零一多目标规划及其在管理决策中的应用

高鸿桢

在经济活动中，经常要在一些方案中进行抉择，如对某个方案或弃或取，只有两种处理方式，则我们可以用“零一变量”来表达这种抉择，$x=0$表示放弃这个方案，$x=1$表示选取这个方案。例如决策者要在n项投资项目间进行抉择，对于第j项投资项目他只能有“要”和“不要”两种选择，不能有“要一半”“要0.2”之类的选择。为此，他可以用

$$x_j=\begin{cases}0, & \text{表示不选择第j项投资,}\\ 1, & \text{表示选择第j项投资。}\end{cases}$$

这种“零一”变量来表示他的选择。零一目标规划所处理的变量都是“零一”变量。本文给出零一多目标规划的一种新的解法，并说明它在决策问题上的某些应用。

先研究单一目标的零一规划问题。

假设某县准备在地方财政中拨出10万元的投资发展地方工业。可以“上马”的有四个项目，即筹办甲、乙、丙、丁四种类型的工厂。如果这些厂可得的年利润分别为1万元，8千元、7千元和6千元，所需的投资分别为6万元、4万元、2万元和4万元。由于投资总额的限制，这四项计划无法同时上马，如果县领导人想在投资总额10万元的限制下取得最大年利润，他应选择开办哪些厂？

我们按顺序甲厂、乙厂、丙厂和丁厂分别称为1，2，3和4厂，设

$$x_j=\begin{cases}0, & \text{表示第j工厂不开办,}\\ 1, & \text{表示第j工厂开办,}\end{cases}\quad (j=1,2,3,4)$$

则可得零一规划问题：

$$\max\quad S=10x_1+8x_2+7x_3+6x_4\qquad(\text{千元})$$

$$\text{约束于}\qquad 6x_1+4x_2+2x_3+4x_4\leqslant 10\quad(\text{万元})$$

$$x_j=0\text{ 或 }1\qquad(j=1,2,3,4)$$

以下我们把所有可能的解都列出来，分别检验它是否符合约束条件，对于符合约束条件的解计算目标函数的值，从这些值中找出最大（或最小）者，相应的解就是最优解。对于有n个零一变量的问题，可能的解一共有2^n个。

为了不遗漏也不重复地列出各个可能的解，我们可采用如下方法：

设 $X = [x_1, x_2 \cdots, x_n]^T$ （"T"表示转置）

现在把非负整数 $0, 1, 2, \cdots, 2^n - 1$ 分别表为二进制数

$$k = a_1^k \cdot 2^{n-1} + a_2^{(k)} \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_{n-1}^{(k)} \cdot 2 + a_n^{(k)} \cdot 2^0$$

其中，$a_j^{(k)} = 0$ 或 1 （$j = 1, 2, \cdots, n$；$k = 0, 1, \cdots, 2^n - 1$）

那么，$X^{(k)} = [a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \cdots, a_n^{(k)}]^T$

当 $k = 0, 1, \cdots, 2^{n-1}$ 时 $X^{(k)}$ 给出 2^n 个所有可能的解．

现在我们来解以上投资决策问题。此例共有4个零一变量，可能的解有$2^4 = 16$个，应用上述的方法把0～15表为二进位数，给出$X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$的值，检验它是否符合约束条件，计算可行解的目标函数值得下表：

〔表·1〕

Cj	10	8	7	6			
序号（k）	x_1	x_2	x_3	x_4	是否可行	S	
0	0	0	0	0	是	0	
1	0	0	0	1	〃	6	
2	0	0	1	0	〃	7	
3	0	0	1	1	〃	13	
4	0	1	0	0	〃	8	
5	0	1	0	1	〃	14	
6	0	1	1	0	〃	15	
7	0	1	1	1	〃	21	•
8	1	0	0	0	〃	10	
9	1	0	0	1	〃	16	
10	1	0	1	0	〃	17	
11	1	0	1	1	否	—	
12	1	1	0	0	是	18	
13	1	1	0	1	否	—	
14	1	1	1	0	〃	—	
15	1	1	1	1	〃	—	

表中"是否可行"列是检验该序号的解是否满足约束条件，而S列则是目标函数的

值。由上表可以看出，k = 7 时S的值最大，因此最优解为 $x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1$，也就是应开办乙厂丙厂和丁厂，暂时不开办甲厂。此时，年利润总额可达2.1万元。

上述的投资决策是一个最简单的模型，叫单目标单约束模型。而在许多情况下，限制条件往往不止一个，例如在决定投资时，还要考虑人力资源、厂房设施、原料来源、销售情况等各方面的制约条件。对于多约束的问题，上述方法仍然可以适用。只要把每一个可能的解分别代入各约束式检验它是否符合就可以了。对于符合约束式的可行解，计算其目标函数值，从而求出最优解。

在现实生活中，决策者的目标比较复杂，通常无法用单一的指标来表达。在许多情况下，我们总是把利润最大化作为目标来求解的。但是社会主义企业的经营目的是最大限度地满足人民的需要，而不是单纯追求最大利润。因此，在管理决策时，必须对各方面因素作统筹安排。例如必须考虑到环境污染，就业人数等。这就形成了多目标规划问题。在多目标规划中，我们可以按照各个目标的重要性，划分“优先序”，也就是说，最重要的是“第一优先”，次重要的是“第二优先”，再次者“第三优先”，“第四优先”等等。由于决策者所确定的目标是有关联的，有时甚至是互相冲突的，（例如一个化肥厂的利润与产品成正比，而对环境的污染程度也可能与产量成正比，此时如果把增加利润和保护环境都列入目标，则这两个目标是相互冲突的）因而最优方案往往无法达成所有的目标，而只是达成一些优先序较前的一些目标，并希望与目标的总偏差达到最小，也就是说为达成主要的目标只好牺牲次要的目标。现举一例说明。

某市为解决部分待业青年的就业问题，准备开办一些工厂，现有甲、乙、丙、丁四个工厂待选，预计各厂可安排的就业人数、对环境的污染情况、可望利润、投资金额、所需资源等情况如下表所示

情况＼工厂	甲	乙	丙	丁
就业人数（人）	60	40	50	30
投　资（千元）	60	45	50	30
污染（综合单位）	80	90	10	70
利　润（千元）	15	10	12.5	7.5
日耗电（瓩时）	500	400	350	200

市政府的目标是：

第一优先：安排就业人数在100人以上，

第二优先：总投资在14.0万元以下，

第三优先：对环境污染在160个综合单位以下，

第四优先：①总利润在3.6万元以上，

②日耗电量在1千瓩时以下。

现在问，在这样的目标结构下，兴办哪些工厂比较合理？这是一个多目标决策问题。我

们依次把甲、乙、丙、丁厂称为1，2，3，4厂，同样设$x_j=0$或1表示第j厂开办或不开办。

引入差异变量y_1^+和y_1^-分别表示就业人数超过和不足100人的数量，则可得约束方程如下：

$$60x_1+40x_2+50x_3+30x_4-y_1^++y_1^-=100$$

因为第一优先目标是要求就业人数在100人以上，因此这相当于y_1^-越小越好。类似地，设y_2^+，y_2^-表示投资金额超过和不足14.0万元的差异变量；y_3^+和y_3^-表示污染超过和不足160综合单位的差异变量；y_4^+和y_4^-表示利润超过和不足35万元的差异变量；y_5^+和y_5^-表示耗电超过和不足1000瓩时的差异变量。则可得关于其他各目标的约束方程，最后得到如下零一目标规划：

$$\text{Min}\quad Z=P_1 y_1^- + P_2 y_2^+ + P_3 y_3^- + P_4(y_4^- + y_5^+) \qquad (1)$$

约束于：

$$60x_1+40x_2+50x_3+30x_4-y_1^++y_1^-=100 \qquad (\text{就业人数}) \quad (2)$$

$$60x_1+45x_2+50x_3+30x_4-y_2^++y_2^-=140 \qquad (\text{投资金额}) \quad (3)$$

$$80x_1+90x_2+10x_3+70x_4-y_3^++y_3^-=160 \qquad (\text{污染}) \quad (4)$$

$$15x_1+10x_2+12.5x_3+7.5x_4-y_4^++y_4^-=36 \qquad (\text{利润}) \quad (5)$$

$$0.5x_1+0.4x_2+0.35x_3+0.2x_4-y_5^++y_5^-=1 \qquad (\text{耗电}) \quad (6)$$

其中p_1，p_2，p_3，p_4分别表示第一，二，三，四优先。

对于一般目标规划问题，可以用单纯形法解。(1)(2) 但由于零一目标规划是特殊的目标规划，我们可以有比较简便的方法。文献〔2〕提出了一个方法（〔2〕P372），即从原零一目标规划问题导出一个新的单目标零一规划问题，在这个导出的问题中，把原来的零一目标规划问题中的第一优先作为目标函数，把其他各优先目标改为不等式约束。用导出问题的最优解作为原问题的最优解。这个方法的优点是运算简便，但并不能保证导出的问题有可行解，即使导出问题有可行解也不能保证得到的最优解就是原问题的最优解。下面我们将在〔2〕的基础上提出一个新的方法，这个方法可以保证得到原问题的最优解。

一般的零一目标规划模型可写为

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Min } Z=P^TDy & \\ \text{S.t.}\quad Ax+Qy=b & (GPI) \\ \quad x=X^{(k)},\ y\geq 0,\ k=0,1,\cdots,2^n-1 & \end{array}\right\}(GP)$$

其中，$P=[P_1, P_2,\cdots,P_r]^T$，$D\in R^{r\times 2m}$

$y=[y_1^-, y_1^+,\cdots,y_m^-, y_m^+]^T\in R^{2m}$（r 行 2m 列矩阵）

$A=[a_{ij}]\in R^{m\times n}$， $x\in R^n$ （2m 维向量）

$Q=[q_{ij}]\in R^{m\times 2m}$，当 $j=2i-1$ 时 $q_{ij}=1$；$j=2i$ 时 $q_{ij}=-1$，其他情况 $q_{ij}=0$.

$b=[b_1, b_2\cdots, b_m]^T\in R^m$， $b\geq 0$，$X^{(k)}$的意义同前。

求解的步骤如下：

第一步：令 $b-AX^{(k)}=[C_1^{(k)},\cdots,C_m^{(k)}]^T$

作 $Y^{(k)}=[y_1^-(k),y_1^+(k),\cdots,y_m^-(k),y_m^+(k)]^T\in R^{2m}$

其中，$y_i^-(k)=\max\{0,C_i^{(k)}\}$，$y_i^+(k)=\max\{0,-C_i^{(k)}\}$

$(i=1,2,\cdots,m)$

第二步，记 D 的第 i 行向量为 $D^{(i)}(i=1,2,\cdots,r)$，求出

$Z_1=\mathrm{Min}\{D^{(1)}Y^{(k)}|k\in J_0\}$，$J_0=\{0,1,\cdots,2^n-1\}$

令 $J_1=\{k|D^{(1)}Y^{(k)}=Z_1,k\in J_0\}$

第三步，依次求出

$Z_2=\mathrm{Min}\{D^{(2)}Y^{(k)}|k\in J_1\}$，$J_2=\{k|D^{(2)}Y^{(k)}=Z_2,k\in J_1\}$

……

$Z_r=\mathrm{Min}\{D^{(r)}Y^{(k)}|k\in J_{r-1}\}$，$J_r=\{k|D^{(r)}Y^{(k)}=Z_r,k\in J_{r-1}\}$

则 $X^{(k)},Y^{(k)}(k\in J_r)$ 就是（GP）的最优解。

事实上，把 $AX^{(k)}+QY^{(k)}$ 写成分量形式，即

$\sum_{j=1}^n a_{ij}X_j^{(k)}+y_i^-(k)-y_i^+(k)\quad(i=1,\cdots,m)$

由第一步，当 $b_i\geqslant\sum_{j=1}^n a_{ij}X_j^{(k)}$ 时，$y_i^-(k)=b_i-\sum_{j=1}^n a_{ij}X_j^{(k)}$，$y_i^+(k)$ ……

$\therefore\sum_{j=1}^n a_{ij}X_j^{(k)}+y_i^-(k)-y_i^+(k)=b_i$

对于 $b<\sum_{j=1}^n a_{ij}X_j^{(k)}$ 也有同样等式成立，且 $X^{(k)},Y^{(k)}\geqslant0$，

因而对 $\forall k\in J_0$，$X^{(k)},Y^{(k)}$ 是可行解，而 $J_r\subset J_{r-1}\subset\cdots\subset J_0$

$\therefore$ 对 $k\in J_r$，$X^{(k)},Y^{(k)}$ 是可行解。

设 $Z^*=Z_1p_1+Z_2p_2+\cdots+Z_rp_r$

因 $y_i^+\cdot y_i^-=0$，可知对 $\forall X^{(s)}$，$S\in J_0$，（GP_1）所决定的 y 就是 $y=Y^{(s)}$

对 $X^{(s)},Y^{(s)}$，设 $Z^{(s)}=pDY^{(s)}=Z_1^{(s)}p_1+\cdots+Z_r^{(s)}p_r$

其中，$Z_i^{(s)}=D^{(i)}Y^{(s)}\ (i=1,2,\cdots,r)$

从 $i=1$ 开始依次比较 Z_i 与 $Z_i^{(s)}$，$\because Z_1=\mathrm{Min}\{D^{(1)}Y^{(k)}|k\in J_0\}$

$\therefore Z_1\leqslant Z_1^{(s)}$。如果 $Z_1<Z_1^{(s)}$，则可知 $X^{(k)},Y^{(k)}$ 优于 $X^{(s)},Y^{(s)}$，

如果 $Z_1=Z_1^{(s)}$，则 $S\in J_1$，继续比较 Z_2 与 $Z_2^{(s)}$，同样有 $Z_2\leqslant Z_2^{(s)}\cdots$

依次比较到 Z_r，即可知 Z^* 依优先序达到最优。

现在，我们用这个方法来解上面的问题。这里

$$D=\begin{array}{c|cccccccccc|c} & y_1^- & y_1^+ & y_2^- & y_2^+ & y_3^- & y_3^+ & y_4^- & y_4^+ & y_5^- & y_5^+ & \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1\\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_2\\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_3\\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & P_4\end{array}$$

因为D有很多0，因此J_i的决定可以简化，

$$D^{(1)}y^{(k)}=y_1^-(k),$$

所以 $Z_1=\mathrm{Min}\{y_1^-(k)\mid k\in J_0\}$

因此只要计算 $y_1^-(k)$即可，以下列表计算：

$$y_1^-(k)-y_1^+(k)=b_1-\sum_{j=1}^{4}a_{1j}y_j.$$

(k)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Σ	0	30	50	80	40	70	90	120	60	90	110	140	10	130	150	180
y_1^-	100	70	50	20	60	30	10	0	40	10	0	0	0	0	0	0
y_1^+	0	0	0	0	0	0	0	20	0	0	10	40	0	30	50	80
J_1								✓			✓	✓	✓	✓	✓	✓

表中"Σ"行即$\sum_{j=1}^{4}a_{1j}x_j$的值，由表中可看出$Z_1=0$，$J_1=\{7,10,11,12,13,14,15,\}$。属于$J_1$的$k$在表中用"✓"号表示。

$$D^{(2)}y^{(k)}=y_2^+(k)$$

$Z_2=\mathrm{Min}\{y_2^+(k)\mid k\in J_1\}$ 类似可列表计算：

(k)	7	10	11	12	13	14	15
Σ	125	110	140	105	135	155	185
y_2^-	15	30	0	35	5	0	0
y_2^+	0	0	0	0	0	15	45
J_2	✓	✓	✓	✓	✓		

$\therefore\ Z_2=0$，$J_2=\{10,11,12,13\}$

$D^{(3)}y^{(k)}=y_3^+(k)$，$Z_3=\mathrm{Min}\{y_3^+(k)\mid k\in J_2\}$ 类似列表计算(表略)可得，

$Z_3=0$，$J_3=\{10,11\}$

$D^{(4)}y^{(k)}=y_4^-(k)+y_5^+(k)$，$Z_4=\mathrm{Min}\{y_4^-(k)+y_5^+(k)\mid k\in J_3\}$

列表计算如下(为节省篇幅，改为竖排)：

(k)	Σ_4	y_4^-	y_4^+	Σ_5	y_5^-	y_5^+	$y_4^-+y_5^+$	J_4
10	27.5	8.5	0	0.85	0.15	0	8.5	
11	35	1	0	1.05	0	0.05	1.05	✓

表中Σ_4表示$\sum_{j=1}^{4}a_{4j}x_j$，Σ_5的意义类似。

$\therefore\ Z_4=1.05$，$J_4=\{11\}$

所以　　$X^{(4)}=(1,0,1,1)^T$属于最优解，即市政府应建甲、丙、丁三厂。此时，前三个优先目标均可达到：就业超过100人（实为140人）投资计1[illegible]万元，污染160个综合单位。第四优先目标无法完全达成，利润只能达到3.5万元，日耗电量超过0.05千瓦时。

如果按文献〔2〕的方法，这个问题应先解如下零一规划问题

$$\text{Max}\quad S=60x_1+40x_2+50x_3+30x_4$$

$$
\begin{aligned}
\text{St.}\quad & 60x_1+45x_2+40x_3+35x_4\leqslant 140 && (2.1)\\
& 80x_1+90x_2+10x_3+70x_4\leqslant 160 && (2.2)\\
& 15x_1+10x_2+12.5x_3+7.5x_4\geqslant 36 && (2.3)\\
& 0.4x_1+0.4x_2+0.35x_3+0.2x_4\leqslant 1 && (2.4)
\end{aligned}
$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4=0\text{ 或 }1$$

然而这个问题是没有可行解的。因为满足不等式（2，3）的只有$X^{(14)}$和$X^{(15)}$，但$X^{(14)}$，$X^{(15)}$又不能满足不等式（2、1）。

即使按〔2〕导出的问题有可行解，但导出的问题的最优解也未必是原问题的最优解。现在就以〔2〕p372的例7.4为例说明。

$$
\begin{aligned}
\text{Min}'\quad & Z=P_1y_1^-+P_2(y_2^++y_3^++y_6^-)+P_3(y_4^++y_5^+) && (3.1)\\
\text{S.t.}\quad & 9x_1+8.9x_2+9.5x_3+9.3x_4-y_1^++y_1^-=27 && (3.2)\\
& 40x_1+45x_2+48x_3+47x_4-y_2^++y_2^-=100 && (3.3)\\
& 150x_1+140x_2+130x_3+135x_4-y_3^++y_3^-=320 && (3.4)\\
& 28x_1+26x_2+24x_3+25x_4-y_4^++y_4^-=50 && (3.5)\\
& 3000x_1+3000x_2+2800x_3+2800x_4-y_5^++y_5^-=7500 && (3.6)\\
& 300x_1+300x_2+350x_3+330x_4-y_6^++y_6^-=650 && (3.7)
\end{aligned}
$$

$$x_i=0\text{ 或 }1,\ y_j^+,\ y_j^-\geqslant 0,\ (i=1,2,3,4;\ j=1,\cdots,6)$$

把关于第一优先的目标方程（2、1）改为目标函数，其他约束方程按目标函数的要求改为不等式后，化为单一目标的零一规划问题，解得：

$$x=X^{(3)}=(0,0,1,1)^T$$

此时，$y_1^+=y_2^+=y_3^+=y_4^+=y_5^+=y_6^-=0$

$$y_1^-=8.2,\ y_2^-=5,\ y_3^-=55,\ y_4^-=1,\ y_5^-=1900,\ y_6^+=30$$

$$Z=8.2p_1$$

但按本文的方法可解得：

$$J_1=\{7,11,13,14,15\},\quad J_2=\{7\},$$

$$J_4=J_3=J_2=\{7\}$$

所以　$x^*=X^{(7)}=[0,1,1,1]^T$

此时，$Z=125p_2+1125p_3$

（下转第46页）

要劳动时间不仅具有在价值量决定方面上的这一重意义，而且它在社会使用价值量的确定上还“包含着另一种意义”。这二重意义是根本不同的。

既然社会必要劳动时间的“另一种意义”在于确定部门商品总量的使用价值，并不在于决定价值量，那么，是否可以说它对价值就毫无影响呢？当然也不是。因为，商品是使用价值和价值的统一体，这两个方面有密切的关系。马克思指出：“要使一个商品按照它的市场价值来出售，……耗费在这种商品总量上的社会劳动的总量，就必须同这种商品的社会需要的量相适应”①。显然，这就是说，商品的价值实现必须以它对社会具有使用价值，能够满足社会需要为前提。在这里，“这不过是已经在单个商品上表现出来的同一规律，也就是：商品的使用价值，是它的交换价值的前提，从而也是它的价值的前提。”②“因此，不仅在每个商品上只使用必要的劳动时间，而且在社会总劳动时间中，也只把必要的比例量使用在不同类的商品上。这是因为条件仍然是使用价值。”③可见，第二重意义的社会必要劳动时间决定的社会使用价值量的这个数量界限，是按商品价值实现的基本条件。“如果物没有用，那末其中包含的劳动也就没有用，不能算作劳动，因此不形成价值。”④但是，这里必须明确指出的是：马克思在《资本论》第三卷有关章节中也只是在这个意义上讲到第二重意义的社会必要劳动时间对价值实现有一定的影响作用，然而，实际上这种影响作用是由使用价值和价值之间的关系决定的，并不是由社会必要劳动时间的第二重意义本身决定的。因为，“商品在能够作为价值实现以前，必须证明自己是使用价值”⑤。价值实现的这个条件虽然也是第二重意义的社会必要劳动时间发生作用的结果，但产生这个条件的根本原因并不在于社会必要劳动时间的“另一种意义”，而是在于商品二重性（使用价值和价值）之间的关系。所以，不能说社会必要劳动时间的“另一种意义”在任何社会条件下都在于价值实现，因为，在没有商品生产的社会里，例如在共产主义高级阶段，虽然没有价值实现问题，但是社会必要劳动时间的“另一种意义”却仍然存在，并且更加重要和明显。由此可见，社会必要劳动时间的“另一种意义”与价值实现也并非完全是一个问题。

---

① 《资本论》第3卷，第215页。

②③ 同上书，第716页。

④⑤ 《资本论》第1卷，第54页，第103页。

（上接第39页）
可以看出这个结果比前一个结果要好，因为这里已达成了第一优先目标。

* * *

参考文献

〔1〕H. Moskowitz and P. Wright, Operations Research Techniques for Management, Prentice-Hall, London, 1979。

〔2〕张家泽，目标规划，台湾省中兴管理顾问公司，台北，1979。