

文章编号: 0258-1825(2003)03-0368-08

非定常不可压粘性/无粘性耦合方程 的一种分步分解方法

林玉闽, 许传炬

(厦门大学数学系, 福建厦门 361005)

摘要:给出了数值求解初始变量不可压 Navier-Stokes/ Euler 耦合方程的一种分步块 LU 分解方法。与传统的时间分裂法不同, 该法无需压力中介边条件, 从而避免了传统时间分裂法要求的复杂的压力中介边条件逼近。分步块 LU 分解方法可看做经典的 Uzawa 算法的改进, 后者曾被成功应用于不可压 Navier-Stokes/ Euler 耦合方程的求解。但本文显示分步块 LU 分解法比经典的 Uzawa 方法更经济。分析显示该法具有良好的稳定性和高精度, 数值结果支持这一理论分析。

关键词: Uzawa 代数; LU 分解; Navier-Stokes/ Euler 耦合方程; 谱方法

中图分类号: V211.3 **文献标识码:** A

0 引言

复杂区域上粘性方程(如不可压 Navier-Stokes 方程), 无粘性方程(如不可压 Euler 方程)以及粘性/无粘性耦合方程的有效数值解法有赖于稀疏线性系统的快速解法。对于非定常不可压流, 压力算子是造成计算困难的主要因素, 这是因为压力的特征传播速度是无限的。在时间分裂格式中, 计算花费较大的部分在于解 Helmholtz 算子。在非定常不可压粘性方程的谱元法数值模拟中, 根据一般 Stokes 方程的离散性质, 一个常用的方法是 Uzawa 算法。Uzawa 算法利用块高斯消元法及对压力和速度的向后迭代法产生两个正定对称矩阵^[6]。根据计算复杂性及所需的计算费用分析可以证明这种分解方法比直接算法更诱人。

类似的技巧已被推广到粘性/无粘性耦合方程的求解。粘性/无粘性分析是区域分解技术中较为特殊的一类技巧, 在计算流体中的研究已有较长的历史, 但始终未能得到较大的发展, 其中的根本原因是以前的粘性/无粘性计算方法未能显而易见地达到减少计算量的目的, 而减少计算量正是区域分解技术的主要目的所在。已有的粘性/无粘性算法可大致分成两类: 一类是 Schwarz 子区域迭代法, 另一类是整体解法。前者的优点是两个耦合区域的计算可独立进行, 便于并行实现, 缺点是重复计算多, 总体计算量大。后者允许一次性同时求得粘性区域解和无粘性区域解, 避免了重复计算, 计算量较小。文献[14]引进了求解不可压粘性/无粘性耦合方程的一种新的耦合策略。这个策略在于把粘性/无粘性

* 收稿日期: 2002-05-20; 修订日期: 2002-07-30.

基金项目: 国家自然科学基金 19801028 项目, 科技部“中法先进研究计划”PRAS199-03 项目.

作者简介: 林玉闽(1964+), 讲师, 硕士, 厦门大学数学系计算数学专业.

耦合方程写成整体变分形式,利用这种新的弱形式,原始的耦合方程被转化成一个整体鞍点问题,类似于由纯粘性方程产生的鞍点问题。基于这种变分技巧,改进后的 Uzawa 方法得以成功地应用于粘性/无粘性耦合问题的求解^[14]。

本文的工作是文献[13]研究的继续。我们在此考虑一种改进的高斯消元法来降低压力迭代中求 Helmholtz 逆的次数,引入并分析一种新的分步预条件方法求解压力/速度代数鞍点问题。该法借鉴了最近发展的应用于不可压非定常 Navier-Stokes 方程的分步方法。这样一种逼近首先由 Maday 等人^[8]提出,接着 Petrot^[10]和 Couzy^[2]等人详细分析了其有效性。最近 P. Fischer^[4]等人成功地将该法应用于不可压 3D 粘性流的谱元计算。分步法与传统的时间分裂法(见 Chorin^[1], Temam^[12], Karniadakis^[5])有一共同的基础,即都产生压力的 Poisson 方程,不同之处在于前者的分裂步骤施加在空间离散之后的离散系统上,后者则施加在空间离散前。空间离散后的分裂法避免了传统的分裂法对压力边界条件的要求(这是传统分裂法的主要缺陷之一),因此比较容易构造高阶时间收敛格式。

本文证明分步分裂法应用于粘性/无粘性耦合问题将产生一个耦合压力 Poisson 方程。与应用于纯粘性方程不同之处在于此时的 Poisson 方程在无粘性区域中定义于 Gauss-Lobatto 网格点上,而在粘性区域中则定义于 Gauss 网格点上,两者通过交面算子联接。数值试验显示求解耦合压力 Poisson 方程比直接求解由经典 Uzawa 方法产生的压力系统简单、经济。分析还显示该法保持了经典 Uzawa 方法良好的稳定性和高精度,因此具有良好的发展前景。

1 耦合方程的 Uzawa 谱元法

假定 Ω 是 \mathbb{R}^d ($d=2$ 或 3) 上有界连通开子集,具有边界 $\partial\Omega$; Ω^- 和 Ω^+ 是 Ω 上的两个开子集,且 $\Omega^- \cup \Omega^+ = \Omega$, $\bar{\Omega}^- \cap \bar{\Omega}^+ = \Gamma$, $k = \partial\Omega \cap \partial\Omega^k, k = -, +; \Gamma = \partial\Omega^- \cap \partial\Omega^+$ 。

以下,我们用黑体表示向量和向量函数,所有定义在 Ω^k ($k = -, +$) 上的量都用上标 k 来表示,设 n 是 Ω 的单位外法向量, n^-, n^+ 分别是 Ω^- 上关于 Γ , Ω^+ 的单位外法向量。

考虑下面的粘性/无粘性耦合问题:对给定 $L^2(\Omega)^d$ 中的 f , 求速度 u 和压力 p , 使得:

$$\begin{cases} \frac{1}{t} u^- - u^- + \nabla p^- = f^-, & \nabla \cdot u^- = 0 & \text{in } \Omega^- \\ \frac{1}{t} u^+ + \nabla p^+ = f^+, & \nabla \cdot u^+ = 0 & \text{in } \Omega^+ \end{cases} \quad (1)$$

配以以下交面条件

$$\begin{cases} \frac{\partial u^-}{\partial n^-} - p^- \cdot n^- = p^+ \cdot n^+ & \text{on } \Gamma \\ u^- \cdot n^- = -u^+ \cdot n^+ & \text{on } \Gamma \end{cases} \quad (2)$$

及边界条件

$$\begin{cases} u^- = 0 & \text{on } \partial\Omega^- \\ u^+ \cdot n = 0 & \text{on } \partial\Omega^+ \end{cases} \quad (3)$$

这里 α 是正常数。耦合问题(1)源于完整的 Navier-Stokes/ Euler 耦合方程经对流项显式处理后的半离散形式。此时, α 代表粘性, f 包含显式对流项。用变分方法可证明^[14]方程

(1)-(3) 存在唯一解,且基于离散速度空间 $P_N(\bar{\cdot}) \times P_N(\bar{\cdot}^+)$ 和压力空间 $P_{N-2}(\bar{\cdot}) \times P_N(\bar{\cdot}^+)$ 的谱逼近是适定的。利用 *Lagrangian* 插值基函数,我们得到如下矩阵形式的代数问题:

$$\begin{pmatrix} H^- & 0 \\ 0 & H^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^- \\ u^+ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} D^- & 0 \\ I & -(D^+)^T \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} p^- \\ p^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^- f^- \\ B^+ f^+ \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$- \begin{pmatrix} D^- & 0 \\ I & -(D^+)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^- \\ u^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

这里 $H^k = \frac{1}{t} B^k + k \cdot A^-$, 而

$$k \cdot = \begin{cases} 1 & \text{当 } k = - \\ 0 & \text{当 } k = + \end{cases}$$

A^- 是定义在粘性区域上的离散 Laplacian 算子。 D^- 和 $(D^+)^T$ 分别为粘性部分和无粘性部分的离散散度算子,上标“ T ”表示矩阵的转置, B^- 和 B^+ 是相关的质量矩阵, I 为作用于界面的法向 n^- 上的恒等算子(默认被对应于 $\bar{\cdot}$ 的权系数对角矩阵相乘),未知向量 $u^k, p^k (k = -, +)$ 分别是速度和压力在整体样点上的取值。为了简化记号,记:

$$H_c = \begin{pmatrix} H^- & 0 \\ 0 & H^+ \end{pmatrix}, \quad D_c = \begin{pmatrix} D^- & 0 \\ I & -(D^+)^T \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} B^+ & 0 \\ 0 & B^+ \end{pmatrix},$$

$$u_c = \begin{pmatrix} u^- \\ u^+ \end{pmatrix}, \quad p_c = \begin{pmatrix} p^- \\ p^+ \end{pmatrix}, \quad f_c = \begin{pmatrix} f^- \\ f^+ \end{pmatrix}$$

于是(4)-(5)可简写成

$$\begin{cases} H_c u_c - D_c^T p_c = B_c f_c \\ - D_c u_c = 0 \end{cases} \quad (6)$$

利用 Uzawa 过程的块消元法,我们把鞍点问题(6)分解成两个正定对称方程:

$$S_c p_c = - D_c H_c^{-1} B_c f_c \quad (7)$$

$$H_c u_c = D_c^T p_c + B_c f_c \quad (8)$$

这里

$$S_c = D_c H_c^{-1} D_c^T \quad (9)$$

Uzawa 算法的优点在于压力和速度的求解完全分开进行。由于 I 将粘性部分和无粘性部分耦合,离散压力系统,或者说矩阵 S_c 的秩等于整体压力自由度,对于复杂问题,存储和计算 S_c 的逆极为困难,因此需要采用一个迭代方法求解。

由于 S_c 和 H_c 的对称正定性,可用如共轭梯度法等标准的迭代方法求解(7)和(8)。为了使这样的内/外嵌套迭代过程对稀疏问题更为有效,我们在文献[13]引进了预条件矩阵 P_c

$$P_c^{-1} = \frac{1}{t} E_c^{-1} + \begin{pmatrix} \nu(B^-)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

用于加快压力求解的收敛速度,这里 $E_c = D_c B_c^{-1} D_c^T$ 。根据 D_c 的定义, E_c 等同于定义在 $\bar{\cdot}^+$ 上的 Gauss-Lobatto 网格点上和 $\bar{\cdot}^-$ 上的 Gauss 网格点上的离散拟 Laplacian 算子,也可

用共轭梯度法求得 E_c 的逆。

总之,压力可用内/外嵌套预条件共轭梯度法来计算。在 d 维情况下,在每步外迭代中,需要解 d 个 Helmholtz 方程。预条件矩阵 P_c^{-1} 的计算包括求矩阵 E_c 的逆和质量矩阵 B^- 的逆。注意到 B^- 是对角阵,因此,每次外迭代中预条件矩阵的计算费用集中在求 E_c 的逆上,我们的数值试验显示外层共轭梯度法收敛所需的迭代次数是比较多的。因此,在每个外套迭代中解 $d+1$ 个 Helmholtz 方程在实际模拟中费用偏高。在下一节,我们将通过引进一种有效的附加分裂步骤,可以在不引入额外的数值困难的情况下,明显地降低计算过程的费用。

2 分步块 LU 分解方法

基于 Couzy 等人^[2]求解纯粘性问题的思想,我们把耦合问题(6)重写成下列形式:

$$\begin{pmatrix} H_c & -H_c \ t B_c^{-1} D_c^T \\ -D_c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ p_c - p_c^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_c f_c + D_c^T p_c^n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

这里 p_c^n 为第 n 个时间步计算所得的压力。因此 $p_c - p_c^n$ 是第 $n+1$ 步与第 n 步的压力差,用 p_c 表示。(10)中的余项 r 是:

$$r = (I - H_c \ t B_c^{-1}) D_c^T p_c$$

忽略余项 r 得到(10)的一个近似方程

$$\begin{pmatrix} H_c & -H_c \ t B_c^{-1} D_c^T \\ -D_c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ p_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_c f_c + D_c^T p_c^n \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

为研究(11)的逼近精度,我们把余项写成如下形式:

$$\begin{aligned} r &= \begin{pmatrix} I - \begin{pmatrix} \frac{1}{t} B^- + A^- & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} B^+ \end{pmatrix} t \begin{pmatrix} (B^-)^{-1} & 0 \\ 0 & (B^+)^{-1} \end{pmatrix} \\ -t A^- (B^-)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D_c^T p_c \\ &= \begin{pmatrix} -t A^- (B^-)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D_c^T p_c = \begin{pmatrix} -t A^- (B^-)^{-1} (D^-)^T p^- & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O(t^2), \end{aligned}$$

这里利用了 p_c 与 t 同阶这一事实。由于在(10)中的速度前有因子 t^{-1} 的存在,所以忽略 r 而造成的局部截断误差是 $O(t^3)$ 。注意到余项 r 随着 t 的减少而减少,因此,附加的分解时间步骤引入的误差在高雷诺数的问题中变得更小。这一事实已通过数值试验得到进一步的证实。用块高斯消元法于系统(11),得到另一形式的粘性/无粘性耦合问题:

$$\begin{pmatrix} H_c & -H_c \ t B_c^{-1} D_c^T \\ 0 & E_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ p_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_c f_c + D_c^T p_c^n \\ -D_c H_c^{-1} (B_c f_c + D_c^T p_c^n) \end{pmatrix} \quad (12)$$

这里

$$E_c = t D_c B_c^{-1} D_c^T$$

方程(12)就是在每一个时间步中需要求解的线性系统。

时间分裂法的优点在于:由于 B_c 是对角阵,迭代求解压力过程中涉及到的关于 E_c

的矩阵向量积可以直接计算,而无需求解矩阵 H_c 的逆。注意到 Schur 补,即矩阵 E_c 是对称正定的,自然考虑用共轭梯度迭代法求解。还注意到 E_c 是病态阵,因此需要适当的预条件矩阵来加速迭代方法的收敛速度。在这里,我们用基于速度节点,即 Gauss-Lobatto 节点上的标准 Laplacian 谱元离散矩阵 A_c 作为 E_c 的预条件矩阵。总之,附加的分裂法使得压力系统的求解只需解一个相当于 Helmholtz 方程的标准 Laplacian 方程,而在经典的 Uzawa 算法中,却需要解 $d+1$ 个 Helmholtz 系统或拟 Helmholtz 系统。这就是利用分步 LU 分解法的主要收获。

3 数值试验

本节数值试验的目的在于检验分步分解方法的精度和稳定性,特别是比较它与经典 Uzawa 算法的临界时间步长。

我们首先对方法的稳定性进行评估。利用 (11) 求解 (10) 首先要问的一个问题是:忽略 (10) 中的余项 r 是否会改变稳定性?一般地,我们无法对此问题给出明确的答案,因为我们一般不知道余项 r 的正负号,况且每一迭代步中 r 的符号都将改变。因此我们可能永远不知道忽略余项 r 是增加了稳定性还是降低了稳定性,但我们希望知道不管是增加稳定性还是降低稳定性, r 的影响是否细微。至少我们希望与经典的 Uzawa 算法相比,附加时间分裂步骤将不会明显地改变系统的稳定性。根据前面的估计, r 与 t^2 同阶,因此可以期望由忽略 r 而产生的误差实际上非常小,尤其当计算的时间步长很小和/或雷诺数很高时。

为了证实上面的分析,我们分别在简单的矩形区域和复杂的绕流区域内对非定常 Navier-Stokes/Euler 耦合方程进行数值模拟。

例 1 精度试验

首先验证第 2 节中引入的分步分解方法的精确度。计算区域为一矩形域 $[-1, 1] \times [0, 1]$, 它被分裂成一个粘性子区域 $[-1, 0] \times [0, 1]$ 和一个无粘性子区域 $[0, 1] \times [0, 1]$ 。

粘性系数固定为 0.01。我们选择两个子区域上解析函数做为精确解:

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, t) = \sin(x_1) \cos(x_2) \sin(t) \\ u_2(x_1, x_2, t) = -\cos(x_1) \sin(x_2) \sin(t) \end{cases}$$

Dirichlet 边条件和初始条件与精确解相匹配。

对所有的时间步长,计算都进行到无量纲时间 $T=1.0$ 。在所有情况下,空间逼近都基于单区域的谱元法,使用的多项式阶数为 $N=10$ 。已验证使用的空间离散确保时间离散误差没有受到空间离散误差的污染。图 1 显示时间 $T=1.0$ 时刻不同时间步长产生的 L^2 -范数和 H^1 -范数意义下的误差。正如所希望的那样,曲线的斜率接近于常数值 2,这证明分步分解方法确有二阶精度。

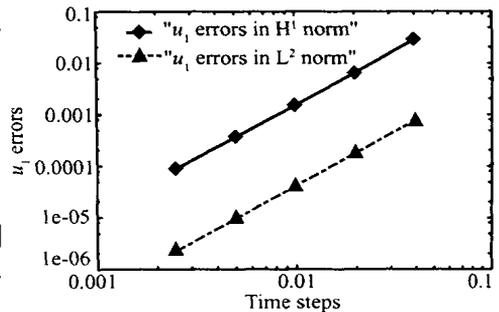


图 1 分步分解方法得到的不同时间步长的误差

Fig. 1 Errors by the fractional step method for different time steps

例 2 稳定性试验

作为评估数值方法的一个标准例子,考虑圆柱绕流这一经典流体问题。数值模拟基于我们发展的谱元法计算流体软件 SECF,我们将上述算法进一步嵌入其中。SECF 类似于 NEKTON^[9,11,3],可进行粘性流、无粘性流以及粘性/无粘性耦合流的三维数值计算,但仍在不断完善中。在 SECF 中,有两种方法得到收敛解:一种是将计算区域分割成足够小的区域元,而每个区域元的阶数 N 保持不变,这种方式类似于经典的有限元法,通过逐渐

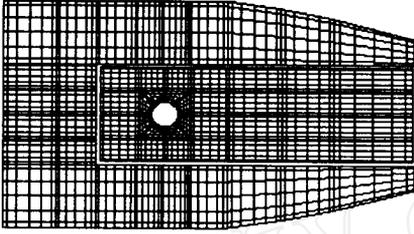


图 2 区域分割和谱元网格

Fig. 2 Domain partition and spectral element mesh

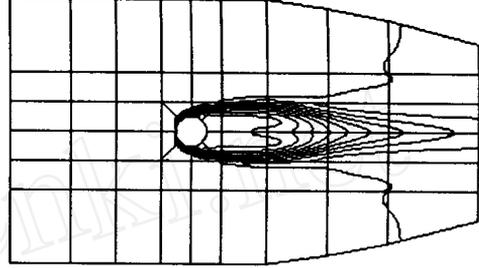


图 3 $Re = 200$ 情况下 $T = 12$ 时刻计算所得的压力等值线

Fig. 3 Pressure isolines for $Re = 200$ at $T = 12$

减少区域元的尺寸来达到收敛的目的;另一种方法是保持区域分割不变,即固定区域元的个数,通过抬高区域元的阶数 N 来增加数值解的精度。后一种方法是谱方法的主要特点之一。根据 Patera 和 Maday^[7]等人的理论,对于充分光滑的解,数值解的误差随 N 的增加呈指数衰减。在 SECF 中,阶数 N 的增加可通过简单修改相关参数的办法达到。为考察算法的稳定性性质,我们模拟雷诺数分别为 $Re = u \cdot D / \nu = 20, 200$ 的流动,这里 u 是无穷远处的速度, D 是圆柱体的直径。图 2 显示区域分割和所用的谱元网格。在网格图中,可以看到所取的粘性子区域靠近圆柱体和下游。对于每一个测试的时间步长,数值模拟一直进行到 $T = 12$ 来确定算法是否稳定。图 3 显示 $T = 12, Re = 200$ 时所得的总压力等值线,此时 Von-Karman 涡尚未出现。

我们比较经典 Uzawa 算法与分步分解方法的稳定性。在 $Re = 20$ 情形下,经典 Uzawa 算法的临界时间步长为 0.132,而分步分解方法的临界时间步长为 0.134。在 $Re = 200$ 情形下,经典 Uzawa 算法的临界时间步为 0.0814,而分步分解方法的临界时间步长为 0.0811。在第一种情形下,用分步方法得到的临界时间步长比 Uzawa 方法得到的临界时间步长稍大一些,但在第二种情形下,情况却相反。这意味着附加的分解步骤可能对某一问题轻微有助于整体格式的稳定性,而对另一问题却轻微降低了算法的稳定性。我们从这些数值试验得出的重要结论之一是:附加的分解步骤没有明显影响整体算法的稳定性,但可观地减少了计算复杂性。

4 结 论

我们给出了一个改进的 Uzawa 算法(一种 LU 块分解法),这一方法生成的压力系统类似于传统的时间分裂法导致的结果,但与后者有着本质的不同:新法无需压力中介边条

件。理论分析和数值试验显示该法具有良好的稳定性和精确度。更重要的是新的近似系统更易于求解,比经典的 Uzawa 方法更经济。

参 考 文 献:

- [1] CHORIN A.J. On the convergence of discrete approximations to the Navier-Stokes equations [J]. *Math. Comput.*, 1969, 23: 341-353.
- [2] COUZY W, DEVILLE M.O. A fast Schur complement method for the spectral element discretization of the incompressible Navier-Stokes equations [J]. *J. Comput. Phys.*, 1995, 116:135-142.
- [3] CHAKRABORTI M, SUBBIAH S. A spectral element solution to the backward-facing step problem using NEKTON [C]. in B. Blackwell and D. W. Pepper (eds), Proceeding Winter Annual Meeting of the ASME, Anaheim, 1992:59-67.
- [4] FISCHER P. An overlapping Schwarz method for spectral element solution of the incompressible Navier-Stokes equations [J]. *J. Comput. Phys.*, 1997, 133:84-101.
- [5] KARNIADAKIS G.E, ISRAELI M & ORSZAG S.A. High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations [J]. *J. Comput. Phys.*, 1991, 97:414-443.
- [6] MADAY Y, MEIRON D, PATERA A.T, RONQUIST E.M. Analysis of iterative methods for the steady and unsteady Stokes problem: Application to spectral element discretization [J]. *SIAM J. Sci. Comput.* 1993, 14 (2):310-337.
- [7] MADAY Y, PATERA A.T. Spectral element methods for the Navier-Stokes equations [M]. In A. K. Noor (ed.), State-of-the-art surveys in computational mechanics, ASME, New York, 1988:71-143.
- [8] MADAY Y, PATERA A.T, Ronquist E.M. An operator-integration-factor splitting method for time-dependent problems: application to incompressible fluid flow [J]. *J. of Scientific Computing*, 1990, 5 (4):263-292.
- [9] NEKTON User's Guide [M]. Version 2.7, Nektonics Inc., Cambridge, MA., 1991.
- [10] PEROT J.B. An analysis of the fractional step method [J]. *J. Comput. Phys.*, 1993, 108:51-62.
- [11] RONQUIST E.M. Optimal spectral element methods for the unsteady three dimensional incompressible Navier-Stokes Equations [D]. Ph.D thesis, Massachusetts Institute of technology, 1988.
- [12] TEMAN R. Sur l'approximation de la solution des equations de Navier-Stokes par la methode des pas fractionnaires [J]. II, *Arch. Rat. Mech. Anal*, 1969, 33:377-385.
- [13] XU C.J, LIN Y.M. Analysis of iterative methods for the viscous/ inviscid coupled problem via a spectral element approximation [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2000, 32(6):619-646.
- [14] XU C.J, MADAY Y. A global algorithm in spectral method for viscous/ inviscid coupling [J]. *Chinese Annual of Math.* (B), 1997, 18(2):191-200.

A fractional step method for the time dependent incompressible Navier-Stokes/ Euler coupled equations

LIN Yu-min, XU Chuan-ju

(Xiamen University, Fujian, Xiamen 361005, China)

Abstract: A fractional step method for solving the incompressible Navier-Stokes/ Euler coupled equations in primitive variables is analyzed as a block LU decomposition. In this formulation, no intermediate boundary conditions for the velocity and the pressure is required, in contrast to the traditional time splitting method. In addition, the fractional step method can be reviewed as an improvement of the classical Uzawa algorithm that has been proven to be useful in the calculation of the in-

compressible Navier-Stokes/ Euler coupled equations. The fractional step method is showed to be cheaper than the classical Uzawa algorithm. The stability and the accuracy analysis are also given. Numerical results confirm the theoretical analysis. Simulations of the flow past the cylinder are carried out in order to demonstrate the potential applications of the Navier-Stokes/ Euler coupled solver.

Key words : Uzawa algorithm ; LU decomposition ; Navier-Stokes/ Euler coupled equations ; spectral method

www.cnki.net