$阶 P-阵.

取 $y = - x$, 令$N = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$, 对 $\alpha \subseteq N - \{n\}$进行讨论.

(i) 若 $1 \notin \alpha$, 则 $\det\boldsymbol{A}\{\alpha, n\}$为已知主子式.

(ii) 若 $1 \in \alpha$, $\det\boldsymbol{A}\{\alpha, n\}$中 x^2的系数为 $\det\boldsymbol{A}\{\alpha - \{n\} - \{1\}\}$, 是一已知 P-阵, 所以系数为正, 于是存在 M, 对任意 $\alpha \subseteq N - \{n\}$, 均有 $\det\boldsymbol{A}\{\alpha, n\} > 0$

根据(i), (ii) 知, 当 $x > M$ 时, 所有的主子式为正, 所以有 Toeplitz P-阵完成.

由该证明过程知, 在非 Toeplitz情形下, 有:

推论 1　仅两对称元未知的部分 P-阵有 P-阵完成.

引理 2　仅 $a_{1\,n-1}$, $a_{n-1,1}$, $a_{2\,n}$, $a_{n,2}$四个元素未知的部分位置对称 Toeplitz P-阵有完成.

证明　令该部分阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & * & a_{31}^T & x & * \\ * & 1 & a_{32}^T & * & x \\ b_{31} & b_{32} & \boldsymbol{A}_{33} & a_{34} & a_{35} \\ y & * & b_{34}^T & 1 & * \\ * & y & b_{35}^T & * & 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

其中 x, y为未知元, * 为已知数值, 取 $y = - x$, 令$N = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$, 讨论 $\alpha \subseteq N$的情形.

(i) $1, n - 1 \in \alpha$, 但 $2, n \notin \alpha$, 也即 $\boldsymbol{A}\{\alpha\}$中只含未知元 $a_{1,n-1}$, $a_{n-1\,1}$, 不含未知元 $a_{2\,n}$, $a_{n,2}$. 根据推论 1知, 存在M_1, 当 $x > M_1$时, 有 $\det\boldsymbol{A}\{\alpha\} > 0$

(ii) $2, n \in \alpha$, 但 $1, n - 1 \notin \alpha$, 也即 $\boldsymbol{A}\{\alpha\}$中只含

未知元 $a_{2,n}$, $a_{n,2}$, 不含未知元 $a_{1,n-1}$, $a_{n-1,1}$. 根据的推论1知, 存在 M_2, 当 $x > M_2$ 时, 有 $\det A(\alpha) > 0$.

(iii) $1, 2, n-1, n \notin \alpha$, 此时 $A(\alpha)$ 为已知主子阵.

(iv) $\{1, 2, n-1, n\} \subseteq \alpha$, 即 $A(\alpha)$ 中包含 4个未知元. 令 $\beta = \alpha - \{1, 2, n-1, n\}$. 当 $\beta = \varnothing$ 时, $A(\alpha)$ 为四阶中的(i)情形, 所以存在 M_3, 当 $x > M_3$ 时, 有 $\det A(\alpha) > 0$ 当 $\beta \neq \varnothing$ 时, $\det A(\alpha)$ 中最高次 x^4 的系数为 $\det(\beta)$, 它是 $A(33)$ 的一个主子式, 由于是 P-阵, 所以该主子式为正, 于是存在 M_4, 当 $x > M_4$ 时, 有 $\det(\alpha) > 0$.

取 $M = \max\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$, 则当 $x > M$ 时, 对任意 $\alpha \subseteq N$, 有 $\det(\alpha) > 0$. 所以部分阵(3)有 Toeplitz P-阵完成.

定理 1　第 $-k$ 到第 k 条对角线元素已知, 其它对角线元素未知的部分位置对称 Toeplitz P-阵有完成.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & & a_k & & ? \\ b_1 & 1 & a_1 & \ddots & \ddots & \\ & b_1 & \ddots & \ddots & \ddots & a_k \\ b_k & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 & \\ & \ddots & \ddots & b_1 & 1 & a_1 \\ ? & & b_k & & b_1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

证明　根据引理 1, 在 $A(1, 2, \ldots, k+2)$ 中可以完成 $(1, k+2)$, $(k+2, 1)$ 两未知元, 这样就可以完成第 $k+1$ 和第 $-(k+1)$ 条对角线. 继续该步骤, 就可以得到该部分阵的 Toeplitz P-阵完成.

推论　已知元位于成等差数列的对角线位置时的部分位置对称 Toeplitz P-阵有 Toeplitz P-阵完成.

由于在置换相似下, 该部分阵相似于一对角块结构与(iv)相同, 其它元为未知元的部分阵. 完成对角块以后把其他元取为零, 得到 P-阵完成. 置换回来后为 Toeplitz P-阵.

定理 2　已知对角线标号非连续时的部分位置对称 Toeplitz P-阵有相应完成.

证明　假设该部分阵为 A, 有第 $-k_s$, $-k(s-1)$, …, $-k_1$, 0, k_1, …$k(s-1)$, k_s 条对角线是已知的, 且有 $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_s$, $|k_i - k_j| > 1$, 第一步, 若 $k_1 > 1$, 取第 $-k_1$ 到 k_1 中所有未知元为 0, 则完成了第 $-k_1$ 条对角线到第 k_1 条对角线的未知元, 根据引理 1, 可完成第 $-(k_1+1)$ 和第 k_1+1 条对角线, 继续应用引理 1, 可一直完成到第 $-k_2-2$ 到第 k_2-2 条对角线中所有未知的对角线, 再根据引理 2, 可完成第 $-k_2-1$ 和第 k_2-1 条对角线, 则完成了第 $-k_2$ 到第 k_2 条对角线; 若 $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, 根据四级的完成(i), 可完成第 ± 2 条对角线, 则完成了第 $-k_2$ 到第 k_2 条对角线; 若 $k_1 = 1$, $k > 3$, 根据引理 1, 可完成第 $-k_2-2$ 到第 k_2-2 条对角线中所有未知对角线, 再根据引理 2, 可完成第 $-k_2-1$ 和第 k_2-1 条对角线, 则完成了第 $-k_2$ 到第 k_2 条对角线. 第二步, 反复利用引理 1和 2, 就可得到该部分 Toeplitz P-阵的完成.

参考文献:

[1] Choi J Y, Dealba L M, Hogben L, et al. The nonnegative P_0-matrix completion problem [J]. Electron. J. Linear Algebra, 2003, 10: 46－59.

[2] DeAlba L M, Hardy T L, Hogben L, et al. The (weakly) sign symmetric P-matrix completion problems [J]. Eletron. J. Linear Algebra, 2003, 10: 257－271.

[3] Johnson C R, Smith R L. The completion problem for M-matrices and inverse M-matrices [J]. Linear Algebra and its Aplications, 1996, 241－243: 655－667.

[4] Johnson C R, Kroschel B K. The combinatorially symmetric P-matrix completio problem [J]. Electronic Journal Linear Algebra, 1996, (1): 59－63.

[5] Choi J Y, Dealba L M. The P_0-matrix completion problem [J]. The Electronic Journal of Linear Algebra, 2002, (1): 1－20.

Toeplitz P-matrix Completion Problem

HE Ming, LU Lin-zhang*

(School of Mathematical Science, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract　For a class of real Toeplitz P-matrix, a list of positions in an n-by-n matrix (a pattern) is said to have Toeplitz P-matrix completion if every partial Toeplitz P-matrix that specifies exactly these positions can be completed to a Toeplitz P-matrix. It was discussed that the partial position symmetric Toeplitz p-matrix of order 3 have corresponding completion and the partial position symmetric Toeplitz P-matrix of order 4 have completion under certain condition. Some sufficient conditions that guarantee an n-by-n partial position symmetric Toeplitz P-matrix has completion were given.

Key words　P_0 matrix; partial position symmetry; Toeplitz matrix; completion