影·子·价·格·与·资·源·分·类

高 鸿 桢

当企业利用稀缺资源进行生产时，可以根据最优生产计划的结构，利用资源的影子价格，对各资源的利用情况进行评价。在社会主义计划经济中应用影子价格所提供的信息对于更好地分配资源，制定生产计划是有积极意义的，这种观点已为经济界所接受，但在影子价格的经济意义和具体应用方式上，尚存在不同意见。有的同志认为应以最大产值为目标定义影子价格[1]，有的则从利润最大出发来定义[2][4]。而在具体应用上有两种意见，第一种意见认为当某种资源的影子价格大于市场价格时应买进资源扩大生产；反之，当资源的影子价格小于市场价格时则应卖出该资源缩减生产[1][3][4]。第二种意见则主张只要某资源的影子价格大于现市场价格与原供应价格之差就可购进该资源扩大生产，反之则卖出该资源，缩减生产规模[2]。这些意见，看起来分歧甚大，但实际上都有其正确的地方，也有其不全面之处。它们各有其应用范围，不应笼统而论。我们认为，影子价格是与特定的生产计划相联系的，同一资源在不同的生产计划中可以有不同的影子价格，因此资源在特定生产计划的作用与影子价格密切相关。本文试图按资源在生产中的作用加以分类，分析这两种不同意见的适用范围，阐明经营管理中如何正确应用影子价格所提供的信息。

［模型 1］考虑如下生产问题模型：设企业利用 m 种资源 G_1，G_2，G_3，……G_m 生产 n 种产品 PR_1，PR_2，……，PR_n。生产条件如下：

（1）在一个生产周期中 G_i 的总供应量最多只有 b_i 单位（$i=1,2,\cdots\cdots m$）。

（2）已知生产每单位的产品 PR_j 需要 G_i 资源 a_{ij} 单位，

（$i=1,2,\cdots m$；$j=1,2,\cdots n$），

（3）生产每单位 PR_j 可获利 f_j。

我们的目标是使利润最大。设 x_j 为产品 PR_j 的生产量，则可得如下线性规划问题：

$$\max\ S=\sum_{j=1}^{n} f_j x_j$$

$$s.t.\ \begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leqslant b_i & (i=1,\cdots,m)\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2\cdots,n)\end{cases}\qquad (1)$$

问题(1)的最优解（$x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*$）就是在给定条件下使得利润最大的最优计划，与问题(1)相联系的对偶问题是：

$$\min\ Z=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$s.t.\ \begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i\leqslant f_j & (j=1,2,\cdots,n)\\ y_i\geqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m)\end{cases}\qquad (2)$$

我们把问题(2)的最优解（$y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*$）称为资源$G_i$的影子价格。由线性规划的对偶理论[4]可知，资源$G_i$的影子价格$y_i^*$，就是在生产问题(1)中中，当$b_i$增加1单位，而其他生产条件不变时，目标函数$S$的增加量。如果我们利用单纯形法求解问题(1)，那未在最优表相应于第i不等式的松驰变量所对应的检验数的值，恰好等于G_i的影子价格y_i^*。

资源的影子价格为企业的经营管理提供了一个非常重要的信息。如何正确利用它，是一个重要课题。为明确起见，我们假定，在[模型1]中，企业生产中的所有限制条件（例如，人力限制、设备能力限制、原料限制、售量限制、原料限制、资金限制等）都已用问题(1)中的约束条件表示出来了，因此问题(1)的任意可行解都是企业能够执行的生产计划。所谓"企业的生产能力许可"也就是指生产计划能满足问题(1)的约束条件。

下面从一个实例出发，说明资源分类的概念。

[例1]某工厂以一种贵重金属为原料生产两种产品，两种产品都必须经过粗加工和精加工两道工序，生产每件A产品需粗加工1小时，精加工2小时，需贵金属3克，出厂价60元，生产B产品需粗加工7小时，精加工4小时，需贵金属2克，出厂价70元。在一个生产周期中，按该厂的设备和人员，粗加工能力为140,000小时，精加工能力为100,000小时，由计划渠道供应的贵金属只有120公斤。每个粗加工工时的成本计为1.5元，精加工工时为2.5元，每克贵金属成本为10元。因为该厂的工人工资和设备折旧在同一个生产周期内是固定的，所以不论产品多少，都以其最大加工能力的工时计入成本，而贵金属按其实际使用量计入成本。如设A.B产品分别生产x_1和x_2千件，则利润可按下式计算（单位：万元）

$$\begin{aligned} S_1 &= 6x_1+7x_2-[(3x_1+2x_2)+(14\times1.5+10\times2.5)] \\ &= 3x_1+5x_2-46 \end{aligned}$$

使得毛利最大的生产计划即为如下线性规划的最优解：

$$\max S=3x_1+5x_2 \qquad (S_1=S-46)$$

$$s.t\begin{cases} x_1+7x_2\leqslant140 & \text{（粗加工工时约束）} \\ 2x_1+4x_2\leqslant100 & \text{（精加工工时约束）} \\ 3x_1+2x_2\leqslant120 & \text{（贵金属用量约束）} \\ x_1,x_2\geqslant0 \end{cases} \qquad (3)$$

引入松驰变量x_3，x_4，x_5用单纯形法求解可得如下最优表（表1）：

[表1]

最	5	P_2	7.5	0	1	0	0.375	−0.25
优	3	P_1	35	1	0	0	−0.25	0.5
表	0	P_3	52.5	0	0	1	−2.335	1.25
		Z_j-C_j	142.5	0	0	0	1.125	0.25

从最优表可以看出应生产A产品35千件，B产品7.5千件，此时可得最大毛利

$$S_1^* = S^* - 46 = 142.5 - 46 = 96.5（万元）。$$

粗加工2时的影子价格为0；精加工2时的影子价格为1.125万元/千工时，即每工时11.25元，贵金属的影子价格为0.25万元/公斤，即每克2.5元。

影子价格给经营者提供了什么信息呢？那就是提供了一个数量界限，使得经营者能科学地判定某一资源在一定的市场价格下是否应当“购入”资源扩大生产（或把资源出售）。现在设该厂可以花费一定代价委托外单位进行精加工，问题是外加工费多大时该厂有利可图？按第一种意见，当加工费少于影子价格每千工时1.125万元时有利；按第二种意见，加工费大于影子价格也无妨，只要能小于影子价格与原加工成本之和1.375万元/千工时(1.125+0.25)就有利。如果外加工费为1.225万元/千工时，那么按第一种意见，委托外加工无利可图，但按第二种意见，外加工有利可图。到底那一种意见正确呢？我们可以具体计算一下。设该厂以1.225万元委托外单位进行1千工时的精加工，其他条件不变，那么在线性规划(3)中只有第二个约束条件的右边常数变为101，其余都不变，在新的约束条件下，可求得新的最优解为：

$x_1 = 34.75$； $x_2 = 7.875$； 此时

销售收入 $R = 6x_1 + 7x_2 = 263.625$（万元）

成本 $C = 3x_1 + 2x_2 + 14 \times 1.5 + 10 \times 2.5 + 1.225$

$= 167.225$（万元）

利润 $R - C = 96.4 < 96.5$（万元）

可见第一种意见是正确的。

现在设该厂可以从市场上购买贵金属，如果贵金属的价格是每克7.5元（即每公斤0.75万元），此价格已大于影子价格，按第一种意见，不应购入；但是它小于原成本与影子价格之和（$0.75 < 1 + 0.25$），按第二种意见，在这种情况下，购入贵金属是有利可图的。事实上，如果该厂以0.75万元购入1公斤贵金属，其他条件不变，则线性规划(3)中第三约束式的右边常数变为121，在新的约束条件下，可求得新的最优解为

$x_1 = 35.5$， $x_2 = 7.25$，此时销售收入：

$R = 6x_1 + 7x_2 = 263.75$

成本： $C = 120 \times 1 + 0.75 + 14 \times 1.5 + 10 \times 2.5 = 166.75$

利润： $R - C = 97 >$ 原利润96.5

此时第二种意见是正确的。

从这个例子可以看出，对于不同的资源，影子价格应有不同的应用方式。因此我们应把资源加以分类，以明确应用影子价格的不同方式。在一般情况下，不仅仅用以生产产品的原料、资金、人力等“有形资源”有影子价格，某些无形的限制，也会有影子价格，甚至象产品销量这样的限制条件也会有影子价格的。（例子见下）另外，在同一生产条件下，同一资源在不同的数量级上可以有不同的影子价格。因此，我们认为，与其说是“某资源的影子价格”不如说是“某约束条件的影子价格”，在这一点上看，康托罗维奇把“影子价格”称为“客观制约评价”是有道理的。从这种思想出发，我们以下对“资源”的分类，实际上就是对[模型1]中约束条件分类，这里的“资源”是广义

的，也可以看作是约束条件的代称。

我们把剩余资源无法利用而成本只与限制量 b_i 有关的资源称为“第一类资源”。例如工厂中固定的工人可看作是第一类的人力资源，固定的生产能力、设备、产品销售市场潜力等也可看作是第一类资源，因为在进行生产时，这些资源已事先给出，在一个生产周期中，可以把这些资源的花费看作是固定不变的，与具体产品的产量并无直接关系。上例中，工厂的粗加工和精加工能力就是属于第一类资源。如果一个资源是以它实际用量的价格计入产品成本，则我们称它为“第二类资源”。一般的产品原料都属于第二类资源，上例中贵金属属于第二类资源。

为明确起见，我们把[模型1]推广为[模型2]，条件(1)，(2)同[模型1]，条件(3)改为：

(3.1) m个资源中前 r 个（即$G_1,G_2,\cdots,G_r$）是属于第一类资源，后$m-r$个（即G_{r+1}，G_{r+2}，$\cdots,G_m$）属于第二类资源。资源G_i计入成本的每单位平均价格为$w_i(i=1,2,\cdots,m)$

(3.2) 产品 PR_j 的出厂价为 g_j，在这些假设下利润为：

$$S_1=\sum_{j=1}^{n}(g_j-\sum_{i=1+1}^{n}w_ia_{ij})x_j-\sum_{i=1}^{r}w_ib_i$$

因为$\sum\limits_{i=1}^{r}w_id_i$是常数，因此使利润最大的规划问题仍可表为问题(1)，其中

$$S=S_1+\sum_{i=1}^{r}w_ib_i \qquad (4)$$

$$f_j=g_j-\sum_{i=r+1}^{n}w_ia_{ij}$$

现设 G_k 的影子价格 $y_k>0$，那么根据线性规划的对偶理论可知在最优生产计划中 G_k已用完。现在企业以每单位 P_k 的价格买进1单位的 G_k，b_k 变为 b_k+1，其他条件不变。那么在新的约束条件下可求得新的最优解，设为 $x_1',x_2',\cdots,x_n'$，（用加撇字母表示在新计划下相应的量，下同）。新的目标函数值设为S'，则

$$S'-S=y_k$$

由（4）有

$$\sum_{j=1}^{n}f_j'x_j'-\sum_{i=1}^{n}f_jx_j^*=y_k \qquad (5)$$

(i) 如果 G_k 是第一类资源，$k<r$ 则 $f_j'=f_j$，

$$S_1'=\sum_{i=1}^{n}f_j'x_j'-\left(\sum_{i=1}^{r}w_ib_i+p_k\right),$$

所以，新计划与原计划相比，利润增加量为

$$S_1'-S_1=\sum_{j=1}^{n}f_j'x_j'-\left(\sum_{i=1}^{r}w_ib_i+p_k\right)-\left[\sum_{j=1}^{n}f_jx_j^*-\sum_{i=1}^{r}w_ib_i\right]$$

$$=y_k-p_k \qquad (6)$$

由（6）式可知：当影子价格大于市场价格时购入1单位的资源扩大生产就可多得利润

$$\delta=y_k-p_k$$

如果购入 q 单位的资源扩大生产，通过类似的计算可知增加的利润为：

$$\delta=q(y_k-p_k) \qquad (7)$$

当资源影子价格小于市场价格时，$y_k-p_k<0$，可卖出资源，令 $q<0$ (7)式仍然成立。当然，（7）式的成立是有条件的，q 必须在一定范围内才可以。这个范围称为该资源影子价格的有效区间。有效区间可由最优表确定。具体方法如下：在最优表中影子价格所在列中先找出正元素，用这些正元素分别去除同行的常数列元素，取商中最小者加上负号即为 q 的下界限（有效区间左端点）；再找出负元素，用这些负元素的绝对值分别去除同行的常数列元素，在所得的商中取最小者即为 q 的上界限（有效区间右端点）。在上例中，精加工工时影子价格的有效区间是[－20，22.1]。类似地可求得贵金属影子价格的有效区间是[－42,30]，

综上所述，可得如下结论：

结论1．当第一类资源的影子价格高于该资源的市场价格时，在企业生产能力允许的条件下，可以购入该资源以扩大生产，反之当影子价格低于市场价格时可以卖出部份资源。当资源买卖数量不超出影子价格的有效区间时，企业所增加的利润的金额可由（7）式决定。

（ii） 现在看第二类资源的情况。设 G_k 是第二类资源（$k>r$），因为 $y_k>0$，故有 $\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j^*=b_k$，按假定，新计划用完 b_k+1 单位的资源 G_k，即

$$\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j'=b_k+1$$，于是

$$S_1=\sum_{j=1}^{n}g_jx_j^*-\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=r+1}^{m}w_ia_{ij}\right)x_j^*-\sum_{i=1}^{r}w_ib_i$$

$$S_1'=\sum_{j=1}^{n}g_jx_j'-\sum_{j=1}^{n}\left(\Sigma_1 w_ia_{ij}\right)x_j'-w_kb_k-p_k-\sum_{i=1}^{r}w_ib_i$$

其中，Σ_1 表示对 $r+1\leqslant i\leqslant m$，且 $i\neq k$ 的那些 i 取和。

所以 $$S_1'-S_1=y_k+w_k(b_k+1)-w_kb_k-p_k \qquad (8)$$

即 $$S_1'-S_1=y_k+w_k-p_k$$

由（8）式知，当 $y_k+w_k-p_k>0$，即 $y_k>p_k-w_k$ 时，购入1单位的资源扩大生产可增加利润 $y_k+w_k-p_k$（单位）

类似地，如购入 q 单位资源扩大生产，则增加的利润为

$$\delta=q(y_k+w_k-p_k)$$

（8）式中 q 的范围和（7）式中的 q 一样确定。例如，从表1（最优表）可以算出贵金属的影子价格的有效区间为[－42，30]。因此有：

结论2．当第二类资源的影子价格高于该资源的单位市场价格与原来该资源计入成本的单位价格之差（即$y_k>P_k-W_k$）时，在企业生产能力允许下，可购入该资源以扩大生产。反之，则可卖出部份资源。当资源买卖量不超过影子价格的有效区间时，企业增加的利润可由（8）式算出。

有了这两个结论就容易理解，上例中为什么对精加工工时和贵金属的影子价格应采用不同的应用方式。应当指出，资源的影子价格是与企业的整个生产结构密切相关的。一个资源，即使它在生产中的作用不变，本身的限制量也无变化当其它条件发生变化时，它的影子价格也可能发生变化。下面举例说明。

〔例2〕 在例1中，如果根据予测：产品A的销售量不超过30千件，因此产品A的产量也不应超过30千件，此时在其他约束条件不变下，应增添约束条件$X_1\leqslant 30$，引入松驰变量x_6成为

$$x_1+x_6=30$$

应用单纯形法求解得最优表如下：

基	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_2	10	0	1	0	0.25	0	−0.5
P_1	30	1	0	0	0	0	1
P_3	40	0	0	1	−1.75	0	2.5
P_5	10	0	0	0	−0.5	1	−2
Z_j-C_j	140	0	0	0	1.25	0	0.5

此时精加工工时的影子价格上升到1.25万元/千工时，但贵金属的影子价格却降为0。值得注意的是产量限制的影子价格等于0.5万元/千件，"限制"并不是"资源"，为什么也有影子价格呢？它有没有经济意义呢？我们认为，"限制"的影子价格就是对"限制"的评价，它就是把限制"放松"一单位可能产生的经济效益。本例中，产量限制的影子价格为0.5万元/千件，指的是如果能用某种方法使得A产品的销售量达到31千件，则盈利可能增加0.5万元。这也给我们提供了一个重要信息：如果使销售量增加1千件的话，那么应考虑推销费的增加不要超过5千元，否则就得不偿失。

结论1结论2都是对影子价格是正数的资源作出的。对于影子价格为0的资源，在最优生产计划中资源尚未用完，因此应考虑资源的可贮存性问题。第一类资源大多数是不可贮存的，例如，在一个生产周期中能够加工1000个零件的机床，如果这个周期只加工800个，那么剩余的加工能力200个是无法贮存下来转到下一周期去的，在下一个生产周期中机床的最大加工能力仍然是1000个而不是1200个。许多生产原料本来是可贮存的，但贮存有形资源是要花代价的，例如，提前支付资金的利息，仓库租金，物质的自然损耗等，我们把每单位第k资源（如果可贮存的话）从当前这一生产周期贮存到下一周期的费用记为d_k，把w_k-d_k称为该资源的单位"贮存价值"，当单位贮存价值为0（或为负数）时，我们也可以认为该资源是不可贮存的。对于不可贮存的资源，我们有：

结论3，设G_k是不可贮存的资源，且其影子价格 $y_k=0$，则：

（1）如果G_k是第一类资源，只要市场价格大于0，就可以卖出部分多余资源（不必缩减生产规模）使企业得利增加。

（2）如果G_k是第二类资源，则当市场价格$P_k > w_k - d_k$时，方可卖出。

（3）不论G_k是第一类资源还是第二类资源，也不论市价多么便宜，都不应买进资源。

结论3的（1），（2）是结论1和结论2的直接推论。（2）是很自然的，但（1）认为市价不必大于原价，只要大于0即可卖出，似乎与“常识”不符。实际上，这是由于多余的第一类资源的不可贮存性所决定的。例如在例2中，粗加工工时的影子价格为0，在最优计划中尚余40千工时，因为这种加工能力是不可贮存的，所以如果有外单位愿意用一定代价利用这些工时，那么，不管代价多么低，都会增加利润。由于这40千工时在原来最优生产计划中并未利用，卖出这40千工时的生产能力对最优计划毫无影响，原来的利润保持不变，出卖这些工时所得的利益是纯增加的收益。如果不让外单位利用这些生产能力，由于生产能力无法贮存到下一周期，等于白白浪费了。现在低价卖出恰恰是充分地利用这些资源。结论（3）对于第一类资源，可以认为是结论1的推论。但对于第二类资源，却不能看作是结论2的特例。因为结论2是在$y_k>0$的条件下作出的。这里$y_k=0$，当$P_k<w_k$时，$P_k-w_k<0$虽然满足$y_k>P_k-w_k$，却不应买入资源，因为由$y_k=0$知G_k尚未用完，在最优计划中起“瓶颈”作用的不是G_k，而是其他资源，现在购入G_k再多也无法扩大生产，而G_k又无法贮存到下一生产周期使用；购入G_k等等白白浪费了购买G_k的款目。例如，在例2中，如果规定工厂不得贮存贵金属到下一生产周期使用（或贮存费用非常高），那么，即使市场上有每克8元的贵金属，我们也不应买入，因为由于产量和精加工工时的限制，增加贵金属已无法使本生产周期的产量增加，贵金属又不允许贮存到下期使用，购入贵金属则白白地多耗资金。

对于可贮存的第二类资源，当影子价格为0时，虽然该资源已有富余，但可以贮存到下期使用。

参考文献

〔1〕 朱恩全，边际价格的数学解释及应用，管理现代化，1983、3。
〔2〕 吴艳鹏，影子价格在企业资金储备管理中的应用，财经科学．1985，5。
〔3〕 杨小凯，《经济控制论》，湖南人民出版社，1984，长沙。
〔4〕 《运筹学》，清华大学出版社，1982，北京。