第 43 卷　增　刊　　厦门大学学报(自然科学版)　　Vol. 43　Sup.
2004 年 8 月　　Journal of Xiamen University (Natural Science)　　Aug. 2004

文章编号: 0438-0479(2004)S-349-04

$(I+S_{\max})$ 预条件 Gauss-Seidel 迭代法进一步探索

庄伟芬, 卢琳璋

(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: Kotakemori 研究了不可约对角占优 Z-阵的 $(I+S_{\max})$ 预条件 Gauss-Seidel 迭代法, 并证明在一定条件下, 进行 $(I+S_{\max})$ 预处理比 $(I+S)$ 预处理收敛效果更好. 本文将其收敛性定理推广到具有广泛应用背景的 H-阵, 并将这两类预条件 Gauss-Seidel 迭代法相结合对不可约非奇 M-阵进行两次适当的预处理, 数值例子表明这样可以大大加快 Gauss-Seidel 迭代法的收敛速度.

关键词: 预条件 Gauss-Seidel 迭代法; 收敛速度; H-矩阵

中图分类号: O 151　　文献标识码: A

1991 年, Gunawardena[1] 提出带预条件子 $P_s=I+S$, 其中

$$S=\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & & & \\ & 0 & -a_{23} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & -a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

的 *Modified* Gauss-Seidel 迭代法(简称 MGS 迭代法)

2002 年, Hisashiki Kotakemori 等[2] 提出带预条件子

$$P_m=I+S_{\max},$$

$$S_{\max}=(s_{ij}^m)=\begin{cases}-a_{i,k_i}, & j=k_i, j>i\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

的 Gauss-Seidel 迭代法, 其中, $k_i=\min_j \in \{j \mid \max_{j>i} |a_{ij}|, i<n\}$. 其主要结论有:

(1) (Lemma 3.2[2]) 设 A 为不可约对角占优 Z-矩阵, 则 $A_m=M_m-N_m$ 是 Gauss-Seidel 收敛分裂, 其中 $A_m=P_mA$.

(2) (Theorem 3.6[2]) 设 A 为不可约对角占优 Z-矩阵, 则 $A_m=M_m-N_m$ 和 $A_s=M_s-N_s$ 是 Gauss-Seidel 收敛分裂, 其中 $A_m=P_mA$, $A_s=P_sA$. 如果 $a_{i,i+1}a_{i+1,j}\leqslant a_{i,k_i}a_{k_i,j}$ $(i=1,\dots,n-1; j=1,\dots,i)$, 且存在一个正向量 x, 使得 $0\leqslant A_sx\leqslant A_mx$, 则 $\rho(M_m^{-1}N_m)\leqslant\rho(M_s^{-1}N_s)\leqslant\rho(M^{-1}N)<1$.

本文首先将上述收敛性定理推广到具有广泛应用背景的 H-阵, 然后将这两类预条件 Gauss-Seidel 迭代法相结合对不可约非奇 M-阵进行两次适当的预处理, 最后用数值例子说明进行两次预处理的效果是十分显著的.

1　H-阵的 Gauss-Seidel 型 $(I+S_{\max})$ 预条件迭代法收敛性定理

引理 1.1　设 A 是 H-阵, A 和 A 的比较矩阵 $\langle A\rangle$ 的 Gauss-Seidel 迭代矩阵分别记为 T_G 和 $\langle T\rangle_G$, 其中 $T_G=(I-L)^{-1}U$, $\langle T\rangle_G=(I-|L|)^{-1}|U|$. 则 $\rho(T_G)\leqslant\rho(\langle T\rangle_G)<1$.

证明　从文献[3] 知道, 如果 M 是 H-阵, 则 $|M^{-1}|\leqslant\langle M\rangle^{-1}$.

由于 $(I-L)$ 是 M-阵, 因此, $|(I-L)^{-1}U|\leqslant|(I-L)^{-1}||U|\leqslant(I-|L|)^{-1}|U|$. 从而有

$$\rho((I-L)^{-1}U)\leqslant\rho(|(I-L)^{-1}U|)\leqslant\rho((I-|L|)^{-1}|U|),$$

即 $\rho(T_G)\leqslant\rho(\langle T\rangle_G)$.

又由于 A 是 H-阵, 则 $\langle A\rangle$ 是 M-阵, 由文献[4]

收稿日期: 2004-01-05
基金项目: 国家自然科学基金(10271099)资助
作者简介: 庄伟芬(1972-), 女, 硕士研究生.

可知, M- 阵的 Gauss-Seidel 迭代收敛, 故 $\rho((I-|L|)^{-1}|U|)<1$. 即 $\rho(T_G)\leqslant\rho(\langle T\rangle_G)<1$.

引理 1.2[4]　设 $A^{-1}\geqslant 0$, $A=M_1-N_1=M_2-N_2$ 分别是 A 的两个弱正则分裂, 如果 $M_1^{-1}\leqslant M_2^{-1}$, 则 $\rho(M_1^{-1}N_1)\geqslant\rho(M_2^{-1}N_2)$.

定理 1.1　设 A 是 H- 阵, 则 $A_m=(I+S_{\max})A$ 也是 H- 阵, 且 $\rho(T_m)<1$, 其中 T_m 是 A_m 的 Gauss-Seidel 迭代矩阵.

证明　设

$$A_m=(\tilde{a}_{ij})=\begin{cases}a_{ij}-a_{i,k_i}a_{k_i,j}, & i=1,2,\cdots,n-1\\ a_{ij}, & i=n\end{cases}\tag{3}$$

令 $x=\langle A\rangle^{-1}e$, 显然 $x\gg 0$. 这是因为 A 是 H- 阵, 则 $\langle A\rangle$ 是 M- 阵, 从而 $A^{-1}\geqslant 0$.

对 $1\leqslant i\leqslant n-1$,

$$\begin{aligned}(\langle A_m\rangle x)_i &= |\tilde{a}_{ii}|x_i-\sum_{j\neq i}|\tilde{a}_{ij}|x_j=\\ &|1-a_{i,k_i}a_{k_i,i}|x_i-\sum_{j\neq i}|a_{ij}-\\ &a_{i,k_i}a_{k_i,j}|x_j\geqslant x_i-|a_{i,k_i}a_{k_i,i}|x_i-\\ &\sum_{j\neq i,k_i}|a_{ij}-a_{i,k_i}a_{k_i,j}|x_j\geqslant\\ &x_i-|a_{i,k_i}a_{k_i,i}|x_i-\sum_{j\neq i,k_i}|a_{ij}|x_j-\\ &\sum_{j\neq i,k_i}|a_{i,k_i}a_{k_i,j}|x_j=(\langle A\rangle x)_i+\\ &\sum_{j\neq i}|a_{ij}|x_j-\sum_{j\neq i,k_i}|a_{ij}|x_j-\\ &|a_{i,k_i}a_{k_i,i}|x_i-\sum_{j\neq i,k_i}|a_{i,k_i}a_{k_i,j}|x_j=\\ &1+|a_{i,k_i}|x_{k_i}-\sum_{j\neq k_i}|a_{i,k_i}a_{k_i,j}|x_j=\\ &1+|a_{i,k_i}|x_{k_i}-|a_{i,k_i}|(x_{k_i}-\\ &(\langle A\rangle x)_{k_i})=1+|a_{i,k_i}|>0\end{aligned}$$

对 $i=n$, $(\langle A_m\rangle x)_n=|a_{nn}|x_n-\sum_{j\neq n}|a_{nj}|x_j=(\langle A\rangle x)_n=(e)_n=1\geqslant 0$. 所以, $\langle A_m\rangle$ 是 M- 阵, 从而, A_m 是 H- 阵. 由引理 1.1 可得 $\rho(T_m)<1$.

定理 1.2　设 A 是 H- 阵, 则 Gauss-Seidel 分裂 $A_m=M_m-N_m$ 收敛, 且 $\rho(T_m)\leqslant\rho(T)<1$, 其中 T 和 T_m 分别是 A 和 A_m 的 Gauss-Seidel 迭代矩阵.

证明　我们只需证明当 A 是 M- 阵的情形, 再由引理 1.1 便可知当 A 是 H- 阵时上述结论成立.

首先, 若 A 是 M- 阵, 则 A_m 也是 M- 阵. 因为 A 是 Z- 阵, 由式子(3) 易知 A_m 也是 Z- 阵. 又 A 是 M- 阵, 则存在一个正向量 x, 使得 $A_x\gg 0$. 而 $A_m x=(I+S_{\max})Ax\gg 0$, 所以 A_m 也是 M- 阵. 又

$$A_m=(I+S_{\max})A=(I-L-D_m-L_m)-(U-S_{\max}+S_{\max}U+U_m)\equiv E_m-F_m,$$

其中 $S_{\max}L=D_m+L_m+U_m$, D_m, L_m, U_m 分别是 $S_{\max}L$ 的对角、严格下三角和严格上三角部分. 易知 E_m 是对角元为正的下三角 Z- 阵, 故也是 M- 阵.

记 $A=(I+S_{\max})^{-1}E_m-(I+S_{\max})^{-1}F_m\equiv M_m-N_m$, $A=(I-L)-U\equiv M-N$. 显然 $F_m\geqslant 0$, 又有 $E_m^{-1}\geqslant 0$, 所以 $E_m^{-1}F_m\geqslant 0$.

因为 $M_m^{-1}=E_m^{-1}(I+S_{\max})\geqslant 0$, $M_m^{-1}N_m=E_m^{-1}F_m\geqslant 0$, 故 $A_m=M_m-N_m$ 是弱正则分裂. M- 阵的 Gauss-Seidel 分裂是弱正则分裂, 且收敛, 所以 $A=M-N$ 也是弱正则分裂.

而 $M_m^{-1}=E_m^{-1}(I+S_{\max})\geqslant E_m^{-1}=(I-L-D_m-L_m)^{-1}\geqslant(I-L)^{-1}=M^{-1}$, $N=U\geqslant 0$, 由引理 1.2 知 $\rho(M_m^{-1}N_m)\leqslant\rho(M^{-1}N)$, 所以 $\rho(T_m)\leqslant\rho(T)<1$.

2　预条件子 $(I+S_{\max})$ 和 $(I+S)$ 相结合的 Gauss-Seidel 型二次预处理

考虑线性方程组

$$Ax=b\tag{4}$$

其中 $A\in R^{n\times n}$, $b\in R^n$. 不失一般性, 假设 A 是具有单位元的不可约非奇 M- 阵, 令 $A=I-L-U$, L、U 分别是 A 的严格下三角和严格上三角部分, 此时, A_m 和 A_s 仍具有不可约非奇 M- 阵的性质.

1997 年, Kohno 等[5] 将 P_s 参数化, 考虑预条件子

$P_\alpha=I+S_\alpha$, 其中

$$S_\alpha=\begin{pmatrix}0 & -\alpha_1a_{12} & & & \\ & 0 & -\alpha_2a_{23} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & -\alpha_{n-1}a_{n-1,n}\\ & & & & 0\end{pmatrix}\tag{5}$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1})$, $\alpha_i\in(0,c]$, $i=1,2,\cdots,n-1$, $c>1$, 文献[6] 称这个方法为 α-MGS 法, 并据此提出了用 P_α 和 P_β 进行二次预处理的 $\alpha\beta$-MGS 方法, 其中 $0\ll\alpha,\beta\ll e\equiv(1,1,\cdots,1,1)^T$, 使得收敛速度得到改善. 最近, 文献[7] 证明了不可约非奇 M- 阵 α-MGS 法的收敛速度是参数 α 的单调函数, 当 $\alpha=e$, 即 $P_s=I+S$ 时, 收敛速度最快. 然

而, 对矩阵 A 进行 P_s 预处理, 由于 P_sA 的第一条上对角线元素都为 0, 致使无法用 P_s 再进行第二次预处理. 但若对 A 进行 $P_m = I + S_{max}$ 预处理后, 则 P_mA 的上三角部分每行模最大的元素化为 0, 接下来仍可用 P_m 或 P_s 对 P_mA 再进行第二次预处理.

对方程组(4) 进行第一次 P_i 预处理, 其中 $i = m$ 或 s, 即

$$P_iAx = P_ib \tag{6}$$

令 $A_i = P_iA$, 而 A 和 A_i 的 Gauss-Seidel 迭代矩阵分别记为 T 和 T_i. 我们知道, 非奇 M- 阵的 Gauss-Seidel 型 $(I + S_{max})$ 和 $(I + S)$ 预条件迭代法的收敛速度均不慢于相应的古典 Gauss-Seidel 迭代法, 即 $\rho(T_i) \leqslant \rho(T) < 1$.

再将 A_i 的对角元单位化, 得到方程组

$$\tilde{A}_ix = D_i^{-1}P_ib \tag{7}$$

其中 $\tilde{A}_i = D_i^{-1}A_i$, $D_i = \mathrm{diag}(A_i)$. $\tilde{A}_i$ 的 Gauss-Seidel 迭代矩阵记为 $\tilde{T}_i$, 显然 $\rho(\tilde{T}_i) = \rho(T_i)$.

现对方程组(7) 进行第二次 P_j 预处理, 其中 $j = m$ 或 s, 即

$$P_j\tilde{A}_ix = P_jD_i^{-1}P_ib \tag{8}$$

其 Gauss-Seidel 迭代矩阵记为 $\tilde{T}_{ij}$, 同理可知 $\rho(\tilde{T}_{ij}) \leqslant \rho(\tilde{T}_i)$. 最后有

$$\rho(\tilde{T}_{ij}) \leqslant \rho(\tilde{T}_i) = \rho(T_i) \leqslant \rho(T) < 1. \tag{9}$$

通过以上分析, 并以 Hisashiki Kotakemori 的主要结论(2)(Kotakemori Theorem 3.6[2]) 做为选择预条件子的判断条件, 该定理实质上是对不可约非奇 M- 阵成立, 我们提出下面的预条件子 $(I + S_{max})$ 和 $(I + S)$ 相结合的 Gauss-Seidel 二次预处理的算法 (TP), 并给出 3 个代表性的数值算例, 其中: T 代表古典 Gauss-Seidel 迭代矩阵, 下标 m 和 s 分别代表 Gauss-Seidel 型 $(I + S_{max})$ 和 $(I + S)$ 预处理; 下标 mm 代表连续两次施行 $(I + S_{max})$ 预处理; 下标 ms 代表第一次施行 $(I + S_{max})$ 预处理第二次施行 $(I + S)$ 预处理, sm 则相反.

Algorithm 2.1 (TP)

```
input: 不可约非奇 M- 阵 A
output: 经两次预处理后的矩阵 A
t = 1                                   % 预处理次数
f = 0                                   % 控制(I + S) 预处理
g = 1                                   % 控制(I + S_max) 预处理
while t ≤ 2
  if f = 1                              % 若第一次施行(I + S) 预处理后
    A = P_m A; P_m = I + S_max; break
                                        % 则第二次无需判断, 直接
  end                                   % 施行(I + S_max) 预处理并结束
  for i = 1: n - 1                      % 选择预条件子的
    for j = 1: i                        % 判断条件
      if a_{i,i+1} a_{i+1,j} > a_{i,k_i} a_{k_i,j}
                                        % 只要有一对 i, j 使该式成立
        g = 0; break; end               % g = 0 跳出 for 循环
      end
  end
  if g = 1                              % 即对所有 i = 1: n - 1, j = 1: i
                                        都有 a_{i,i+1} a_{i+1,j} ≤ a_{i,k_i} a_{k_i,j}
    A = P_m A; P_m = I + S_max
                                        % 则施行(I + S_max) 预处理
  else
    A = P_s A; P_s = I + S; f = 1
                                        % 否则施行(I + S) 预处理
  end
  if t = 1                              % 第一次预处理后
    A = D^{-1} A; D = diag(a_ii)        % 将 A 对角元单位化
  end
  t = t + 1                             % 迭代次数增加 1 次
end
```

例

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.2 & -0.6 \\ -0.1 & 1 & -0.1 & -0.5 \\ -0.3 & -0.1 & 1 & -0.1 \\ -0.4 & -0.3 & -0.1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.1 & -0.4 & -0.2 \\ -0.2 & 1 & -0.3 & -0.1 & -0.6 \\ -0.3 & -0.2 & 1 & -0.1 & -0.6 \\ -0.1 & -0.1 & -0.1 & 1 & -0.01 \\ -0.2 & -0.3 & -0.4 & -0.3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -0.0058 & -0.1935 & -0.2547 & -0.0389 \\ -0.2842 & 1 & -0.1675 & -0.2178 & -0.2158 \\ -0.2476 & -0.2697 & 1 & -0.1872 & -0.0895 \\ -0.1388 & -0.0117 & -0.2512 & 1 & -0.1324 \\ -0.2581 & -0.0816 & -0.1394 & -0.0489 & 1 \end{pmatrix},$$

表 1　收敛速度

Tab. 1　The convergerne rate

Matrix	$\rho(T)$	$\rho(T_m)$	$\rho(T_s)$	$\rho(T_{mm})$	$\rho(T_{ms})$	$\rho(T_{sm})$
A_1	0.5317	0.2897	0.5085	0.1352		
A_2	0.9611	0.9358	0.9505		0.8711	
A_3	0.3850	0.2954	0.2860			0.2139

以上的理论证明和数值例子均表明, 对不可约

非奇 M- 阵施行 $(I+S_{max})$ 与 $(I+S)$ 相结合的两次预处理, 可大大加快 Gauss-Seidel 型(预条件) 迭代法的收敛速度.

参考文献:

[1] Gunawardena A D, Jain S K, Larry Snyder. Modified iterative methods for consistent linear systems[J]. Linear. Algebra. Appl., 1991, (154-156): 123-143.

[2] Kotakemori H, et al. A comparison theorem for the iterative method with the preconditioner $(I+S_{max})$[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2002, (145): 373-378.

[3] Kolotilina L Y. Two-sided bounds for the inverse of an H-matrix[J]. Linear. Algebra. Appl., 1995, (225): 117-123.

[4] Berman A. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences[M]. USA: Academic Press, 1979.

[5] Kohno T, Kotakemore H, et al. Improving the Modified Gauss-Seidel method for Z-matrices[J]. Linear. Algebra. Appl., 1997, (267): 113-123.

[6] Weiwei Sun, Wen Li. Modified Gauss-Seidel type methods and Jacobi type methods for Z-matrices[J]. Linear. Algebra. Appl., 2000, (317): 227-240.

[7] Zhuang Wei-fen, Lu Lin-zhang. On the monotonicity of convergence rate of modified Gauss-Seidel method[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics. summited

Further Study on $(I+S_{max})$ Preconditioning Gauss-Seidel Iterative Method

ZHUANG Wei-fen, LU Lin-zhang

(School of Mathematical Science, Xiamen Univ., Xiamen 361005, China)

Abstract: Hisashiki Kotakemori had proposed a preconditioner $(I+S_{max})$ for irreducibly diagonally dominant Z-matrix, which achieves better convergence rate than the classical Gauss-Seidel method and even better than Modified Gauss-Seidel method with preconditioner $(I+S)$ under certain circumstances. We extend his convergence theorem to the case of H-matrix, and apply the preconditioner $(I+S_{max})$ to twice preconditioning for irreducible non-singular M-matrix, combining with another preconditioner $(I+S)$. Numerical examples had been given to confirm that the convergence rate had been improved on considerably.

Key words: preconditioning Gauss-Seidel iterative method; convergence rate; H-matrix