第36卷 第6期 厦门大学学报(自然科学版) Vol. 36 No. 6
1997年11月 Journal of Xiamen University (Natural Science) Nov. 1997

·研究简报·

一个群论公式及其应用①

肖文俊
(厦门大学数学研究所 厦门 361005)

在以下的讨论中, 均假定 G 为一有限群, S 为 G 的一个生成集, $1\notin S$, $S=S^{-1}$.

现设 L 为群 G 的任一子群, $|G:L|=n$, 那么有如下公式

定理A $G=L(1\cup S)S^{n-2}$.

这一公式的证明相当简短, 然而它却是一个有用的公式, 我们将在本文里举出它对 Cayley 图的直径问题的一个应用, 希望看到它的进一步的应用. 本文中所用符号和术语如同文献[1].

1 定理A 的证明和一个推论

定理A 的证明 当 $n=1$, 时 $G=L$, 定理显然成立. 设 $n\geq 2$, 因为 $S=S^{-1}$, 所以有

$$L\subseteq L(1\cup S)\subseteq L(1\cup S)S\subseteq\cdots\subseteq L(1\cup S)S^m\subseteq\cdots$$

这里 m 为非负整数, $S^0=1$.

因为 G 为有限群, 故存在某一非负整数 l 使得 $L(1\cup S)S^l=L(1\cup S)S^{l+1}$, 从而有 $L(1\cup S)S^l=L(1\cup S)S^{l+r}$, 这里 r 为任一非负整数. 由于群 G 由 S 生成, 于是有 $G=L(1\cup S)S^l$. 下面将证明存在 $l\leq n-2\,(n\geq 2)$ 使上式成立.

实际上, 若 $L\underset{+}{\subset}L(1\cup S)\underset{+}{\subset}L(1\cup S)S\underset{+}{\subset}\cdots\underset{+}{\subset}L(1\cup S)S^{n-2}$, 那么 $L(1\cup S)$ 至少包含 L 的两个陪集, $L(1\cup S)S$ 至少包含 L 的三个陪集, 如此下去, 可知 $L(1\cup S)S^{n-2}$ 至少包含 L 的 n 个陪集, 于是有 $G=L(1\cup S)S^{n-2}$. 因此一定存在非负整数 $l\leq n-2$ 使得 $G=L(1\cup S)S^l$, 从而有 $G=L(1\cup S)S^{n-2}$, 定理A 获证.

推论1 设 $L=\langle S^2\rangle$, $h=|G|$, 那么有

1) 若 $S\not\subset L$, 则有 $G=L\cup Ls$, 这里 $L=S^{h-2}$, s 为 S 中的某个元;

2) 若 $S\subseteq L$, 则有 $G=L=S^{h-1}$.

证 1) 设 $S\not\subset L=\langle S^2\rangle$, 那么因为 G 由 S 生成, 所以对 G 中任一元 g, 有 $g=s_1\cdots s_a$, 这里 $s_1,\cdots,s_a\in S$. 如果 a 为偶数, 则有 $g\in L$, 否则有 $g=s_1\cdots s_a s^{-1}\cdot s\in Ls$, s 为 S 中的某个元. 因此有 $G=L\cup Ls$. 因为 $S\not\subset L=\langle S^2\rangle$, h 必为偶数, 从而有 $S^{h-2}\subseteq L$. 现由定理A, $G=(1\cup S)S^{h-2}$, 于是有 $L=S^{h-2}$, 这就证明了1).

2) 设 $S\subseteq L=\langle S^2\rangle$. 由定理A, $G=(1\cup S)S^{h-2}$, 因此存在 m 使得 $G=S^m$. 设 m 为最小正整数使得 $G=S^m$ 成立, 我们要证 $m\leq h-1$. 实际上, 有

① 本文1996-12-04收到; 国家和福建省自然科学基金资助项目

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$1 < |S| < |S^2| < \cdots < |S^m| \tag{1}$$

这是因为若 $|S^i| = |S^{i+1}|$, 这里 $i \leq m-1$, 那么有 $S^i s_1 = S^i s_2 = S^{i+1}$, 对任意的 $s_1, s_2 \in S$ 成立. 于是有 $S^i = S^{i+2}$. 这意味着 $S^i = S^{i+2b}$, b 为任一非负整数, 从而有 $G = S^i$, 这里 $i \leq m-1$, 与关于 m 的假设矛盾, 这就证明了不等式(1). 这说明 $|S^m| \geq m+1$, 从而得 $m \leq h-1$, $G = S^{h-1}$, 这就证明了 2). 推论1获证.

2　定理A 对Cayley 图的直径问题的一个应用

以下仍设 G 为一有限群, S 为 G 的一个生成集, $1 \notin S$, $S = S^{-1}$, G 关于 S 的Cayley 图 $C(G, S)$ 定义如下: $C(G, S)$ 有顶点集 G, 边集 $E = \{(g, gs) \mid g \in G, s \in S\}$. $C(G, S)$ 的直径定义为它的顶点间的最大距离. 群 G 的直径定义为对 G 的任何生成集 S, G 关于 S 的Cayley 图 $C(G, S)$ 的直径的最大者. Cayley 图的直径的决定是图论中的一个困难而基本的问题, 它对计算机互连网络有直接的应用[2].

在文献[2]里Babai 和 Seress 提出如下

猜想B　$\mathrm{diam}(A_n) < n^C$, 这里 C 为绝对常数, $\mathrm{diam}(A_n)$ 为交错群 A_n 的直径.

这一猜想被普遍认为是极其困难的问题, 我们证明了若 A_n 的某个生成元的变动的点的个数小于一绝对常数, 那么猜想B 成立. 设 α 为 A_n 的某一元, α 变动的点的个数称为 α 的度, 记之为 $\deg(\alpha)$. 以下仍假定 S 为 A_n 的任一生成集, $1 \in S$, $S = S^{-1}$, $\mathrm{diam}(A_n)$ 为 A_n 的直径, 其定义如前, 那么有

定理B　设 $\alpha \in S$, $\deg(\alpha) \leq k$, k 为一个绝对常数, 那么 $\mathrm{diam}(A_n) < n^C$, 这里 $C = 2k+1$.

证　不失一般性, 可设 α 变动的点集为 $\{1, 2, \cdots, k\}$, 那么 α 的阶 $|\alpha| \leq k!$. 设 L 为 A_n 里 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 的稳定子群, 那么由定理A, 有 $A_n = L(1 \cup S)S^{m-2}$, 这里 $m = n(n-1)\cdots(n-k+1)$. 由于 α 变动的点集为 $\{1, 2, \cdots, k\}$, 因此有 $[\alpha, L] = 1$. 由[3](P. 12, 习题2) 有 $A_n = \langle\alpha\rangle^{t_1}\langle\alpha\rangle^{t_2}\cdots\langle\alpha\rangle^{t_m}$ $(n \geq 5)$, 这里 $t_i \in (1 \cup S)S^{m-2}$ 为 L 在 A_n 里的陪集代表元 $(1 \leq i \leq m)$, 由于 $|\alpha| \leq k!$, 故有 $\langle\alpha\rangle \subseteq S^{k!}$, 从而有

$$A_n \subseteq (S^{k!})^m((1 \cup S)S^{m-2})^{2m} = (1 \cup S)S^{3n^{2k+1}}$$

因此有 $\mathrm{diam}(A_n) < n^C$, 这里 $C = 2k+1$. 对于 $n < 5$, 可直接验证结论成立, 定理B 证毕.

参　考　文　献

1　Huppert B, Blackburn N. *Finite Groups* III. Berlin: Springer-Verlag, 1982

2　Babai L, Seress A. On the diameter of permutation groups. *Europ. J. Combinatorics*, 1992, 13: 231～243

3　Huppert B. *Endliche Gruppen* I. Berlin: Springer-Verlag, 1967

A Formula of Group Theory and Its Applications

Xiao Wenjun

(*Inst. of Math., Xiamen Univ., Xiamen* 361005)

Abstract　The author proves a formula of group theory and gives its applications to the problem of diameter of some Cayley graphs.

Key words　Finite gruops, Diameter, Cayley graphs

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net