第36卷第5期　　兰州大学学报(自然科学版)　　Vol. 36 No. 5
2000年10月　　Journal of Lanzhou University (Natural Sciences)　　Oct. 2000

文章编号: 0455-2059(2000)05-0010-07

$\mathbf{R}^N$ 中一类带 p-凹凸非线性项的拟线性椭圆方程的无穷可解性

刘轼波, 范先令

(兰州大学 数学系, 甘肃 兰州　730000)

摘　要: 在适当条件下, 得到 $\mathbf{R}^N$ 中的 p-Laplace 方程

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+a(x)|u|^{p-2}u=h(x)|u|^{q-2}u+\lambda|u|^{s-2}u,\ u\in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$$

的无穷多解的存在性, 其中: $p<N,1<q<p<s<p^*\equiv Np/(N-p)$.

关键词: p-Laplace 方程; Sobolev 空间; 积分泛函; 临界点

中图分类号: O175.25　　**文献标识码**: A

0　引言

研究问题

$$(\mathrm{P})\begin{cases}-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+a(x)|u|^{p-2}u=h(x)|u|^{q-2}u+\lambda|u|^{s-2}u,\\ u\in W^{1,p}(\Omega),\end{cases}$$

其中: $p<N,1<q<p<s<p^*\equiv Np/(N-p),\Omega=\mathbf{R}^N$. 因为 $q<p,p<s$, 称 $h(x)|u|^{q-2}$ 为 p-凹的, 称 $\lambda|u|^{s-2}u$ 为 p-凸的[1].

带 p-凹凸非线性项椭圆边值问题已有许多结果, 如Bartsch等[2]得到了 $|\Omega|<+\infty,p=2$ 时(P)的无穷多解性, 那里的 $a(x)\equiv0,h(x)$ 是一常数. 最近, 杨海、范先令[1]将这一结果推广到 $p\in(1,+\infty)$ 的情形. 在[3]中还讨论了临界增长的情形.

本文则在 $\mathbf{R}^N$ 中讨论(P). 这时困难在于嵌入 $W^{1,p}(\mathbf{R}^N)\to L^r(\mathbf{R}^N),(p\le r<p^*)$ 不紧. 同时, 也不存在连续嵌入 $W^{1,p}(\mathbf{R}^N)\to L^r(\mathbf{R}^N),(1<r<p)$. 为此, 对函数 a,h 提出如下条件

$$h\in L^{q_0}(\mathbf{R}^N)\cap L^\infty(\mathbf{R}^N),\quad 1/q_0+q/p^*=1;\tag{h_0}$$

$$a\in C(\mathbf{R}^N,\mathbf{R}),\quad a(x)\ge a_0>0;\tag{a_0}$$

$$a(x)\to+\infty,\text{当 }|x|\to+\infty.\tag{a_∞}$$

本文的主要结果是下述的

定理0.1　在条件(h_0), (a_0), (a_∞)下,

(1) 对 $\forall\lambda>0$, (P)有一列解$\{u_k\}$, 使 $J(u_k)\to+\infty$.

(2) 若 $h>0$, a.e. 于 $\mathbf{R}^N$, 则对 $\forall\lambda\in\mathbf{R}$, (P)有一列解$\{v_k\}$, 满足 $0>J(v_k)\to0$.

其中: J 是与(P)对应的积分泛函, 将在下面给出.

收稿日期: 1999-11-23

基金项目: 国家自然科学基金(19971037)和甘肃省自然科学基金(ZS991-A25)资助项目.

作者简介: 刘轼波(1975-), 男, 硕士生.

注　本文中的解均指弱解, 但由正则性结果知, 弱解均属于 $C^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$.

在本文中, 恒记 $\int \cdot \equiv \int_{\mathbf{R}^N} \cdot \,\mathrm{d}x$, $L^r \equiv L^r(\mathbf{R}^N)$. 用"$\overset{X}{\rightharpoonup}$"表示 X 中的弱收敛

1　若干引理

众所周知, 若 $p \le r \le p^*$, 则有连续嵌入

$$W^{1,p}(\mathbf{R}^N) \to L^r(\mathbf{R}^N), \tag{1}$$

但当 $p \le r < p^*$ 时, 嵌入不紧

记 $W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ 的线性子空间

$$E = \{u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N): \int (|\nabla u|^p + a|u|^p) < \infty\},$$

规定模 $\|u\| = [\int (|\nabla u|^p + a|u|^p)]^{1/p}$, $(u \in E)$. 则 $(E, \|\cdot\|)$ 为可分的自反Banach 空间, 并且是一致凸的 由 (a_0), 有连续嵌入 $E \to W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$, 再结合 (1), 有连续嵌入 $E \to L^r(\mathbf{R}^N)$, $(p \le r \le p^*)$. 进一步, 作为[4] 中 Proposition2. 1(i) 的推广, 有

引理 1.1　当 $p \le r < p^*$ 时, 有紧嵌入 $E \to L^r(\mathbf{R}^N)$.

证明　只需证 $\{u_n\} \subset E$, $u_n \overset{E}{\rightharpoonup} 0 \Rightarrow u_n \overset{L^r}{\rightarrow} 0$.

用共鸣定理, 首先有 $A \equiv \sup_n \|u_n\| < \infty$. 先看 $r = p$ 的情形

由 (a_∞) 知, 对 $\forall \epsilon > 0$, $\exists R > 0$, 当 $|x| \ge R$ 时, $1 \le \epsilon \cdot a(x)$. 记 $B = B_R(0) \subset \mathbf{R}^N$. 据 $a(x) \ge a_0 > 0$ 知由 $u \to u|_B$ 定义的映射 $E \to W^{1,p}(B)$ 是线性连续的 故 $u_n \overset{W^{1,p}(B)}{\rightharpoonup} 0$. 再由紧嵌入 $W^{1,p}(B) \to L^p(B)$ 得 $u_n|_B \overset{L^p(B)}{\rightarrow} 0$. 即当 n 充分大时

$$\int_{|x|<R} |u_n|^p = \int_B |u_n|^p = \int_B |u_n|_B|^p < \epsilon$$

又因为 $|x| \ge R$ 时 $1 \le \epsilon \cdot a(x)$, 故

$$\int_{|x|\ge R} |u_n|^p \le \epsilon \cdot \int_{\mathbf{R}^N} (|\nabla u_n|^p + a|u_n|^p) \le \epsilon \cdot A^p.$$

故当 n 充分大时

$$\int_{\mathbf{R}^N} |u_n|^p = \int_{|x|<R} |u_n|^p + \int_{|x|\ge R} |u_n|^p < \epsilon + \epsilon \cdot A^p,$$

即 $u_n \overset{L^p(\mathbf{R}^N)}{\rightarrow} 0$.

当 $p < r < p^*$ 时, 用上述已证的结果及连续嵌入 $E \to L^{p^*}$ 和内插不等式 $|u|_r \le |u|_p^\theta |u|_{p^*}^{1-\theta}$, (某 $\theta \in (0,1)$), 即可得 $u_n \overset{L^r}{\rightarrow} 0$. 证毕

现定义 E 上的泛函如下: 对 $u \in E$, 让

$$L(u) = \frac{1}{p}\int (|\nabla u|^p + a|u|^p),$$

$$F(u) = \frac{1}{q}\int h|u|^q, \quad G(u) = \frac{\lambda}{s}\int |u|^s,$$

$$J(u) = L(u) - F(u) - G(u).$$

显然$L \in C^1(E,\mathbf{R})$, 并且对$u,\varphi \in E$, 有

$$\langle L'(u),\varphi\rangle = \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi + a|u|^{p-2}u\varphi).$$

利用引理1.1及$s \in (p,p^*)$可证$G \in C^1(E,\mathbf{R})$

$$\langle G'(u),\varphi\rangle = \lambda\cdot\int_\Omega |u|^{s-2}u\varphi,\quad \forall u,\varphi \in E,$$

且$G':E \to E^*$是强连续的(映弱收敛点列为强收敛点列).

关于F, 有下述

引理1.2 $F \in C^1(E,\mathbf{R})$, 且$F':E \to E^*$强连续.

证明 由(h_0)及Hölder不等式, 对$\forall u \in E$有$|F(u)| = \left|\int_\Omega h|u|^q\right| \le |h|_{q_0}|u|_{p^*}^q < \infty$, 即有$F:E \to R$, 进而易证$F \in C^1(E,\mathbf{R})$, 且

$$\langle F'(u),\varphi\rangle = \int_\Omega h|u|^{q-2}u\varphi,\quad \forall u,\varphi \in E.$$

现设有$u_n \overset{E}{\rightharpoonup} u$. 由紧嵌入$E \to L^p$有$u_n \xrightarrow{L^p} u$. 记$g(u) = |u|^{q-2}u$, 则由$u \mapsto g(u)$确定的映射$L^p \to L^{p/(q-1)}$连续. 因而

$$g(u_n) \xrightarrow{L^{p/(q-1)}} g(u). \tag{2}$$

$\exists C > 0$, 对$\varphi \in E$, 有$|\varphi|_p \le C\|\varphi\|$, 此外由$h \in L^{q_0}\cap L^\infty$, $\frac{p}{p-q} > q_0 \Rightarrow h \in L^{p/(p-q)}$, 于是由Hölder不等式得

$$\int_\Omega |h|\,\left||u_n|^{q-2}u_n - |u|^{q-2}u\right||\varphi| \le |h|_{p/(p-q)}|g(u_n) - g(u)|_{p/(q-1)}|\varphi|_p$$
$$\le C|h|_{p/(p-q)}\|\varphi\|\cdot|g(u_n) - g(u)|_{p/(q-1)}. \tag{3}$$

由(2), (3)得

$$\|F'(u_n) - F'(u)\|_{E^*} = \sup_{\|\varphi\|=1}|\langle F'(u_n) - F'(u),\varphi\rangle|$$
$$= \sup_{\|\varphi\|=1}\left|\int_\Omega h(|u_n|^{q-2}u_n - |u|^{q-2})\varphi\right| \to 0,$$

于是$F'(u_n) \xrightarrow{E^*} F'(u)$, 即$F':E \to E^*$强连续. 证毕.

定义1.1 映射$P:E \to E^*$称为(S)型的, 若

$$\left.\begin{array}{l} u_n \overset{E}{\rightharpoonup} u \\ \langle P(u_n),u_n - u\rangle \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \xrightarrow{E} u.$$

注 如果$P,Q:E \to E^*$, 其中P为(S)型, Q强连续, 则$L - Q$亦为(S)型.

引理1.3 $L':E \to E^*$是(S)型的, 从而$J' = L' - F' - G':E \to E^*$也是$(S)$型的.

证明 用[5]中的方法(那里证明的是$a \equiv 0$的情形). 对$u,v \in E$

$$\langle L'(u) - L'(v),u - v\rangle$$
$$= \|u\|^p + \|v\|^p - \int_\Omega(|\nabla u|^{p-2} + |\nabla v|^{p-2})\nabla u\nabla v - \int_\Omega a(|u|^{p-2} + |v|^{p-2})uv$$
$$\ge \int_\Omega|\nabla u|^p + \int_\Omega|\nabla v|^p - \left(\int_\Omega|\nabla u|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega|\nabla v|^p\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_\Omega|\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega|\nabla v|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int a|u|^p+\int a|v|^p-\left(\int a|u|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int a|v|^p\right)^{\frac{1}{p}}-\left(\int a|u|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int a|v|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\\
=&\left[\left(\int|\nabla u|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}-\left(\int|\nabla v|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]\left[\left(\int|\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}}-\left(\int|\nabla v|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\\
&+\left[\left(\int a|u|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}-\left(\int a|v|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]\left[\left(\int a|u|^p\right)^{\frac{1}{p}}-\left(\int a|v|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right].
\end{aligned}\tag{4}
$$

设 $u_n \overset{E}{\rightharpoonup} u$, $\langle L'(u_n), u_n-u\rangle\to 0$, 则 $\langle L'(u_n)-L'(u), u_n-u\rangle\to 0$. 用(4), 注意(4) 右端两项均非负, 有

$$
\left[\left(\int|\nabla u_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}-\left(\int|\nabla u|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]\left[\left(\int|\nabla u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}-\left(\int|\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\to 0,
$$

$$
\left[\left(\int a|u_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}-\left(\int a|u|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]\left[\left(\int a|u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}-\left(\int a|u|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\to 0.
$$

函数 $f(t)=(t^{p-1}-\alpha^{p-1})(t-\alpha)$, $(t\geq 0)$ 满足 $f(t_n)\to 0\Rightarrow t_n\to\alpha$. 故由上二式就有 $\int|\nabla u_n|^p\to\int|\nabla u|^p$, $\int a|u_n|^p\to\int a|u|^p$, 即 $\|u_n\|\to\|u\|$. 又 $u_n\overset{E}{\rightharpoonup}u$, E 一致凸, 故有 $u_n\overset{E}{\to}u$. 即 $L':E\to E^*$ 为(S) 型, 再由定义 1.1 后的注即得后一结论. 证毕.

引理 1.4　$J:E\to\mathbf{R}$ 对 $\forall c\in\mathbf{R}$ 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件.

证明　注意有连续嵌入 $E\to L^{p^*}$, 由 Hölder 不等式有 $\int h|u|^q\leq|h|_{q_0}|u|^q_{p^*}\leq C\|u\|^q$. 设 $\{u_n\}\subset E$, $J(u_n)\to c$, $J'(u_n)\to 0$. 记 $d=\sup\limits_n J(u_n)$, 则当 n 充分大时

$$
\begin{aligned}
sd+\|u_n\|&\geq sJ(u_n)-\langle J'(u_n),u_n\rangle\\
&=\left(\frac{s}{p}-1\right)\|u_n\|^p+\left(1-\frac{s}{q}\right)\int h|u_n|^q\\
&\geq\left(\frac{s}{p}-1\right)\|u_n\|^p-\left|1-\frac{s}{q}\right|\cdot C\cdot\|u_n\|^q.
\end{aligned}
$$

因 $1<q<p<s$, 得$\{u_n\}$ 有界, 因 E 自反, 有子列$\{u_{n_j}\}$, $u_{n_j}\overset{E}{\rightharpoonup}u$, 而 $J'(u_n)\to 0$, 故 $\langle J'(u_{n_j}), u_{n_j}-u\rangle\to 0$. 但 J' 为(S) 型的, 于是 $u_{n_j}\overset{E}{\to}u$, 证毕.

E 是可分 Banach 空间, 由[6] 第 233 页知 $\exists\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset E$, $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset E^*$, 使

(i) $\langle f_n, x_m\rangle=\delta_n^m$;

(ii) $\overline{\mathrm{span}}\{x_n: n\in\mathbf{N}\}=E$;

(iii) $\overline{\mathrm{span}}^{w^*}\{f_n: n\in\mathbf{N}\}=E^*$, 其中当 $n=m$ 时, $\delta_n^m=1$, 当 $n\neq m$ 时, $\delta_n^m=0$.

令 $X_j=\mathrm{span}\{x_j\}$, 则 $E=\overline{\oplus_{j=1}^\infty X_j}$, 再记 $Y_k=\oplus_{j=1}^k X_j$, $Z_k=\overline{\oplus_{j=k}^\infty X_j}$. 则类似[1] 中引理 2.1 的证明可证

引理 1.5　若 $r\in[p,p^*)$, $\beta_k=\sup\limits_{u\in Z_k,\|u\|=1}|u|_r$, 则 $\beta_k\to 0$ $(k\to\infty)$.

本节最后写出要用到的主要理论工具. 设 E 为 Banach 空间, X_j $(j=1,2,\cdots)$ 为 E 的有限维子空间, 使 $E=\overline{\oplus_{j=1}^\infty X_j}$, 又对 $k\in\mathbf{N}$, 记 $Y_k=\oplus_{j=1}^k X_j$, $Z_k=\overline{\oplus_{j=k}^\infty X_j}$, 则有

引理 1.6(喷泉定理, Bartsch T, 1992, 见[7] Theorem 3.6)　若 $J\in C^1(E,\mathbf{R})$ 偶, 对 $\forall c\in\mathbf{R}$ 满足$(\mathrm{PS})_c$ 条件, 又对 $\forall k\in\mathbf{N}$, $\exists\rho_k>r_k>0$, 使

(i) $a_k\equiv\max\limits_{u\in Y_k,\|u\|=\rho_k}J(u)\leq 0$;

(ii) $b_k \equiv \inf_{u \in Z_k, \|u\| = r_k} J(u) \to +\infty\ (k \to \infty)$.

则 J 有一列趋于 $+\infty$ 的临界值

引理 1.7(对偶喷泉定理, Bartsch-Willem, 1995, 见[7] Theorem 3.18) 设 $J \in C^1(E, \mathbf{R})$ 偶, $\exists k_0 \in \mathbf{N}$, $\forall k \geq k_0$, $\exists \rho_k > r_k > 0$, 使

(B1) $a_k \equiv \inf_{u \in Z_k, \|u\| = \rho_k} J(u) \geq 0$;

(B2) $b_k \equiv \max_{u \in Y_k, \|u\| = r_k} J(u) < 0$;

(B3) $d_k \equiv \inf_{u \in Z_k, \|u\| \leq \rho_k} J(u) \to 0\ (k \to \infty)$;

(B4) $\forall c \in [d_{k_0}, 0)$, J 满足 $(PS)_c^*$ 条件.

则 J 有一列趋于 0 的负临界值

$(PS)_c^*$ 条件指: 若 $\{u_{n_j}\} \subset E$, $n_j \to \infty$, $u_{n_j} \in Y_{n_j}$, $J(u_{n_j}) \to c$, $J|'_{Y_{n_j}}(u_{n_j}) \to 0$, 则 $\{u_{n_j}\}$ 有子列收敛于 J 的临界点

2 主要定理的证明

现在来证明定理 0.1, 设 E, X_j, Y_k, Z_k 如上节所述, 并且注意到 J 显然是偶泛函

结论(1) 的证明 在定理 0.1 的(1) 的条件下, 验证泛函 J 满足喷泉定理的条件

(i) 在 Y_k 上, 由 $\int h|u|^q \leq |h|_{q_0} |u|_{p^*}^q$, 有

$$J(u) \leq \frac{1}{p}\|u\|^p + \frac{1}{q}|h|_{q_0}|u|_{p^*}^q - \frac{\lambda}{s}|u|_s^s$$

因有穷维空间 Y_k 上各模等价, 又 $\lambda > 0$, $q < p < s$, 故对充分大的 $\rho_k > 0$, 有 $a_k \equiv \inf_{u \in Y_k, \|u\| = \rho_k} J(u) \leq 0$.

(ii) 令 $\beta_k \equiv \sup_{u \in Z_k, \|u\| = 1} |u|_s$, 由引理 2.5, $\beta_k \to 0$. 对 $u \in Z_k$, 据 β_k 的定义及 $\int h|u|^q \leq C\|u\|^q$, 有

$$J(u) \geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{q}C\|u\|^q - \frac{\lambda}{s}\beta_k^s\|u\|^s$$
$$\equiv \frac{1}{p}\|u\|^p - \alpha\|u\|^q - d\beta_k^s\|u\|^s.$$

令 $r_k = (ds\beta_k^s)^{1/(p-s)}$, 则对 $u \in Z_k$, $\|u\| = r_k$, 有

$$J(u) \geq \frac{1}{p}r_k^p - \alpha \cdot r_k^q - d\beta_k^s r_k^s$$
$$= (ds\beta_k^s)^{q/(p-s)}\left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s}\right)(ds\beta_k^s)^{(p-q)/(p-s)} - \alpha\right]$$
$$\to +\infty \quad (\text{因 } \beta_k \to 0, q < p < s),$$

即 $b_k \equiv \inf_{u \in Z_K, \|u\| = r_k} J(u) \to +\infty$.

由引理 1.4, J 对 $\forall c \in \mathbf{R}$ 满足 $(PS)_c$ 条件. 由喷泉定理, (1) 得证

结论(2) 的证明 只须验证泛函 J 满足对偶喷泉定理的条件

(B1) 令 $\alpha = Np/(N(p-q) + q^2) > q_0$, $\tau = Np/(N-q) \in (p, p^*)$. 则 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\tau/q} = 1$

且 $h \in L^{\alpha}$, 故由 Hölder 不等式及连续嵌入 $E \to L^{\tau}$, 对 $u \in E$ 有

$$\int h|u|^q \le |h|_\alpha |u|_\tau^q \le |h|_\alpha \beta_k^q \|u\|^q, \tag{5}$$

其中: $\beta_k = \sup_{u \in Z_k, \|u\| = 1} |u|_\tau \to 0$(引理 2.5). 由连续嵌入 $E \to L^s$ 知 $\exists R > 0$, 使

$$\|u\| \le R \Rightarrow \frac{|\lambda|}{s}\int |u|^s \le \frac{1}{2p}\|u\|^p. \tag{6}$$

由(5), (6), 当 $\|u\| \le R$ 时

$$J(u) \ge \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{q}\int h|u|^q - \frac{|\lambda|}{s}\int |u|^s$$
$$\ge \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{q}|h|_\alpha \beta_k^q \|u\|^q - \frac{1}{2p}\|u\|^p \equiv \frac{1}{2p}\|u\|^p - c\beta_k^q\|u\|^q. \tag{7}$$

令 $\rho_k = (2pc\beta_k^q)^{1/(p-q)}$, 则 $\rho_k \to 0$. 故 $\exists k_0$, 当 $k \ge k_0$ 时 $\rho_k \le R$. 于是当 $k \ge k_0$, $u \in Z_k$, $\|u\| = \rho_k$ 时, $J(u) \ge \frac{1}{2p}\rho_k^p - c\beta_k^q \rho_k^q = 0$. 即证得(B1).

(B2) 引入新模 $[u]_q = \left(\int h|u|^q\right)^{1/q}$(注意 $h > 0$ a.e. 于 $\mathbf{R}^N$, 易证[·]是 E 上的模). 于是

$$J(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{q}\int h|u|^q - \frac{\lambda}{s}\int |u|^s = \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{q}[u]_q^q - \frac{\lambda}{s}|u|_s^s.$$

因有穷维空间 Y_k 上各模等价, 故当 r_k 很小(还可小于 ρ_k) 时, $b_k \equiv \max_{u \in Y_k, \|u\| = r_k} J(u) < 0$. 即得(B2).

(B3) 由(7) 式, $u \in Z_k$, $\|u\| \le \rho_k$ 时

$$J(u) \ge -c\beta_k^q \|u\|^q \ge -c\beta_k^q \rho_k^q.$$

由 $0 > b_k \ge d_k \equiv \inf_{u \in Z_k, \|u\| \le \rho_k} J(u)$ 以及 $-c\beta_k^q\rho_k^q \to 0$, 可得 $d_k \to 0$. 于是(B3) 得证.

(B4) 用引理 2.5, 类似[1] 引理 2.2 可证, 略.

综上所述, 由对偶喷泉定理, (2) 得证.

参 考 文 献

[1] 杨海, 范先令. 带有 p-凹凸非线性项的 p-Laplace 方程的无穷多解的存在性[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 1999, 35(2): 12～16.

[2] Bartsch T, Willem M. On an elliptic equation with concave and convex nonlinearities[J]. Proc Amer Math Soc, 1995, 123: 3555～3561.

[3] Garcia Azorero J, Peral Alonso I. Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term[J]. Trans Amer Math Soc, 1991, 323: 877～895.

[4] Omana W, Willem M. Homoclinic orbits for a class of Hamiltonian systems[J]. Differential and Integral Equations, 1992, 5(5): 1115～1120.

[5] Le V K, Schmitt K. On boundary value problems for degenerate quasilinear elliptic equations and inequalities[J]. J Differ Eqs, 1998, 144: 170～208.

[6] 赵俊峰. Banach 空间结构理论[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 1991. 233.

[7] Willem M. Minimax Theorems[M]. Boston: Birkhauser, 1996.

Infinitely Many Solutions of a Class of Quasilinear Elliptic Equations in R^N with p-Concave and Convex Nonlinearities

Liu Shibo, Fan Xianling

(Department of Mathematics, Lanzhou University, Lanzhou, 730000, China)

Abstract: Under proper conditions, we obtain the existence of infinitely many solutions of the following quasilinear elliptic equation

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + a(x)|u|^{p-2}u = h(x)|u|^{q-2}u + \lambda|u|^{s-2}u, u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$$

where, $p < N$, $1 < q < p < s < p^* \equiv Np/(N-p)$.

Key words: p-Laplacian equations; Sobolev space; integral functional; critical points

MR(1991) Subject Classification: 35J70