第 24 卷第 2 期 丽 水 师 范 专 科 学 校 学 报 2002 年 4 月
Vol. 24 No. 2 JOURNAL OF LISHUI TEACHERS COLLEGE Apr. 2002

浅谈几何图形在高等数学教学中的应用*

李锦堂

(厦门大学数学系,福建厦门,361005)

中图分类号: O177.1 文献标识码: A 文章编号: 1008 - 6749(2002)02 - 0061 - 02

高等数学是一门十分抽象的学科,尤其对于非数学专业的学生来说,它是一门难理解、难掌握的学科。如何在教学中帮助学生直观、形象地理解高等数学,是教师在教学中的一个难点和重点。几何图形是很直观、形象的,因而若在教学高等数学的过程中借助几何图形,有助学生对高等数学概念等的理解,可以帮助学生更好地掌握高等数学这门学科。

1 通过几何图形,能很好地体现数学中有关概念、定理等的内涵

要学好数学,首先必需理解和掌握概念、定理等的内涵,只有这样,才有可能应用概念、定理等这些数学知识去解决现实中的问题。而一般的概念、定理等是很抽象的,在教学过程中若能借助直观的教具,就有助于学生理解和掌握这些知识,而几何图形在教学中就扮演着这个角色。通过几何图形,能很好地体现数学中有关概念、定理等的内涵。以下这个例子就很好地说明了几何图形在高等数学教学中的这一作用。例如,罗尔定理的教学。

罗尔定理[1] 设函数 $f(x)$ 满足下列条件:

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a, b) 上可导;

(3) $f(a) = f(b)$;

则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 $c(a < c < b)$,使得

$f'(c) = 0$(即此点的切线与两端点的连线平行)。

几何意义:如图 1,对于两端点一样高 ($f(a) = f(b)$) 的光滑曲线不可能一直上升或下降,一般从始点 A 下降(或上升)到驻点 C 然后上升(或下降)到终点 B,从图中能直观地看出 C 点的切线平行于直线 AB。如果没有这一几何图形,学生就无法形象地理解罗尔定理的内涵,通过这一几何图形学生就能轻松地掌握罗尔定理的实质所在(如 C 点所在位置等)。

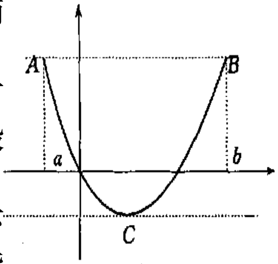

图 1

2 通过几何图形,能很好地体现数学中有关概念、定理之间的关系

数学是循序渐进的,概念、定理等知识之间存在着一种本质的联系。要学好数学,学生就必须了解并掌握这种联系。而这种联系不一定很直观地体现于概念、定理的叙述之中,因而如何在教学过程中让学生形象地了解这种联系是数学教学的一个重点。通过几何图形,能很直观地体现数学中有关概念、定理之间的关系。例如,罗尔定理和拉格朗日

* 收稿日期:2001 - 06 - 11
作者简介:李锦堂(1966 -),男,福建福安人,讲师,博士。

中值定理的关系。图 1 中的光滑曲线经过旋转变成图 2 中光滑曲线,在此变换过程中,能很直观地观察到罗尔定理中的条件、结论变化如下。

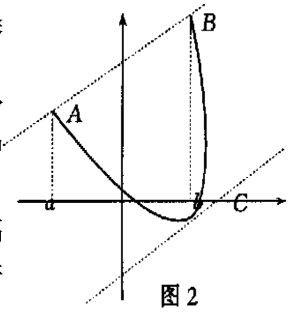

图 2

条件:曲线的光滑性不变(即罗尔定理中的条件(1)、(2)不变),而两端点不一定一样高(即罗尔定理中的条件(3)不作要求)。

结论:从几何意义来说,结论不变(即 C 点的切线与直线 AB 平行),用数学式子来表示就是:$f'(c) = (f(a) - f(b))/(a - b)$。

从上面的分析及图形所示,我们很自然地得到下面的拉格朗日定理。

拉格朗日定理　设函数 $f(x)$ 满足下列条件:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 上可导;

则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 $c(a < c < b)$,使得

$f'(c) = (f(a) - f(b))/(a - b)$。

这样通过几何图形的变化,很直观地体现了罗尔定理和拉格朗日中值定理的关系。

3　通过几何图形,能很好地帮助学生记住数学中有关概念、定理等

数学的概念、定理等知识的叙述是很抽象的,学生在记住数学这些知识过程中有一定的难度,因而怎么样帮助学生克服这个困难也是数学教学过程中的一个重点。若在教学中能很好地借用几何图形,就能很好地帮助学生记住这些概念、定理等。例如,函数单调性判别定理的教学。

函数单调性判别定理[2]　设函数 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,(1) 若在 (a,b) 内恒有 $f'(x) > 0$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加;(2) 若在 (a,b) 内恒有 $f'(x) < 0$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少。

在应用此定理判别函数单调性时,很多学生容易把增减性记反了,但若借助下面图 3,学生就容易记住此定理。$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加(或减少)$\Leftrightarrow$曲线上点的切线为单调增加(或减少)$\Leftrightarrow$切线的斜率为正(或负),即 $f'(x) > 0$(或 < 0)。

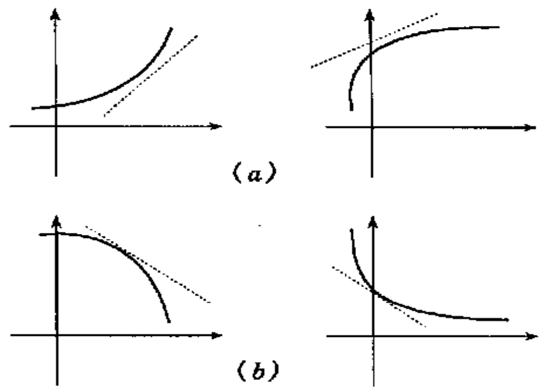

图3

4　通过几何图形,有利于找出解题的途径

学高等数学的目的就是应用数学的有关概念、定理等有关知识去解决实际题目。而在解数学题目时,有时若直接从已给的数学式子出发是无法解决的,但若借助几何图形,通过数学式子的变换,就能找到解题的方法。

例如,计算 $I = \int_0^1 [\int_x^1 e^{-y^2} \mathrm{d}y] \mathrm{d}x$

很显然,积分 $\int e^{-y^2} \mathrm{d}y$ 是无法直接计算的,但若知道 I 就是函数 $f(x,y) = e^{-y^2}$ 在由直线 $x = 0$、$y = 1$ 和 $y = x$ 所围成的区域 A 上的二重积分,则通过图 4,很直观地把 I 变形为 $I = \int_0^1 [\int_0^y e^{-y^2} \mathrm{d}x] \mathrm{d}y$,则就很容易计算出 I 的值。

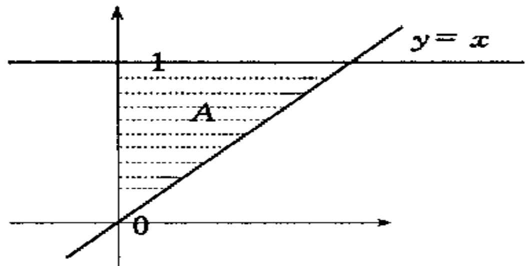

图 4

总之,几何图形是很形象的,通过几何图形能直观地充分体现高等数学中有关概念、定理等的具体含义,使高等数学的教与学变得更为形象生动,在教学中起到了化难为易、画龙点睛的作用。

参考文献

1　盛祥耀,居余马,等. 高等数学:上册[M]. 北京:高等教育出版社,1998. 176

2　厦门大学数学系高等数学编写组. 高等数学:上册[M]. 厦门:厦门大学出版社,1991. 132