Stancu - Kantorovich 算子的 L_M^* 逼近阶*

伍火熊
(湖南郴州师范高等专科学校数学系,湖南 郴州 423000)

摘 要:在 Orlicz 空间 L_M^* 中研究了 Stancu - Kantorovich 算子的有界性及其逼近问题,得到逼近阶的两种估计。

关键词:Stancu - Kantorovich 算子;Orlicz 空间;逼近

中图分类号:O174.41 **文献标识码**:A, **文章编号**:1005 - 1287(2000)03 - 0034 - 05

1 引言

有关 N 函数及 Orlicz 空间的概念见[1]。设 $M(u)$ 为 N 函数,$L_M^*[0,1]$ 为由 $M(u)$ 而成的 $[0,1]$ 上的 Orlicz 空间。

N 函数被称为满足 Δ_2 条件(简记作 $M(u)\in\Delta_2$)是指:

存在常数 $K,u_0>0$ 使 $u_0\geq_0$ 时,$M(2u)\leq KM(u)$。

由文[2]知 $M(u)\in\Delta_2$ 时,$L_M^*[0,1]$ 是可分的。

对于 $f(x)\in L_M^*[0,1]$ 和 $t>0$,我们定义 $f(x)$ 的 ∧阶,二阶积分光滑模分别为:

$$\omega_1(f,t)_M=\sup_{0\leq h\leq t}\|f(x+h)-f(x)\|_M,$$

$$\omega_2(f,t)_M=\sup_{0\leq h\leq t}\|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\|_M.$$

所谓 Stancu - Kantorovich 算子是指:

$$Kn.s(f,x)=\sum_{k=0}^{n}q_{n,k,s}(x)(n+1)\int_{I_k}f(u)\,du$$

其中 $x\in[0,1]$,$I_k=[\frac{k}{n+1},\frac{k+1}{n+1}]$,$0\leq s<\frac{n}{2}$ 是整数,

$$q_{n,k,s}(X)=\begin{cases}\binom{n-s}{k}x^k(1-x)^{n-s-k+1}, & 0\leq k<s;\\ \binom{n-s}{k}x^k(1-x)^{n-s-k+1}+\binom{n-s}{k-s}x^{k-s+1}(1-x)^{n-k}, & s\leq k\leq n-s;\\ \binom{n-s}{k}x^{k-s+1}(1+x)^{n-k}, & n-s<k\leq n.\end{cases}$$

当 $s=0$ 与 $s=1$ 时,便是熟知的 Bernstein - Kantorovich 算子,对于此特殊情形,盛在文[3]

* **收稿日期**:1999 - 11 - 03
作者简介:伍火熊(1964 -),男,湖南永兴人,硕士,副教授.

中讨论了它在 Orlicz 空间中的逼近问题,获得了有关逼近正定理与饱和性定理。本文讨论一般情形的 Stancu - Kantorovich 算子在 Orlicz 空间中的有界性及其逼近问题。为方便起见,文中的 $C(r,\cdots)$ 总代表仅与括号中字母有关的正常数且在不同处可表示不同的数值。

我们的主要结果是:

定理 1　对于 $f(x)\in L_M^*[0,1]$,算子 $K_{n,s}(f,x)$ 是正有界线性的,且有 $\|K_{n,s}\|_M\le 2$.

定理 2　设 $M(u)\in\Delta_2$,$f(x)\in L_M^*[0,1]$,则存在常数 $C>0$,使

i) $\|K_{n,s}(f)-f\|_M\le C\omega_1(f,\frac{1}{\sqrt{n}})_M$

ii) $\|K_{n,s}(f)-f\|_M\le C(\frac{1}{n}\|f\|_M+\omega_2(f,\frac{1}{\sqrt{n}})_M)$.

2　若干引理

引理 1[1]　对于任意 $a>0$,若

$$\int_I M(\frac{u(x)}{a})\mathrm{d}x\le C_1\int_{I_1} M(\frac{C_2 v(x)}{a})\mathrm{d}x$$

则　$\|U\|_{M(I)}\le\max\{C_1,1\}\cdot C_2\|v\|_{M(I_1)}$

引理 2[4]　设 r 为正整数,$f(x)$ 具有 r 阶导数,且 $f^{(r)}(x)\in L_M^*[0,1]$,则对 $i=0,1\cdots,r$ 有

$$\|f^{i}\|_M\le C(r)(\|f\|_M+\|f^{(r)}\|M)$$

引理 3　算子 $K_{n,s}(f,x)$ 具有如下性质:

i) $K_{n,s}(1,x)=1$;

ii) $K_{n,s}(t-x,x)=\frac{1}{2(n+1)}-\frac{x}{n+1}$;

iii) $K_{n,s}((t-x)^2,x)=\frac{1}{3(n+1)^2}+\frac{n+s^2-s+1}{(n+1)^2}x(1-x)$;

iv) $K_{n,s}(|t-x|,x)\le K_{n,s}\left((t-x)^2,x\right)^{\frac{1}{2}}$.

证明:注意到 $\sum_{k=0}^{n}q_{n,k,s}(x)=1$, i)、ii)、iii) 通过简单计算即得,此仅证 iv).

$$\begin{aligned}\because\ [K_{n,s}(|t-x|,x)]^2&=(\sum_{k=v}^{n}q_{n,k,s}(x)(n+1)\int_{I_k}|t-x|\mathrm{d}t)^2\\&=(\sum_{k=0}^{n}q_{n,k,s}(x)^{\frac{1}{2}}q_{n,k,s}(x)^{\frac{1}{2}}(n+1)\int_{I_k}|t-x|\mathrm{d}x)^2\\&\le\sum_{k=0}^{n}q_{n,k,s}(x)[(n+1)\int_{I_k}|t-x|\mathrm{d}t]^2\\&\le\sum_{k=0}^{n}q_{n,k,s}(x)(n+1)\int_{I_k}|t-x|^2\mathrm{d}t\\&=K_{n,s}(|t-x|^2,x).\end{aligned}$$

$$\therefore\ K_{n,s}(|t-x|,x)\le K_{n,s}((t-x)^2,x)^{\frac{1}{2}}.$$

引理 4[2] 可分的 Orlicz 空间具有(H.L.P) 性质,即对 $f(x) \in L_M^*[0,1]$,有 $\theta_f(x) \in L_M^*[0,1]$,且存在与 f 无关的常数 $C > 0$,使 $\|\theta_f(x)\|_M \le C\|f\|_M$,其中

$$\theta_f(x) = \sup_{\substack{0 \le t \le 1 \\ t \ne x}} \frac{1}{t-x}\int_x^t |f(u)|\,\mathrm{d}u$$

是 $f(x)$ 的 Hardy - Little Wood 极大函数.

引理 5 设 $M(u) \in \Delta_2$,令

$$L_M^1 = \{g(x) : g^1(x) \in L_M^*[0,1] \text{ 且 } g(x) \text{ 绝对连续}\}$$

$$L_M^2 = \{g(x) : g(x), g''(x) \in L_M^*[0,1] \text{ 且 } g'(x) \text{ 绝对连续}\}$$

则 i) 对于 $g(x) \in L_M^1$ 和充分大的 n,有

$$\|K_{n,s}(g) - g\|_M \le \frac{C}{\sqrt{n}}\|g'\|_M;$$

ii) 对于 $g(x) \in L_M^2$ 和充分大的 n,有

$$\|K_{n,s}(g) - g\|_M \le \frac{C}{n}(\|g\|_M + \|g''\|_M).$$

证 i). 由 Taylor 公式知,对 $t, x \in [0,1]$ 有 $g(t) - g(x) = \int_x^t g'(u)\,\mathrm{d}u$,且从引理 3 知,对充分大的 n 有 $K_{n,s}((t-x)^2, x) \le \frac{C}{n}$,于是

$$\begin{aligned}|K_{n,s}(g,x) - g(x)| &= \left|K_{n,s}\left(\int_x^t g'(u)\,\mathrm{d}u, x\right)\right| \\ &\le \theta_{g'}(x) K_{n,s}(|t-x|, x) \\ &\le \theta_{g'}(x)(K_{n,s}((t-x)^2, x))^{\frac{1}{2}} \\ &\le \frac{C}{\sqrt{n}}\theta_{g'}(x)\end{aligned}$$

其中 $\theta_{g'}(x) = \sup_{\substack{0 \le t \le 1 \\ t \ne x}} \frac{1}{t-x}\int_x^t |g'(u)|\,\mathrm{d}u$ 是 $g'(x)$ 的 Hardy - Little Wood 极大函数,因此,由引理 4 得

$$\|K_{n,s}(g) - g\|_M \le \frac{C}{\sqrt{n}}\|\theta_{g'}\|_M \le \frac{C}{\sqrt{n}}\|g'\|_M.$$

ii) 由 Taylor 公式知

$$g(t) - g(x) = g'(x)(t-x) + \int_x^t (t-u) g''(u)\,\mathrm{d}u$$

且规定 $x, t \notin [0,1]$ 时,$g''(x) = 0$,则

$$|K_{n,s}(g,x) - g(x)| \le |g'(x)| \cdot |K_{n,s}(t-x, x)| + \theta_{g''}(x) \cdot K_{n,s}((t-x)^2, x)$$

其中 $\theta_{g''}(x) = \sup_{\substack{0 \le t \le 1 \\ t \ne x}} \frac{1}{t-x}\int_x^t |g''(u)|\,\mathrm{d}u$.

由引理 3 知,对充分大的 n 有

$$|K_{n,s}(t-x, x)| \le \frac{C}{n}, K_{n,s}((t-x)^2, x) \le \frac{C}{n}$$

同 i) 且利用引理 2 得

$$\|K_{n,s}(g)-g\|_M\le\frac{c}{n}(\|g'\|_M+\|g''\|_M)$$

$$\le\frac{c}{n}(\|g\|_M+\|g''\|_M).$$

引理 6[5]　对于 $f(x)\in L_M^*[0,1]$,令

$$K_M^1(f,t)=\inf_{g\in L_M^1}(\|f-g\|_M+t\|g'\|_M)$$

$$K_M^2(f,t)=\inf_{g\in L_M^2}(\|f-g\|_M+t^2\|g''\|_M)$$

则存在常数 $C_1>0,C_2>0$ 使

$$C_1\omega_i(f,t)_M\le K_M^i(f,t)\le c_2\omega_i(f,t)_M,\ i=1,2,$$

3　定理的证明

定理 1 之证　$\forall\alpha>0$ 和 N 函数 $M(u)$,注意到 $\sum_{k=0}^{n}q_{n,k,s}(x)=1$,由凸函数的性质有

$$M\left(\frac{|K_{n,s}(f,x)|}{\alpha}\right)=M\left(\frac{\left|\sum_{k=0}^{n}q_{n,k,s}(x)(n+1)\int_{I_k}f(t)\,dt\right|}{\alpha}\right)$$

$$\le\sum_{k=0}^{n}q_{n,k,s}(x)M\left(\frac{(n+1)\int_{I_k}f(t)\,dt}{\alpha}\right)$$

$$\le\sum_{k=0}^{n}q_{n,k,s}(x)(n+1)\int_{I_k}M\left(\frac{|f(t)|}{\alpha}\right)dt$$

从而,利用 $\int_0^1q_{n,k,s}(x)\,dx\le\frac{1}{n-s+1}$ (见[6]),有

$$\int_0^1M\left(\frac{|K_{n,s}(f,x)|}{\alpha}\right)dx\le\int_0^1\sum_{k=0}^{n}q_{n,k,s}(x)(n+1)\int_{I_k}M\left(\frac{|f(t)|}{\alpha}\right)dt\,dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\int_0^1q_{n,k,s}(x)\,dx\,(n+1)\int_{I_k}M\left(\frac{|f(t)|}{\alpha}\right)dt$$

$$\le\sum_{k=0}^{n}\frac{n+1}{n-s+1}\int_{I_k}M\left(\frac{|f(t)|}{\alpha}\right)dt$$

$$=\frac{n+1}{n-s+1}\int_0^1M\left(\frac{|f(t)|}{\alpha}\right)dt$$

$$\le2\int_0^1M\left(\frac{|f(t)|}{\alpha}\right)dt\qquad\left(\because 0\le s<\frac{n}{2}\right)$$

故,由引理 1 得 $\|K_{n,s}(f,\cdot)\|_M\le2\|f\|_M$,即 $\|K_{n,s}\|_M\le2$.

至于 $K_{n,s}(f,x)$ 的正线性是显然的,定理 1 得证.

定理 2 之证　i) 对于 $f(x)\in L_M^*[0,1]$,及任意的 $g(x)\in L_M^1$,利用定理 1 与引理 5 i) 有

$$\|K_{n,s}(f)-f\|_M \le \|K_{n,s}(f-g)\|_M + \|K_{n,s}(g)-g\|_M + \|f-g\|_M$$
$$\le 3\|f-g\|_M + \frac{C}{\sqrt{n}}\|g'\|_M$$
$$\le C(\|f-g\|_M + \frac{1}{\sqrt{n}}\|g'\|_M$$

故,由引理 6 得

$$\|K_{n,s}(f)-f\|_M \le CK_M^1(f,\frac{1}{\sqrt{n}}) \le C\omega_1(f,\frac{1}{\sqrt{n}})_M.$$

ii) 对于 $f(x)\in L_M^*[0,1]$ 及任意的 $g(x)\in L_M^2$,利用定理 1,引理 5 ii) 和引理 6 得

$$\|K_{n.s}(f)-f\|_M \le \|K_{n.s}(f-g)\|_M + \|K_n(g)-g\|_M + \|f-g\|_M$$
$$\le 3\|f-g\|_M + \frac{c}{n}(\|g\|_M + \|g''\|_M)$$
$$\le \frac{c}{n}\|f\|_M + c\|f-g\|_M + \frac{1}{n}\|g''\|_M)$$
$$\le \frac{c}{n}\|f\|_M + CK_M^2(f,\frac{1}{\sqrt{n}})$$
$$\le c(\frac{1}{n}\|f\|_M + \omega_2(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\|_M).$$

定理 2 得证.

参考文献:

[1]吴从炘,王廷辅. 奥尔里奇空间及其应用[M]. 哈尔滨:黑龙江科技出版社,1983.
[2]谢敦礼. 连续正算子 L_M^* 逼近阶[J]. 杭州大学学报,1981,8(2):142 - 146.
[3]盛保怀. Bernstein - Kantorovich 多项式在 Orlicz 空间中的逼近[J]. 数学进展,1991,20(2):226 - 233.
[4]Ramazanov A R K. On Approximation by Polynomials and Rational Functions in Orlicz Spaces [J]. **Anal Math**,1984,10:117 - 131.
[5]Wu Garidi. On Approximation by Polynomials in Orlicz spaces [J]. **A T A**, 1991, 7(3):97 - 110.
[6]赵静辉. Stancu - Kantorovich 算子在 L^p 的饱和性[J]. 数学杂志,1988,8(3):257 - 262.

Degree of approximation by Stancu - Kantorovich operators in L_M^*

WU Huo - xiong
(Department of Mathematics, Chenzhou Teacher's College, Chenzhou 423000, China)

Abstract: The boundedness and the approximation problem of stancu - kantorovich Operators in Orlicz spaces are studied, and two estimation of degree of approximation are obtained.

Key words: Stancu - Kantorovich operator; orlicz spaces; approximation