基于直觉模糊集的多属性决策问题

黎 华,王周敬
(厦门大学 信息科学与技术学院,福建 厦门 361005)

摘要: 提出了一种基于直觉模糊集的多目标多属性决策问题的新记分函数,该记分函数从距离的角度选择最优方案,使最优方案接近最优理想方案,同时远离负理想方案. 并对已有的基于直觉模糊集的多目标模糊决策方法进行分析与联系,通过实例阐明了本文提出的新记分函数的有效性.

关键词: 多目标模糊决策;直觉模糊集;距离;记分函数
中图分类号: TP18 文献标识码: A 文章编号: 1007-855X(2008)06-0109-04

Multiattribute Decision Making Method Using Intuitionistic Fuzzy Sets

LI Hua, WANG Zhou-jing
(School of Information Science and Technology, Xiamen University, Xiamen, Fujian 361005, China)

Abstract: A new score function for handling multiattribute fuzzy decision making problems based on intuitionistic fuzzy sets is presented in this paper. This score function based on distance is given to select the best one, which is close to the ideal alternative and far away from the negative. Moreover, present methods connected with intuitionistic fuzzy sets are analyzed. It is proved by examples that this new score function is efficient.

Key words: multiattribute decision-making; intuitionistic fuzzy sets; distance; score function

0 引 言

1965年 Zadeh[1]提出的模糊集的理论已经被广泛应用于模糊决策问题之中. 为了更好地处理不精确性信息, Atanassov[2]于 1983年提出了直觉模糊集的概念,并对其运算和性质进行了研究[2-4]. 在一个直觉模糊集中,用一个真隶属函数 u_A 和一个假隶属函数 v_A 来描述其隶属度的边界,那么一个对象的支持度、反对度和未知度分别是 u_A, v_A 和 $1-u_A-v_A$,这就使得直觉模糊集在处理不确定性信息时比传统的模糊集有更强的表示能力以及更具灵活性. 1993年, W. L. Gau[5]等人提出了 Vague集的概念,但是 1996年, H. Bustince和 P. Burillo[6]指出 Vague集实质就是直觉模糊集. 1994年, Chen和 Tan[7]将 Vague集应用于模糊条件下的多目标决策问题,利用记分函数与加权记分函数给出决策. 2000年, Hong和 Choi[8]在 Chen的基础上提出了精确函数应用于多目标决策问题,国内学者李登峰[9-10]、徐则水[11]及林琳[12]对该类问题进行了大量的研究工作.

本文在以上的工作基础上,基于直觉模糊集定义本身的三维表示特殊形式及直观解释,提出一种新的记分函数解决基于直觉模糊集的多目标多属性决策问题. 该记分函数解决了 Chen的记分函数失效时所不能解决的决策问题.

1 直觉模糊集

1.1 直觉模糊集的定义

令 X 为论域. X 上的一个直觉模糊集 A 定义为: $A=\{<x, \mu_A(x), v_A(x)>| x\in X\}$.
其中 $u_A: X\to[0,1]$, $v_A: X\to[0,1]$, 且 $0\le u_A(x)+v_A(x)\le 1$, $\forall x\in X$.

收稿日期: 2008-9-11. 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (项目编号: 70772094).
第一作者简介: 黎华 (1981-), 女, 在读硕士研究生. 主要研究方向: 模糊决策理论. E-mail: lh_xmu@126.com

u_A表示元素 x对集合 A的隶属度, v_A表示非隶属度.

为了方便,称 $\alpha(u_\alpha, v_\alpha)$为直觉模糊数[13],其中 $u_\alpha \in [0,1]$, $v_\alpha \in [0,1]$,且 $u_\alpha + v_\alpha \le 1$. 称 $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - v_A(x)$为 x_j在 A上中的直觉指标(或称直觉指数),它表示 x_j属于与否的不确定程度. 直觉指标 $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - v_A(x)$越大,说明元素 x对集合 A的不确定幅度就越大.

1.2 *Hamming*距离的定义

设 $A = \{ < x_j, \mu_A(x_j), v_A(x_j) > | x_j \in X\}$和 $B = \{ < x_j, \mu_B(x_j), v_B(x_j) > | x_j \in X\}$两个直觉模糊集,则 A和 B的 Hamming距离[14]定义为:

$$D(A,B) = \sum_{j=1}^{n} (| u_A(x_j) - u_B(x_j) | + | v_A(x_j) - v_B(x_j) | + | \pi_A(x_j) - \pi_B(x_j) | / (2n) \tag{1}$$

这里, $\pi_A(x_j) = 1 - \mu_A(x_j) - v_A(x_j)$和 $\pi_B(x_j) = 1 - \mu_B(x_j) - v_B(x_j)$.

2 基于直觉模糊集的多目标决策方法

本段给出基于直觉模糊集的多目标多属性决策方法:记分函数法,精确函数法,同时给出新的记分函数进行分析和联系,阐明新记分函数的有效性.

2.1 记分函数法

设由 m个决策目标方案集 $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$,每个方案需要考虑 n个属性,记属性集为 $C = \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$,令 u_{ij}, v_{ij}分别表示方案 A_j关于属性 C_j的满意和不满意程度,且 $0 \le u_{ij}, v_{ij} \le 1$及 $u_{ij} + u_{ij} \le 1$,用投票模型解释为:赞成票所占比例数为 u_{A_i}. 反对票所占比例数为 v_{A_i},弃权票所占比例数为 $\pi_{A_i} = 1 - \mu_{A_i} - v_{A_i}$. 对属性 $C_1, C_2, \cdots, C_n$按其重要性进行赋权,设其权重分别是 $w_1, w_2, \cdots, w_n$,其中 $w_1, w_2, \cdots, w_n \in [0,1]$且 $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$. 可以用直观的决策矩阵表示:

$$R = \begin{bmatrix} (u_{11}, v_{11}) & (u_{12}, v_{12}) & \cdots & (u_{1n}, v_{1n}) \\ (u_{21}, v_{21}) & (u_{22}, v_{22}) & \cdots & (u_{2n}, v_{2n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (u_{m1}, v_{m1}) & (u_{m2}, v_{m2}) & \cdots & (u_{mn}, v_{mn}) \end{bmatrix}.$$

决策者要在 m个目标方案集中选出一个最优方案,在进行决策的过程中,为了表示出方案 A_i满足决策者属性要求的程度, Chen和 Tan提出了记分函数(Scorefunction) S:

$$S(A) = u_A - v_A \tag{2}$$

根据记分函数,方案 A_i满足属性 C_i要求的程度可由下列公式表示出来:

$$S(A_{ij}) = u_{ij} - v_{ij}, \text{其中 } S(u_{ij}, v_{ij}) \in [-1, 1]$$

则考虑属性的重要性,方案 A_i满足决策者要求的程度可由下列公式表示出来:

$$S(A_i) = S(A_{i1})w_1 + S(A_{i2})w_2 + \cdots + S(A_{in})w_n, \text{其中 } i = 1, 2, \cdots, m \tag{3}$$

并指出 $S(A_i)$越大,方案 A_i越满足决策者的要求. Hong和 Choi分析公式(2)的不足之后,追加精确函数 H:

$$H(A) = u_A + v_A \tag{4}$$

以表示直觉模糊集所反映出的隶属情况的精确度. 则方案 A_i满足决策者要求的精确度可由下列公式表示出来:

$$H(A_i) = H(A_{i1})w_1 + H(A_{i2})w_2 + \cdots + H(A_{in})w_n, \text{其中 } i = 1, 2, \cdots, m \tag{5}$$

决策规则为:先根据 $S(A_i)$的值进行选择,该值越大,则方案 A_i越满足决策者的要求;当 $S(A_i)$的值相同时,再根据函数 $H(A_i)$的值进行选择,该值越大,则方案 A_i越满足决策者的要求.

但是,在进行决策过程中不可能同时用 Chen记分函数和精确函数. 一般,选择用公式(2)得到每个方案满足属性的得分函数,用得分矩阵表示:

$$s(R) = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \cdots & s_{mn} \end{bmatrix}$$

对于决策目标方案 A_i 的得分函数是 $s(A_i) = s_{i1}w_1 + s_{i2}w_2 + \cdots + s_{in}w_n\ (i = 1, 2, \cdots, m)$,取 $s(A_k) = \max\{s(A_i)\}$,则方案 A_k 就是决策者的最佳选择. 如果在决策过程中,方案 A_i 和方案 $A_j\ (i \neq j)$ 对属性有: $s_{i1} = s_{j1}$; $s_{i2} = s_{j2}$, $\cdots$, $s_{in} = s_{jn}$,即得分矩阵两行或多行数值完全相同,此时 Chen的记分函数失效无法进行选择.

例 1　采用文献[11]中的厂商选择问题. 假设某供应商需要一批产品,现有三个可提供该产品的厂商 A_1, A_2, A_3,供应商从三个厂商中选择一个生产该产品. 选择的过程中需要考虑四个属性: (1) C_1:产品成本; (2) C_2:产品质量; (3) C_3:运输成本; (4) C_4:服务态度. 通过数据统计可以得到方案 A_i 关于属性 C_j 的满意程度 u_{ij} 及不满意程度 v_{ij},用直觉模糊决策矩阵表示:

$$((u_{ij}, v_{ij}))_{3\times4} = \begin{bmatrix} (0.5, 0.2) & (0.7, 0.2) & (0.5, 0.1) & (0.7, 0.1) \\ (0.4, 0.1) & (0.6, 0.1) & (0.4, 0) & (0.8, 0.2) \\ (0.6, 0.3) & (0.7, 0.2) & (0.7, 0.3) & (0.8, 0.2) \end{bmatrix}$$

现在供应商要选择一个厂商生产该产品,如何选择?根据公式(2)得到得分矩阵为:

$$(s_{ij})_{3\times4} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.5 & 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.5 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

考虑属性重要性设其权重分别为 w_1, w_2, w_3, w_4,其中 $w_1, w_2, w_3, w_4 \in [0, 1]$,且 $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1$,对于每个决策方案,根据公式(3)得:

$$S(A_1) = S(A_2) = S(A_3) = S(A_4) = 0.3w_1 + 0.5w_2 + 0.4w_3 + 0.6w_4$$

上述结果表明方案 A_1, A_2, A_3, A_4 满足决策者的程度相等,无法进行选择,此时,记分函数失效.

2.2 新记分函数的提出

针对 2.1中提出的 Chen记分函数解决基于直觉模糊集多目标多属性决策问题的失效,从距离的角度给出一个新的记分函数法去解决此类问题. 其基本思想是:首先给出最优理想解和负理想解,使决策者所希望的解离最优理想解越近,同时离负理想解越远.

满足决策目标要求的最优理想方案是决策目标方案 A_i 关于属性 C_i 的满足程度 $u_{ij} = 1$,同时有决策目标方案 A_i 关于属性 C_j 的不满意程度 $v_{ij} = 0$,用投票模型解释即所有人对该方案都赞成;而负理想解则相反,有 $u_{ij} = 0, v_{ij} = 1$,即表示所有人对该方案都反对. 给出决策目标方案集 $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 满足属性 $C = \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 的基于直觉模糊集的正理想目标 g^+ 和负理想 g^- 目标分别是:

$$g_i^+ = \{<C_1, u_{i1}, v_{i1}>), (<C_2, u_{i2}, v_{i2}>, \cdots, (<C_n, u_{in}, v_{in}>\} = \{<C_1, 1, 0>, <C_2, 1, 0>, \cdots, <C_n, 1, 0>\}$$

$$g_i^- = \{<C_1, u_{i1}, v_{i1}>), (<C_2, u_{i2}, v_{i2}>, \cdots, (<C_n, u_{in}, v_{in}>)\} = \{<C_1, 0, 1>, <C_2, 0, 1>, \cdots, <C_n, 0, 1>\}$$

其中, $i = 1, 2, \cdots, m$.

写成直觉模糊数形式如下:

$$g_i^+ = \{(u_{i1}, v_{i1}), (u_{i2}, v_{i2}), \cdots, (u_{in}, v_{in})\} = \{(1, 0), (1, 0), \cdots, (1, 0)\}$$

$$g_i^- = \{(u_{i1}, v_{i1}), (u_{i2}, v_{i2}), \cdots, (u_{in}, v_{in})\} = \{(0, 1), (0, 1), \cdots, (0, 1)\}$$

由直觉指标的定义知,此时的最优(负)理想目标的直觉指标 $\pi_{g_i^+} = \pi_{g_i^-} = 0$.

根据公式(1) Hamming距离的定义,决策目标方案 $A_i\ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 满足属性 $C_j\ (j = 1, 2, \cdots, n)$ 程度的直觉模糊数 (u_{ij}, v_{ij}) 与最优理想解和负理想解的距离 $D(A_i, g^+)$, $D(A_i, g^-)$ 如下:

$$D(A_{ij}, g^+) = \frac{|u_{ij} - 1| + |v_{ij} - 0| + |\pi(A_{ij}) - 0|}{2} = \frac{1 - u_{ij} + v_{ij} + 1 - u_{ij} - v_{ij}}{2} = 1 - u_{ij}$$

$$D(A_{ij}, g^-) = \frac{|u_{ij} - 0| + |v_{ij} - 1| + |\pi(A_{ij}) - 0|}{2} = \frac{u_{ij} + 1 - v_{ij} + 1 - u_{ij} - v_{ij}}{2} = 1 - v_{ij}$$

定义新的记分函数:

$$L(A_{ij}) = \frac{D(A_{ij}, g^-)}{D(A_{ij}, g^-) + D(A_{ij}, g^+)} = \frac{1 - v_{ij}}{2 - u_{ij} - v_{ij}} \tag{6}$$

如果对属性 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 按其重要性进行赋权,设其权重分别是 $w_1, w_2, \cdots, w_n$,其中 $w_1, w_2, \cdots, w_n \in [0, 1]$ 且 $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$.

对于决策目标方案 A_i 的新的记分函数是:

$$L(A_i) = L(A_{i1})w_1 + (L_{i2})w_2 + \cdots + (L_{in})w_n, \ (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{7}$$

取 $L(A_k) = \max\{L(A_i)\}$,则决策目标方案 A_k 就是决策者的最佳选择.

例 2 用新记分函数 $L(A)$ 解决例 1.

假设某供应商需要一批产品,现有三个可提供该产品的厂商 A_1, A_2, A_3,供应商从三个厂商中选择一个生产该产品. 选择的过程中需要考虑四个属性:(1) C_1:产品成本;(2) C_2:产品质量;(3) C_3:运输成本;(4) C_4:服务. 通过数据统计可以得到方案 A_i 关于属性 C_j 的满意程度 u_{ij} 及不满意程度 v_{ij},用直觉模糊决策矩阵表示:

$$((u_{ij}, v_{ij}))_{3\times4} = \begin{bmatrix} (0.5, 0.2) & (0.7, 0.2) & (0.5, 0.1) & (0.7, 0.1) \\ (0.4, 0.1) & (0.6, 0.1) & (0.4, 0) & (0.8, 0.2) \\ (0.6, 0.3) & (0.7, 0.2) & (0.7, 0.3) & (0.8, 0.2) \end{bmatrix}$$

用公式(6)新记分函数得记分矩阵为:

$$(L(A)_{ij})_{3\times4} = \begin{bmatrix} 0.615 & 0.727 & 0.643 & 0.75 \\ 0.6 & 0.692 & 0.625 & 0.8 \\ 0.636 & 0.727 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$

该矩阵没有出现例 1 中每行数据相同的情况,因此,决策者可以进行选择. 这里,我们假设属性重要性的权重向量为 $w = (0.3, 0.35, 0.15, 0.2)^T$,用公式(7)得:

$$L(A_1) = 0.685, L(A_2) = 0.676, L(A_3) = 0.710$$

由此我们可以得出结论,方案 A_3 是最佳方案. 解决了用 Chen 的记分函数无法解决的决策问题,说明了该记分函数的有效性.

3 结 语

本文对已有基于直觉模糊集的多目标多属性决策方法进行分析,指出了其存在的不足,然后根据直觉模糊集的三维隶属度本身特性,在 Hamming 距离的基础上提出了新的记分函数解决 Chen 记分函数失效时所不能解决的决策问题,该方法为解决基于多目标多属性决策问题提供了一条新的途径. 在用本文中新的记分函数进行决策时,如有很多数据都满足 $1 - u = k(1 - v)$ 时,还有待进一步研究. 因此,在对基于直觉模糊集进行多目标多属性决策时,决策者可以先对决策数据进行分析,根据数据自身的性质选择合适的记分函数.

参考文献:

[1] Zadeh L A. Fuzzy set[J]. Information and control, 1965, 8(3): 338 - 356.
[2] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and System, 1986, 20(1): 87 - 96.
[3] Atanassov K T. Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. Springer, Heidelberg, 1999.
[4] Atanassov K T. Two theorems for intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and System, 2000, 110(3): 267 - 269.
[5] Gau W L, Buehrer D J. Vague sets[J]. IEEE Trans System Man Cybernet, 1993, 23(2): 610 - 614.
[6] Bustince H, Burillo P. Vague sets are intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and System, 1996, 79(3): 403 - 405.
[7] Chen Shi - ming, Tan Jiann - mean. Handling multicriteria fuzzy decision - making problem based on vague set[J]. Fuzzy Sets and System, 1994, 67(2): 163 - 172.
[8] Hong Dug - hun, Choi Cang - hwan. Multicriteria fuzzy decision - making problem based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and System, 2000, 114(1): 103 - 113.
[9] 李登峰. 模糊多目标多人决策与对策[M]. 北京:国防工业出版社, 2002.

(下转第 124 页)

$$\geq\left\{\frac{\beta^{pq}p^{N/2}}{Bq}\right\}^{p}(t-\varepsilon_0)^{pq}e^{(\xi(\varepsilon_0)-\xi(t))\Delta}\exp\left[-\alpha p^2 q|x|^2/(1+4\alpha p(\xi(\varepsilon_0)-\xi(t))\right]$$

当 t充分大时,有 $B(t-\varepsilon_0)\geq[1+4\alpha pq(\xi(\varepsilon_0)-\xi(t)]^{\frac{1}{1-\sigma}}$,由上式可得

$$(t-\varepsilon_0)^{Np(1-\sigma)/2}e^{((\xi(\varepsilon_0)-\xi(t))\Delta}v^p(t,x)$$
$$\geq\left\{\frac{\beta^{pq}p^{N/2}}{B^{(\frac{N}{2}(1-\sigma)+1)q}}\right\}(t-\varepsilon_0)^{pq}e^{((\xi(\varepsilon_0)-\xi(t))\Delta}\exp\left[-\alpha p^2 q|x|^2/(1+4\alpha p(\xi(\varepsilon_0)-\xi(t))\right]$$

因为 $(q+1)/(pq-1)\geq\frac{N(1-\sigma)}{2}$得:

$$(t-\varepsilon_0)^{(q+1)p/(pq-1)}e^{(\xi(\varepsilon_0)-\xi(t))\Delta}v^p(t,0)\geq\left\{\frac{\beta^{pq}p^{N/2}}{qB^{(\frac{N}{2}(1-\sigma)+1)}}\right\}^{p}(t-\varepsilon_0)^{pq}$$

左边当 $t\to\infty$时发散,与引理 1矛盾.

参考文献:

[1] 彭大衡,韩茂安. 奇异半线性反应扩散方程组 Cauchy问题[J]. 数学年刊, 2004, 25(6): 735 - 744.

[2] ESCOBEDO M, HERRERO M A. Boundedness and blow up for a semilinear reaction-diffusion system[J]. J Diff Equa, 1991, 89(2): 176 - 202.

[3] 彭大衡,韩茂安,王志成. 具奇异系数反应扩散方程组 Cauchy问题[J]. 数学物理学报, 2005, 25A(2): 220 - 229.

[4] 蹇素雯,杨凤藻,林谦. 奇异半线性热方程初值问题解的存在性与 Blow-up问题[J]. 数学学报, 1998, 41(6): 1303 - 1314.

[5] 蹇素雯,杨凤藻. 一类奇异半线性热方程初值问题解的唯一性结果[J]. 数学学报, 2000, 43(2): 302 - 308.

(上接第 112页)

[10] Li Deng-feng. Multiattribute decision making models and methods using intuitionistic fuzzy sets[J]. Journal of Computer and System Sciences, 2005, 70(1): 73 - 85.

[11] Xu Ze-Shui. Multi-person multi-attribute decision making models under intuitionistic fuzzy environment[J]. Fuzzy Operational and Decision Making, 2007, 6(3): 221 - 236.

[12] Lin Lin, Yuan Xuehai, Xia Zunquan. Multicriteria fuzzy decision-making methods based on intuitionistic fuzzy sets[J]. Journal of Computer and System Sciences, 2007, 73: 84 - 88.

[13] Xu Ze-shui, Yager R R. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets[J]. International Journal of General Systems, 2006, 35: 417 - 433.

[14] Li Dengfeng. Some measures of dissimilarity in intuitionistic fuzzy structrues[J]. Journal of Computer and System Sciences 2004, 68: 115 - 122.

第 33卷终

The End of Vol 33