第46卷第4期 数 学 学 报 Vol.46, No.4
2003年7月 ACTA MATHEMATICA SINICA July, 2003

文章编号:0583-1431(2003)04-0625-06 文献标识码: A

一类超线性椭圆方程的无穷多解

刘轼波 李树杰

(中国科学院数学与系统科学研究院数学研究所 北京 100080)
(E-mail: liusb@amss.ac.cn; lisj@math03.math.ac.cn)

摘 要 本文研究了一类超线性椭圆方程，这里的非线性项是奇的. 我们不需要假设 Ambrosetti-Rabinowitz 条件，得到了无穷多个大能量解的存在性. 我们的结论推广了邹文明最近的结果.

关键词 超线性； Cerami 条件；喷泉定理
MR(2000) 主题分类 35J65, 58E05
中图分类 O175.25

Infinitely Many Solutions for a Superlinear Elliptic Equation

Shi Bo LIU Shu Jie LI

(*Institute of Mathematics, Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080, *P. R. China*)
(*E-mail: liusb@amss.ac.cn; lisj@math03.math.ac.cn*)

Abstract In this paper, we consider a superlinear elliptic equation, where the nonlinearity is odd. Under no Ambrosetti-Rabinowitz's condition, infinitely many large energy solutions are obtained. Our result generalizes the recent result of Zou W. M..

Keywords Superlinear; Cerami's condition; Fountain theorem
MR(2000) Subject Classification 35J65, 58E05
Chinese Library Classification O175.25

1 引言及定理

我们考虑如下的 p-Laplace 方程 $(p>1)$

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u), \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

这里 Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域， $-\Delta_p$ 是 p-Laplace 算子

$$-\Delta_p u := -\mathrm{div}(|\nabla \mathrm{u}|^{\mathrm{p}-2}\nabla \mathrm{u}).$$

我们用 p^* 表示 Sobolev 临界指数，即 $p^*=Np/(N-p)$. 如果 $p\ge N$, 则令 $p^*=\infty$.

记 $F(x,s)=\int_0^s f(x,\tau)\mathrm{d}\tau$, $\mathcal{F}(x,s)=f(x,s)s-pF(x,s)$. 关于非线性项 $f(x,u)$, 假设:

收稿日期： 2002-08-07; 接受日期： 2003-01-07
基金项目：国家自然科学基金 973 资助项目 (2178200); 北京市自然科学基金资助项目 (1022003)

(f_1) $f\in C(\bar{\Omega}\times\mathbf{R})$, 存在 $q\in(1,p^*)$, 使得对 $(x,s)\in\Omega\times\mathbf{R}$, 有 $|f(x,s)|\le C(1+|s|^{q-1})$;

(f_2) 对 $x\in\Omega$, 一致地有 $\lim_{|s|\to\infty}\frac{f(x,s)s}{|s|^p}=+\infty$;

(f_3) 存在 $\theta\ge 1$, 对 $(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}$, $s\in[0,1]$, 有 $\theta\mathcal{F}(x,t)\ge\mathcal{F}(x,st)$;

(f_4) 对 $(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}$, 有 $f(x,-t)=-f(x,t)$.

由于条件 (f_2), 人们称 (1.1) 为超线性问题，这当然是沿用 $p=2$ 时的叫法. 在 Ambrosetti-Rabinowitz 著名的文 [1] 中，对于 $p=2$ 的情形，他们在 (f_1), (f_4) 以及

(**AR**) $\exists\,\mu>p$, $R>0$, 使得 $x\in\Omega$, $|s|\ge R\Longrightarrow 0\le\mu F(x,s)\le f(x,s)s$ 的条件下，得到了方程 (1.1) 的无穷多解的存在性.

显然由 (**AR**) 可推出 (f_2). 条件 (**AR**) 的作用是保证方程 (1.1) 对应的能量泛函的所有 (PS) 序列都有界，这对于应用变分方法是十分重要的. 然而，确实有许多超线性的函数并不满足条件 (**AR**). 例如在 $p=2$ 时，取 $\theta=1$, 则函数

$$f(x,t)=2t\log(1+|t|) \tag{1.2}$$

就不满足 (**AR**). 然而不难验证它满足我们的条件 (f_1)–(f_4), 所以研究 (**AR**) 不成立时超线性问题 (1.1) 的解是有意义的.

已经有许多工作 [2–5] 研究 (**AR**) 不成立时问题 (1.1) 的解的存在性. 它们大都要求 $\frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s}$ 随 $|s|$ 增大而增大. 我们的条件 (f_3) 比这要求弱 (见命题 2.3). 在 $p=2$ 的情形，条件 (f_3) 是 Jeanjean 在文 [5] 中引进的.

下面叙述我们的结果：

定理 1.1 在条件 (f_1)–(f_4) 下，问题 (1.1) 有一列解 $\{u_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 满足：当 $k\to\infty$ 时

$$\frac{1}{p}\int_\Omega|\nabla u_k|^p\,\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u_k)\mathrm{d}x\to+\infty.$$

注 1 这结果当 $p=2$ 时首先由 Ambrosetti-Rabinowitz (见文 [1, 定理 3.13]) 在 (f_1), (f_4) 及 (**AR**) 条件下得到. 最近，同样对 $p=2$ 的情形，邹文明在文 [2, 定理 3.2] 在 (f_1), (f_4) 和

(f_2)′ $\exists\,\mu>2$, 对 $x\in\Omega$ 一致地有 $\liminf_{|s|\to\infty}\frac{f(x,s)s}{|s|^\mu}>0$;

(f_3)′ $\frac{f(x,s)}{s}$ 随 $|s|$ 增大而增大的条件下，得到同样结果. 显然 (f_2)′, (f_3)′ 分别强于 (f_2), (f_3), 并且 (1.2) 式中给出的函数不满足 (f_2)′, 所以定理 1.1 推广了文 [2, 定理 3.2] 的结果.

2 Cerami 条件，喷泉定理

考虑泛函 $J:W_0^{1,p}(\Omega)\to\mathbf{R}$,

$$J(u)=\frac{1}{p}\int_\Omega|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

这里 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 是具有范数 $\|u\|=\left(\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$ 的标准的 Sobolev 空间. 由条件 (f_1), J 是 C^1 的，且

$$\langle J'(u),\phi\rangle=\int_\Omega|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi\,\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,u)\phi\,\mathrm{d}x,\quad u,\phi\in W_0^{1,p}(\Omega).$$

问题 (1.1) 的弱解恰为 J 的临界点. 我们将运用临界点理论证明 J 有一列临界点 $\{u_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 满足 $J(u_k)\to+\infty$, 从而证明定理 1.1.

由于我们不假设条件 (**AR**), 我们不能象通常那样得到 J 的 (PS) 序列的有界性，从而证明 (PS) 条件. 这为运用临界点理论造成了困难. 在文 [2] 中，作者受文 [5] 的启发，通过对泛函 J 进行扰动，建立了一个“变化的喷泉定理”. 借助它证明对应于每个极小极大值，都存在一个特殊的有界的 (PS) 序列，从而克服这一困难. 然而实际上能够证明 J 满足如下的 Cerami 条件，于是就可以直接利用原来的喷泉定理. 我们的结果强于文 [2] 中的相应结果，而证明却简单得多.

定义 2.1　设 X 是 Banach 空间，称 $J\in C^1(X,\mathbf{R})$ 满足 Cerami 条件，若对任意 $c\in\mathbf{R}$:

(i) 任何满足 $J(u_n)\to c$ 及 $J'(u_n)\to 0$ 的有界点列 $\{u_n\}\subset X$ 都有收敛子列;

(ii) 存在常数 δ, R, $\beta>0$, 使得对任何满足 $\|u\|\geq R$ 的 $u\in J^{-1}[c-\delta,c+\delta]$, 都有 $|\!|J'(u)|\!|\cdot\|u\|\geq\beta$. 这里 $|\!|\cdot|\!|$ 是 X 的对偶空间 X^* 中的范数.

下面是本节的主要结果:

引理 2.2　设 f 满足 (f_1), (f_2) 和 (f_3), 则泛函 J 满足 Cerami 条件.

证明　对 $\forall c\in\mathbf{R}$, 利用 Sobolev 嵌入 $W_0^{1,p}(\Omega)\to L^r(\Omega)$ $(1\leq r<p^*)$ 的紧性，定义 2.1 中 (i) 的验证是平凡的.

下面验证定义 2.1 的 (ii). 用反证法，设有 $c\in\mathbf{R}$ 及 $\{u_n\}\subset W_0^{1,p}(\Omega)$ 满足

$$
\begin{aligned}
&J(u_n)\to c,\quad \|u_n\|\to\infty,\\
&|\!|J'(u_n)|\!|\cdot\|u_n\|\to 0,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

其中 $|\!|\cdot|\!|$ 是 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 的对偶空间 $W^{-1,p'}(\Omega)$ 中的范数，这里 $1/p+1/p'=1$, 则有

$$
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left(\frac{1}{p}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left\{J(u_n)-\frac{1}{p}\langle J'(u_n),u_n\rangle\right\}=c.
\tag{2.3}
$$

记 $w_n=\frac{u_n}{\|u_n\|}$. 利用 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 的自反性质以及前面提到的 Sobolev 紧嵌入，通过取子列，我们不妨设

$$
\begin{aligned}
&w_n\rightharpoonup w\ \text{ in }\ W_0^{1,p}(\Omega),\\
&w_n\to w\ \text{ in }\ L^r(\Omega)\ \ (1\leq r<p^*),\\
&w_n(x)\to w(x)\ \text{ a.e. }\ x\in\Omega.
\end{aligned}
$$

假若 $w\equiv 0$, 如文 [5] 中那样，我们通过下式定义一列实数 $\{t_n\}$:

$$
J(t_nu_n)=\max_{t\in[0,1]}J(tu_n).
$$

如果对某个自然数 n, 有多个 t_n 满足上式，我们就任取其中一个. 对任意的 $m>0$, 令 $\bar{w}_n=\sqrt[p]{2pm}\,w_n$. 由于 $w_n(x)\to w(x)=0$, a.e. $x\in\Omega$, 我们有

$$
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega F(x,\bar{w}_n)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega F(x,\sqrt[p]{2pm}\,w_n)\mathrm{d}x=0.
$$

于是对充分大的 n, $J(t_nu_n)\geq J(\bar{w}_n)=2m-\int_\Omega F(x,\bar{w}_n)\mathrm{d}x\geq m$. 即有 $\lim_{n\to\infty}J(t_nu_n)=+\infty$. 又由 $J(\mathbf{0})=0$ 及 $J(u_n)\to c$, 可得 $0<t_n<1$. 因此，当 n 充分大时

$$
\int_\Omega|\nabla(t_nu_n)|^p\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,t_nu_n)t_nu_n\,dx=\langle J'(t_nu_n),t_nu_n\rangle=t_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_n}J(tu_n)=0.
$$

从而得到

$$\int_{\Omega}\left(\frac{1}{p}f(x,t_nu_n)t_nu_n-F(x,t_nu_n)\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{p}\int_{\Omega}|\nabla(t_nu_n)|^p\mathrm{d}x-\int_{\Omega}F(x,t_nu_n)\mathrm{d}x=J(t_nu_n)\to+\infty,\ \text{当}\ n\to\infty. \tag{2.4}$$

另一方面，因为 $t_n\in(0,1)$, 由条件 (f_3), 我们有 $\theta\mathcal{F}(x,u_n)\geq\mathcal{F}(x,t_nu_n)$. 于是由 (2.4) 式得

$$\int_{\Omega}\left(\frac{1}{p}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\int_{\Omega}\mathcal{F}(x,u_n)\mathrm{d}x$$
$$\geq\frac{1}{p\theta}\int_{\Omega}\mathcal{F}(x,t_nu_n)\mathrm{d}x=\frac{1}{\theta}\int_{\Omega}\left(\frac{1}{p}f(x,t_nu_n)t_nu_n-F(x,t_nu_n)\right)\mathrm{d}x\to+\infty,$$

这与 (2.3) 式矛盾.

假若 $w\neq0$, 由 (2.2) 式得 $\int_{\Omega}|\nabla u_n|^p\mathrm{d}x-\int_{\Omega}f(x,u_n)u_n\mathrm{d}x=\langle J'(u_n),u_n\rangle=o(1)$, 即

$$1-o(1)=\int_{\Omega}\frac{f(x,u_n)u_n}{\|u_n\|^p}\mathrm{d}x=\left(\int_{w\neq0}+\int_{w=0}\right)\frac{f(x,u_n)u_n}{|u_n|^p}|w_n|^p\mathrm{d}x. \tag{2.5}$$

对 $x\in\Omega_{\#}:=\{x\in\Omega;\ w(x)\neq0\}$, 我们有 $|u_n(x)|\to+\infty$, 从而由条件 (f_2) 得

$$\frac{f(x,u_n(x))u_n(x)}{|u_n(x)|^p}|w_n(x)|^p\to+\infty,\ \text{当}\ n\to\infty.$$

运用 Fatou 引理，注意到 $|\Omega_{\#}|>0$ (我们用 $|A|$ 记 $A\subset\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ 的 Lebesgue 测度), 我们得

$$\int_{w\neq0}\frac{f(x,u_n)u_n}{|u_n|^p}|w_n|^p\mathrm{d}x\to+\infty,\ \text{当}\ n\to\infty. \tag{2.6}$$

另一方面, 由 (f_2), 存在 $\vartheta>-\infty$, 使得对 $(x,s)\in\Omega\times\mathbf{R}$, 有 $\frac{f(x,s)s}{|s|^p}\geq\vartheta$. 再注意到 $\int_{w=0}|w_n|^p\mathrm{d}x\to0$, 当 $n\to\infty$, 我们能找到 $\Lambda>-\infty$, 使得

$$\int_{w=0}\frac{f(x,u_n)u_n}{|u_n|^p}|w_n|^p\mathrm{d}x\geq\vartheta\int_{w=0}|w_n|^p\mathrm{d}x\geq\Lambda>-\infty. \tag{2.7}$$

联合 (2.5)–(2.7) 式，我们得到一个矛盾.

至此，我们已经证明了泛函 J 满足定义 2.1 的 (ii), 从而 J 满足 Cerami 条件. 证毕.

注 2 我们在证明中用于排斥可能性 "$w\equiv0$" 的技巧源于 Jeanjean [5]. 他在 "山路引理" 的框架下用此方法证明在 "Mountain Pass" 水平上的一个特殊的 (PS) 序列是有界的. 而我们的引理 2.2 的证明表明，尽管可能存在无界的 (PS) 序列，泛函 J 的每个 Cerami 序列都是有界的.

下面证明条件 $(\mathrm{f}_3)'$ 确实强于条件 (f_3).

命题 2.3 如果 $\frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s}$ 随 $|s|$ 增大而增大，则当 $|t|\geq|s|$ 且 $ts\geq0$ 时，$\mathcal{F}(x,t)\geq\mathcal{F}(x,s)$. 即对 $\theta=1$, 条件 (f_3) 成立.

证明 设 $0 \le s \le t$, 则

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x,t)-\mathcal{F}(x,s) &= p\left[\frac{1}{p}\left(f(x,t)t-f(x,s)s\right)-\left(F(x,t)-F(x,s)\right)\right]\\ &= p\left[\int_0^t \frac{f(x,t)}{t^{p-1}}\tau^{p-1}\mathrm{d}\tau-\int_0^s \frac{f(x,s)}{s^{p-1}}\tau^{p-1}\mathrm{d}\tau-\int_s^t \frac{f(x,\tau)}{\tau^{p-1}}\tau^{p-1}\mathrm{d}\tau\right]\\ &= p\left[\int_s^t \left(\frac{f(x,t)}{t^{p-1}}-\frac{f(x,\tau)}{\tau^{p-1}}\right)\tau^{p-1}\mathrm{d}\tau+\int_0^s \left(\frac{f(x,t)}{t^{p-1}}-\frac{f(x,s)}{s^{p-1}}\right)\tau^{p-1}\mathrm{d}\tau\right]\\ &\ge 0.\end{aligned}$$

类似地，设 $t \le s \le 0$, 我们也有 $\mathcal{F}(x,t)-\mathcal{F}(x,s) \ge 0$. 证毕.

在本节最后，我们写出要用到的临界点定理： Bartsch 的喷泉定理.

设 X 是可分 Banach 空间，由文 [6, p. 233] 知存在 $\{v_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset X$, $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset X^*$, 使

(i) $\langle \varphi_n, v_m\rangle = \delta_n^m$, 其中当 $n=m$ 时， $\delta_n^m=1$, $n\ne m$ 时， $\delta_n^m=0$;

(ii) $\overline{\mathrm{span}}\{v_n;\, n\in\mathbf{N}\}=\mathbf{X}$, $\overline{\mathrm{span}}^{w^*}\{\varphi_n;\, n\in\mathbf{N}\}=\mathbf{X}^*$.

令 $X_j=\mathrm{span}\{\mathrm{v_j}\}$, 则 $X=\overline{\bigoplus_{j\ge1}X_j}$. 再记 $Y_k=\bigoplus_{j=1}^k X_j$, $Z_k=\overline{\bigoplus_{j\ge k}X_j}$. 这时我们有如下的"喷泉定理" (见文 [7, 定理 2.5] 或文 [8, 定理 3.6]).

命题 2.4 若 $J\in C^1(X,\mathbf{R})$ 满足 Cerami 条件， $J(-u)=J(u)$. 又设对每个 $k\in\mathbf{N}$, 存在 $\rho_k>r_k>0$, 使

(i) $b_k:=\inf_{u\in Z_k,\,\|u\|=r_k}J(u)\to+\infty$, 当 $k\to\infty$;

(ii) $a_k:=\max_{u\in Y_k,\,\|u\|=\rho_k}J(u)\le 0$,

则 J 有一列趋于 $+\infty$ 的临界值.

注 3 在文 [7,8] 中，喷泉定理是在 (PS) 条件下得到的. 虽然 Cerami 条件比 (PS) 条件弱，但和 (PS) 条件一样， Cerami 条件足以保证 (第一) 形变定理成立 (见文 [9, 定理 1.3]), 所以我们可以在 Cerami 条件下得到喷泉定理.

3 定理 1.1 的证明

对可分 Banach 空间 $X=W_0^{1,p}(\Omega)$, 象在 2 节结尾的讨论一样确定 X_j, Y_k, Z_k. 我们来验证 (2.1) 式定义的泛函满足喷泉定理的条件.

定理 1.1 的证明 首先由 (f_4) 知对 $\forall u\in W_0^{1,p}(\Omega)$, 有 $J(-u)=J(u)$. 由引理 2.2, J 满足 Cerami 条件.

(i) 由 (f_1), 存在 $c>0$, 使 $|F(x,s)|\le c(1+|s|^q)$. 令 $\beta_k=\sup_{u\in Z_k,\,\|u\|=1}|u|_q$, $k=1,2,\dots$. 这里 $|\cdot|_q$ 是 $L^q(\Omega)$ 中的范数，则由文 [10, 引理 2.1], 当 $k\to\infty$ 时， $\beta_k\to 0$ ($p=2$ 时的证明也可见文 [8, 引理 3.8]).

取 $r_k=(cq\beta_k^q)^{1/(p-q)}$, 则对 $u\in Z_k$, $\|u\|=r_k$, 有

$$\begin{aligned}J(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x\\ &\ge \frac{1}{p}\|u\|^p-c|u|_q^q-c|\Omega| \ge \frac{1}{p}\|u\|^p-c\beta_k^q\|u\|^q-c|\Omega|\\ &= \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)(cq\beta_k^q)^{p/(p-q)}-\mathrm{c}|\Omega|.\end{aligned}$$

注意 $\beta_k \to 0$ 以及由 (f_2) 可得 $q > p$, 由上式有

$$b_k = \inf_{u \in Z_k,\, \|u\| = r_k} J(u) \to +\infty, \text{ 当 } k \to \infty.$$

(ii) 因 $\dim Y_k < +\infty$, 而有限维空间上各种范数等价, 故存在 $C_k > 0$, 对 $\forall\, u \in Y_k$, 有

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x = \frac{1}{p}\|u\|^p \le C_k |u|_p^p \equiv C_k \int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

这里 $|\cdot|_p$ 是 $L^p(\Omega)$ 上的范数. 由 (f_2) 知存在 $R_k > 0$, 当 $|s| \ge R_k$ 时, $F(x,s) \ge 2C_k|s|^p$. 取 $M_k = \max\left\{0, \inf_{x\in\Omega,\, |s| \le R_k} F(x,s)\right\}$, 则对 $\forall\,(x,s) \in \Omega \times \mathbf{R}$, 有

$$F(x,s) \ge 2C_k|s|^p - M_k. \tag{3.2}$$

由 (3.1), (3.2) 式, 对 $u \in Y_k$, 有

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x \le -C_k|u|_p^p + M_k|\Omega| \le -\frac{1}{p}\|u\|^p + M_k|\Omega|.$$

由此可见对充分大的 $\rho_k > 0$ (还可要求 $\rho_k > r_k$), 有 $a_k := \max_{u\in Y_k,\|u\|=\rho_k} J(u) \le 0$.

于是由命题 2.4, J 有一列临界点 $\{u_k\}_{k\in\mathbf{N}}$, 使得 $J(u_k) \to +\infty$. 定理 1.1 证毕.

例 3.1 利用定理 1.1, 我们可以知道方程

$$\begin{cases} -\Delta u = u\log(1+|u|), \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

有无穷多个解. 这一结论不能由文 [1, 定理 3.13] 或文 [1, 定理 3.2] 推出.

参 考 文 献

[1] Ambrosetti A., Rabinowitz P. H., Dual variational methods in critical point theory and applications, *J. Funct. Anal.*, 1973, **14**: 349–381.

[2] Zou W. M., Variant fountain theorems and their applications, *Manusc. Math.*, 2001, **104**: 343–358.

[3] Li G. B., Zhou H. S., Asymptotically linear Dirichlet problem for the p-Laplacian, *Nonl. Anal. TMA*, 2001, **43**: 1043–1055.

[4] Stuart C. A., Zhou H. S., A variational problem related to self-trapping of an electromagnetic field, *Math. Methods in the Applied Sciences*, 1996, **19**: 1397–1407.

[5] Jeanjean L., On the existence of bounded Palais-Smale sequences and application to a Landesman-Lazer type problem set on $\mathbf{R}^\mathbf{N}$, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 1999, **129A**: 787–809.

[6] Zhao J. F., Structure theory for Banach space, Wuhan: Wuhan Univ. Press, 1991 (in Chinese).

[7] Bartsch T., Infinitely many solutions of a symmetric Dirichlet problem, *Nonl. Anal. TMA*, 1993, **20**: 1205–1216.

[8] Willem M., Minmax theorems, Boston: Birkhäuser, 1996.

[9] Bartolo P., Benci V., Fortunato D., Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity, *Nonl. Anal. TMA*, 1983, **7**: 981–1012.

[10] Yang H., Fan X. L., Existence of infinitely many solutions of the p-Laplace equation with p-concave and convex nonlinearities, *J. Lanzhou Univ. Nat. Sci.*, 1992, **35**(2): 12–16 (in Chinese).