文章编号:1008 - 2042(2000) 04 - 0009 - 03

L^{ψ} 空间中的 Jackson 定理 *

伍火熊
(郴州师范高等专科学校数学系,湖南 郴州　423000)

摘　要:研究了 L^{ψ} 空间中的函数用多项式逼近的问题,证明了 Jackson 定理.

关键词:L^{ψ} 空间;多项式;逼近
中图法分类:O174.41　　**文献标识码**:A

1　引言与主要结果

L^{ψ} 空间是一个与 L_P 空间有关的新型函数空间,其定义如下:

定义[1]　设 (X,μ) 是一非负有限测度空间,$\psi(t)$ 是定义在 $[1,+\infty)$ 上取正值的函数,且使 $\int_1^{\infty}\psi(t)\,dt=1$,置

$$\|f\|_{\psi}=\int_1^{\infty}\psi(t)\|f\|_t\,dt,\ f\in\bigcap_{p\geq1}L_P(X).$$

则 $\|\cdot\|_{\psi}$ 满足范数公里. 定义

$$L^{\psi}(X)=\{f:f\in\bigcap_{p\geq1}L_P(X),\ \|f\|_{\psi}<+\infty\}.$$

由[1]知,$L^{\psi}(X)$ 是一个 Banach 空间.

设 $r\in N$(N 表示自然数集),$t>0$,对于 $f(x)\in L^{\psi}[a,b]\ (a<b)$,我们定义它的 r - 阶光滑模为:

$$\omega_r(f,t)_{\psi[a,b]}=\sup_{0\leq h\leq t}\|\triangle_t^h(f,x)\|_{\psi[a,b-rh]},$$

其中 $\triangle_t^h(f,x)=\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\binom{r}{i}f(x+ih)$.

为方便起见,我们用 $C(r,a,b,\cdots)$ 表示仅与括号中字母有关的正常数,且在不同处其值可不相同. 令 $I=[-1,1]$,$L^{\psi}[-1,1]=L^{\psi}(I)$. 本文的主要结果为:

定理　设 $r\in N$,$f(x)\in L^{\psi}[-1,1]$,则存在次数不超过 n 的代数多项式 $P_n(x)\ (n\geq r)$,使得

$$\|f-P_n\|_{\psi(I)}\leq C(r)\omega_r(f,\frac{1}{n})_{\psi(I)}.$$

2　定理的证明

我们先来介绍两个引理. 设 $r\in N$,令

$$L^{\psi}(X)=\{f(x):f^{(r-1)}(x)\text{绝对连续},f^{(r)}(x)\in L^{\psi}(X)\}$$

由[2]知,我们有如下引理:

引理 1[2]　令 $X=[a,b]\ (a<b)$,$f(x)\in L^{\psi}(X)$,则 $\forall t>0$,存在 $g(x)\in L^{\psi,r}(X)$,使

$\|f-g\|_{\psi}\leq C(r,a,b)\omega_r(f,t)_{\psi}$;$t^r\|g^{(r)}\|_{\psi}\leq C(r,a,b)\omega_r(f,t)_{\psi}$.

引理 2[4]　设 $[a,b]\subset[c,d]$,$1\leq p<\infty$,$r\in N$,$f(x)\in L_p[a,b]$,则 $f(x)$ 可从 $[a,b]$ 光滑延拓到

收稿日期:2000 - 04 - 24
作者简介:伍火熊(1964 -),男,湖南永兴人,郴州师范高等专科学校数学系副教授。
*　湖南省高校青年骨干教师科研基金资助。

$[c,d]$.

若记 $f_o(x)$ 表示 $f(x)$ 的延拓函数,则 $f_o \in L_P[c,d]$,且 $\|f_o\|_{p[c,d]} \le C(r,a,b,c,d)\|f\|_{p[a,b]}$.

若 $f^{(r)}(x) \in L_P[a,b]$,则 $f_o^{(r)}(x) \in L_P[c,d]$,且对于 $i=1,\cdots,r$ 有

$$\|f_o^{(i)}\|_{P[c,d]} \le C(r,a,b,c,d)\|f^{(i)}\|_{P[c,d]}.$$

定理的证明: 设 $\mu_n(t)$ 是一个次数不超过 n 的代数多项式 $(n=1,2,\cdots)$,且满足:

$$\mu_n(t) \ge 0,\ -\infty < t < \infty,\ \int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}}\mu_n(t)\,dt = 1,\ \int_{-3}^{3}(t)^r\mu_n(t)\,dt \le \frac{C(r)}{n^r}.$$

这样的 $\mu_n(t)$ 是存在的(参见[3]).

令 $f_o(x)$ 为 $f(x)$ 从 I 到 $[-4,4]$ 上的延拓函数,且满足引理 2. 对 $x \in I$,置

$$\Phi_n(f,x) = \int_{-2}^{2} f_o(t)\sum_{K=1}^{r}(-1)^{k+1}\binom{r}{k}\mu_n\left(\frac{t-x}{k}\frac{dt}{k}\right) = A(f,x) + B(f,x),$$

其中

$$A(f,x) = \sum_{K=1}^{r}(-1)^{k+1}\binom{r}{k}\int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}} f_o(x+kt)\mu_n(t)\,dt,$$

$$B(f,x) = \sum_{K=1}^{r}(-1)^{k+1}\binom{r}{k}\int_{E_{k,x}} f_o(x+kt)\mu_n(t)\,dt,$$

$$E_{K,X} = \left[\frac{-2-x}{k},\frac{2-x}{k}\right]\setminus\left(-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right).$$

易知 $A(\cdot)$ 是线性算子,且由引理 2,我们有

$$\|A(f,x)\|_{\psi(I)} \le \sum_{K=1}^{r}\left\|(-1)^{k+1}\binom{r}{k}\int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}} f_o(x+kt)\mu_n(t)\,dt\right\|_{\psi(I)}$$
$$= \sum_{K=1}^{r}\left\|\binom{r}{k}\right\|\int_1^{\infty}\left\|\int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}} f_o(x+kt)\mu_n(t)\,dt\right\|_s\psi(s)\,ds.$$

而 $$\left\|\int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}} f_o(x+kt)\mu_n(t)\,dt\right\|_{S(I)} = \left(\int_{-1}^{1}\left|\int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}} f_o(x+kt)\mu_n(t)\,dt\right|^S dx\right)^{\frac{1}{S}}$$
$$= \int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}}\left(\int_{-1}^{1}|f_o(x+kt)\mu_n(t)|^s dx\right)^{\frac{1}{s}} dt$$
$$= \int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}}\left(\int_{-4}^{4}|f_o(x)|^s dx\right)^{\frac{1}{s}}\mu_n(t)\,dt$$
$$= \|f_o\|_{S[-4,4]} \le C(r)\|f\|_{s(I)}.$$

于是 $$\|A(f,x)\|_{\psi} \le \sum_{k=1}^{r}\binom{r}{k}\cdot C(r)\int_1^{\infty}\|f\|_{s(I)}\psi(s)\,ds \le C(r)\|f\|_{\psi}.$$

由此推得 $$\|A\| \le C(r). \tag{2.1}$$

设 $g(x)$ 是引理 1 中,对于 $t=\frac{1}{n}$ 时所对应的 $L^{\psi,r}(I)$ 中的函数,置

$$G(x) = g(0) + g'(0)x + \cdots + \frac{g^{r-1}(0)}{(r-1)!}x^{r-1}$$

利用带 Cauchy 余项的 Taylor 公式,容易推得

$$\|g-G\|_{\psi} \le 2^r\|g^{(r)}\|_{\psi} \tag{2.2}$$

对于 $n \ge r$,我们定义次数不超过 n 的代数多项式: $L_n(f,x) = \Phi_n(f-G,x) + G(X)$

令 $g_o(x)$ 表示 $g(x)$ 从 I 到 $[-4,4]$ 的光滑延拓,且满足引理 2,则

$$\|f(\cdot) - L_n(f,\cdot)\|_{\psi(I)} \le \|(f-G) - A(f-G)\|_{\psi(I)} + \|B(f-G)\|_{\psi(I)}$$
$$\le (1+\|A\|)\|f-g\|_{\psi(I)} + \|g-G-A(g-G)\|_{\psi(I)} + \|B(f-G)\|_{\psi(I)}. \tag{2.3}$$

$$\|(g-G)-A(g-G)\|_{\psi} = \|(g_o-G)-A(g_o-G)\|_{\psi(I)}$$
$$= \left\|(g_o-G) - \int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}}\left[(-1)^{r+1}\triangle_t^r(g_o-G,\cdot) + (g_o-G)\right]\mu_n(t)\,dt\right\|_{\psi(I)}$$
$$= \left\|\int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}}\triangle_t^r(g_o-G,\cdot)\mu_n(t)\,dt\right\|_{\psi(I)}$$
$$= \left\|\int_1^{\infty}\right\|\int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}}\triangle_t^r(g_o-G,\cdot)\mu_n(t)\,dt\Big\|_S\psi(S)\,ds.$$

而 $$\left\|\int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}}\triangle_t^r(g_o-G,\cdot)\mu_n(t)\,dt\right\|_S = \left(\int_{-1}^{1}\left|\int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}}\triangle_t^r(g_o-G,x)\mu_n(t)\,dt\right\|^S dx\right)^{\frac{1}{S}}$$

$$\leq \int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}} \left(\int_{-1}^{1} | \triangle_t^r (g_o - G, x) \mu_n(t)\, dx \right)^{\frac{1}{s}} dt$$
$$\leq \int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}} |t|^r \| g_o^{(r)} - G^{(r)} \|_{S[-4,4]} \mu_u(t)\, dt$$
$$\leq \frac{c(r)}{n^r} \| g^{(r)} \|_{S(I)} .$$

这里用到了 [4, P54] 中表达式 (2.109) 和 $G^{(r)}(x) = 0$.

由上得 $\| (g - G) - A(g - G) \|_{\psi(I)} \leq \int_1^{\infty} \frac{c(r)}{n^r} \| g^{(r)} \|_{s(I)} \psi(s)\, ds = \frac{c(r)}{n^r} \| g^{(r)} \|_{\psi(I)}$.

(2.4)

此外, 对于 $x \in I$, 有 $E_{K,X} \subset E_K = \{ t : \frac{1}{r} \leq |t| \leq \frac{3}{K} \} \subset E_1 \ (1 \leq k \leq r)$,

因此 $\| \int_{E_{K,X}} [f_o(x + kt) - G(x + kt)] \mu_n(t)\, dt \|_{s(I)}$

$$= \left(\int_{-1}^{1} \left| \int_{E_{K,X}} [f_o(x + kt) - G(x + kt)] \mu_n(t)\, dt \right|^S dx \right)^{\frac{1}{S}}$$
$$\leq \int_{E_{K,X}} \left(\int_{-1}^{1} | [f_o(x + kt) - G(x + kt)] \mu_n(t) |^S dx \right)^{\frac{1}{S}} dt$$
$$\leq \| f_o - G \|_{S[-4,4]} \int_{E_1} \mu_n(t)\, dt$$
$$\leq C(r) \| f - G \|_{s(I)} \int_{E_1} r^r |t|^r \mu_n(t)\, dt$$
$$\leq \frac{C(r)}{n^r} \| f - G \|_{s(I)} .$$

从而 $$\| B(f - G) \|_{\psi(I)} \leq \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} \left\| \int_{E_{k,x}} [f_o(x + kt) - G(x + kt)] \mu_n(t)\, dt \right\|_{\psi(I)}$$
$$= \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} \int_1^{\infty} \left\| \int_{E_{k,x}} [f_o(x + kt) - G(x + kt)] \mu_n(t)\, dt \right\|_S \psi(I)\, ds$$
$$\leq \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} \cdot \frac{C(r)}{n^r} \int_1^{\infty} \| f - G \|_{S(I)} \psi(S)\, ds$$
$$= \frac{C(r)}{n^r} \| f - G \|_{\psi(I)} \leq \frac{C(r)}{n^r} \left(\| f - g \|_{\psi(I)} + 2^r \| g^{(r)} \|_{\psi(I)} \right). \quad (2.5)$$

在上述推证中, 用到了 (2.2) 式.

利用引理 1, (2.1), (2.3), (2.4) 和 (2.5), 我们有 $\| f(\cdot) - Ln(f, \cdot) \|_{\psi(I)}$

$$\leq (1 + C(r)) \| f - g \|_{\psi(I)} + \frac{c(r)}{n^r} \| g^{(r)} \|_{\psi(I)} + \frac{c(r)}{n^r} \left(\| f - g \|_{\psi(I)} + 2^r \| g^{(r)} \|_{\psi(I)} \right)$$
$$\leq C(r) \left(\| f - g \|_{\psi(I)} + \frac{1}{n^r} \| g^{(r)} \|_{\psi(I)} \right) \leq C(r) \omega_r \left(f, \frac{1}{n}\right)_{\psi(I)} .$$

定理得证. □

参考文献:

[1] 邱曙熙. 与 L^P 空间相关的 Banach 空间 L^{ψ}. 厦门大学学报(自科版), 1995, 34(4): 483 - 487.

[2] 伍火熊. L^{ψ} 空间的光滑模与 K- 泛函的等价性. 赣南师范学院学报(自科版), 1997, 34(2): 22 - 23.

[3] DeVore, R. A. Degree of Approximation, In "Approximation Theory Ⅱ", New York: Acad. press, 1976: 117 - 161.

[4] Schumaker, L. L. Spline functions: Basic Theory, New York: Wiley - Interscience publication, 1981: 12 - 69.

The Jackson Theorem in L^{ψ} Spaces

WU Huo-xiong

(Department of Mathematics, Chenzhou Teachers College, Chenzhou 423000, China)

Abstract: In this paper, the approximation problem of functions by polynomials in L^{ψ} spaces is studied and the Jackson theorem is proved.

Key words: L^{ψ} space; polynomial, ; approximation