具非线性源的多孔介质方程解的Blow-up时间对初值的相依性

梁之磊, 赵俊宁
(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 考虑多孔介质方程的Dirichlet问题, 讨论在解的Blow-up时间T有限的情况下, 当初值出现一个小的扰动函数$h(x)$时, 相应方程的Blow-up时间T_h随之发生的变化情况, 证明了Blow-up时间$|T-T_h|$和$\|h\|_{L^1(\Omega)}$之间连续相依性的结果, 其中$Q_T=\Omega\times(0,T)$, $0\leqslant u_0(x)\in L^\infty(\Omega)$, $h(x)\in L^\infty(\Omega)$, $\Omega\subset R^N$是一有界区域, 其中对指标m, p的限制满足$1<m<p$.

关键词: 多孔介质方程; Blow-up解; Blow-up时间; 强非线性源
中图分类号: O 174　　文献标识码: A　　文章编号: 0438-0479(2006)06-0746-03

1 引言及定理的叙述

我们考虑下面的拟线形抛物方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m + u^p, (x,t)\in Q_T \\ u(x,t) = 0, (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), x\in\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中$1<m<p$, $Q_T=\Omega\times(0,T)$, $u_0(x)\geqslant 0$, $u_0(x)\in L^\infty(\Omega)$; $\Omega\in R^N$是一有界区域. T为Blow-up时间; 问题(1)被称为多孔介质方程, 是描述流体通过多孔介质的数学模型[1]. 大家熟悉的结果是问题(1)的解可能出现Blow-up现象; 即在u_0和p的一些适定假设下问题式(1)仅存在局部解, 并且有下面的估计[2]:

$$(p-1)^{-\frac{1}{p-1}}(T-t)^{-\frac{1}{p-1}} \leqslant \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_0(T-t)^{-\frac{1}{p-1}} \tag{2}$$

此外在一定条件下还可以证明:

$$C_1(T-t)^{-\frac{1}{p-1}} \leqslant \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant C_2(T-t)^{-\frac{1}{p-1}} \tag{3}$$

本文将在式(2)和式(3)的条件下讨论当初值$u_0(x)$有一个小的扰动$h(x)$时问题式(1)的解Blow-up时间随之变化的情况; 首先给出问题式(1)的解的定义如下:

定义　函数$u\in L^\infty(Q_T)\cap C^\alpha(Q_T)$, $(0<\alpha<1)$称为(1)的一个弱解, 如果对$\forall\varphi\in C^{2,1}(\overline{Q}_t)$, $\varphi|_{\partial\Omega\times(0,t)}=0$函数$u$满足:

$$\int_\Omega u(x,t)\varphi(x,t)\mathrm{d}x - \int_0^t\int_\Omega(u\varphi_s + u^m\Delta\varphi + u^p\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}s = \int_\Omega u_0\varphi(x,0)\mathrm{d}x \tag{4}$$

设扰动函数$h(x)\in L^\infty(\Omega)$; 满足条件$h(x)+u_0(x)\geqslant 0$, 考虑问题(1)的扰动问题:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m + u^p, (x,t)\in Q_T \\ u(x,t) = 0, (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T) \\ u(x,0) = u_0(x)+h(x), x\in\Omega \end{cases} \tag{5}$$

当函数$h(x)$充分小时问题(5)的解u_h会出现与问题式(1)类似的Blow-up现象, 不妨记它的Blow-up时间为T_h, 那么解u_h同样满足下面的估计式(只需当$\|h\|_\infty$充分小时);

$$(p-1)^{-\frac{1}{p-1}}(T_h-t)^{-\frac{1}{p-1}} \leqslant \|u_h(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_0(T_h-t)^{-\frac{1}{p-1}} \tag{6}$$

$$C_1(T_h-t)^{-\frac{1}{p-1}} \leqslant \|u_h(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant C_2(T_h-t)^{-\frac{1}{p-1}} \tag{7}$$

本文得到如下结果:

定理　设T和T_h分别是(1)和(5)解的Blow-up时间, 并且有估计式(2), (3)和式(6), (7); 那么当$\|h\|_\infty$充分小时, 存在常数$C=C(u_0,c_0,c_1,c_2)>0$使得:

$$|T_h-T| \leqslant C\|h\|_{L^1(\Omega)}^{\delta},$$

其中$\delta=(pC_0^{p-1}-\dfrac{1}{p-1})^{-1}$

注1　当$m=1$时, 类似的问题在文献[3, 4]中已经被讨论过. 证明了$|T_h-T|\leqslant C\|h\|_{L^\infty(\Omega)}$时$\ln\|h\|_{L^\infty(\Omega)}$时$^{\frac{N+2}{2+\varepsilon}}$的结果, 然而对$m>1$的情况, 由于所讨论的问题没有古典解, 解对初值的连续依赖性只

收稿日期: 2006-02-24
作者简介: 梁之磊(1979-), 男, 硕士研究生.

有在较弱的意义下成立. 因此本文定理的结果与 $m=1$ 的情况有明显不同.

注 2　前面的估计式(3) 和(7) 将在另一篇文章中给出证明.

2　定理的证明

证明的思路如下: 对问题式(1) 和问题式(2) 的解 u 和 u_h, 要得到估计式 $\|u(\cdot,t)-u_h(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)}\leqslant\|h\|_{L^1(\Omega)}\left(\frac{T}{T-t}\right)^{pC_0^{p-1}}$, (对 $\forall t\in(0,\min\{T_h,T\})$) 随后能找到一个合适的 $t_0\in(0,\min\{T_h,T\})$ 来建立 $|T-t_0|$ 和 $|T_h-t_0|$ 与 $\|h\|_{L^1(\Omega)}$ 之间的关系, 最后利用三角不等式来得到定理的结论.

为简便记, 令函数 $v(x,t)=u(x,t)-u_h(x,t)$, 则由定义(4), 在区域 Q_t 上的函数 v 满足:

$$\int_\Omega v(x,t)\varphi(x,t)\,dx-\int_0^t\int_\Omega v(\varphi_s+A\Delta\varphi+B\varphi)\,dx\,ds=-\int_\Omega h(x)\varphi(x,0)\,dx \tag{8}$$

其中:

$$A=m\int_0^1(su+(1-s)u_h)^{m-1}ds,$$

$$B=p\int_0^1(su+(1-s)u_h)^{p-1}ds.$$

对任意给定的 $\eta>0$ 选取 $A_\varepsilon\in C^\infty(Q_t)$, $A_\varepsilon\geqslant0$, 且满足:

$$\iint_{Q_t}(A_\varepsilon-A)^2\,dx\,dt\leqslant\eta^3 \tag{9}$$

考虑倒向问题:

$$\begin{cases}\varphi_s+(\eta+A_\varepsilon)\Delta\varphi=0,(x,s)\in Q_t\\ \varphi(x,s)=0,(x,s)\in\partial\Omega\times(0,t)\\ \varphi(x,t)=\chi(x),x\in\Omega\end{cases} \tag{10}$$

其中 $\chi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, $|\chi(x)|\leqslant1$; 根据抛物理论[5], 问题(10) 存在解 $\varphi\in C^{2,1}(Q_t)$ 且满足:

$$|\varphi(x,s)|\leqslant1,\quad(x,s)\in Q_t \tag{11}$$

用 $\Delta\varphi$ 乘式(10) 中第一式, 在 Q_t 上积分, 利用分部积分得:

$$2\int_0^t\int_\Omega(\eta+A_\varepsilon)(\Delta\varphi)^2\,dx\,ds=-2\int_0^t\int_\Omega\varphi_s\Delta\varphi\,dx\,ds=\int_0^t\int_\Omega(|\nabla\varphi|^2)_s\,dx\,ds=-\int_\Omega|\nabla\varphi(x,0)|^2dx+\int_\Omega|\nabla\varphi(x,t)|^2dx \tag{12}$$

结合式(10) 中第 3 式和上面式(12) 的结论, 得:

$$2\int_0^t\int_\Omega(\eta+A_\varepsilon)(\Delta\varphi)^2\,dx\,ds+\int_\Omega|\nabla\varphi(x,0)|^2dx=\int_\Omega|\nabla\chi(x)|^2dx \tag{13}$$

由此得到:

$$2\int_0^t\int_\Omega(\eta+A_\varepsilon)(\Delta\varphi)^2\,dx\,ds\leqslant M_1,$$

$$\int_0^t\int_\Omega((\Delta\varphi)^2\,dx\,ds\leqslant M_1\eta^{-1} \tag{14}$$

其中 M_1 是与 ε 无关的常数.

将式(10) 的解 φ 代入式(8) 得到:

$$\int_\Omega v(x,t)\chi(x)\,dx-\int_0^t\int_\Omega v((A-A_\varepsilon)\Delta\varphi-\eta\Delta\varphi+B\varphi)\,dx\,ds=-\int_\Omega h(x)\varphi(x,0)\,dx \tag{15}$$

利用不等式(14) 的结果及函数 v 的有界性, 有:

$$\left|\int_0^t\int_\Omega v(A-A_\varepsilon)\Delta\varphi\,dx\,ds\right|\leqslant M_2\left(\int_0^t\int_\Omega(A-A_\varepsilon)^2dx\,ds\right)^{1/2}\times\left(\int_0^t\int_\Omega(\Delta\varphi)^2dx\,ds\right)^{1/2}\leqslant M_2\eta \tag{16}$$

$$\left|\int_0^t\int_\Omega v\eta\Delta\varphi\,dx\,ds\right|\leqslant M_2((\eta t|\Omega|)^2)^{1/2}\left(\int_0^t\int_\Omega(\Delta\varphi)^2dx\,ds\right)^{1/2}\leqslant M_2M_1\eta^{1/2} \tag{17}$$

结合式(15), (16) 和(17), 令 $\eta\to0+$, 得:

$$\int_\Omega v(x,t)\chi(x)\,dx\leqslant\|B\|_\infty\int_0^t\int_\Omega|v|\,dx\,ds+\int_\Omega|h(x)|\,dx \tag{18}$$

在式(18) 中选取 $\chi(x)=\operatorname{sign}v(x,t)$ (可以通过逼近的方法得到), 那么:

$$\int_\Omega|v(x,t)|\,dx\leqslant\|B\|_\infty\int_0^t\int_\Omega|v|\,dx\,ds+\int_\Omega|h(x)|\,dx.$$

利用 Gronwall 不等式:

$$\int_\Omega|v(x,t)|\,dx\leqslant\|h\|_{L^1(\Omega)}e^{\int_0^t\|B\|_\infty ds} \tag{19}$$

根据式(2) 和式(6) (这里不妨令 $T\leqslant T_h$), 进一步计算函数 $B(x,s)$ 后得到:

$$B(x,s)=p\int_0^1(su+(1-s)u_h)^{p-1}ds\leqslant p\int_0^1\left(sC_0(T-t)^{\frac{-1}{p-1}}+(1-s)C_0(T_h-t)^{\frac{-1}{p-1}}\right)^{p-1}ds\leqslant p\int_0^1\left(sC_0(T-t)^{\frac{-1}{p-1}}+(1-s)C_0(T-t)^{\frac{-1}{p-1}}\right)^{p-1}ds\leqslant pC_0^{p-1}(T-t)^{-1} \tag{20}$$

利用上面式(20) 的结果, 不等式(19) 可改写为:

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)}\leqslant\|h\|_{L^1(\Omega)}\left(\frac{T}{T-t}\right)^{pC_0^{p-1}} \tag{21}$$

对任意的 $t\in(0,T)$ 都成立; 令时间 $t_0\in(0,T)$, (当 $\|h\|_{L^1(\Omega)}$ 充分小时, 一定可以找到这样一个时刻 t_0),

使得下面不等式:

$$\|h\|_{L^1(\Omega)}\left(\frac{T}{T-t}\right)^{pC_0^{p-1}} \leqslant \frac{C_1}{2}(T-t)^{\frac{-1}{p-1}} \tag{22}$$

对任意的 $t \in [0, t_0]$ 都成立; 并且在 t_0 这一时刻满足:

$$(T-t_0)^{pC_0^{p-1}} \sim \frac{2}{C_1}T^{pC_0^{p-1}}\|h\|_{L^1(\Omega)} \tag{23}$$

即:

$$T-t_0 \sim \left(\frac{2}{C_1}T^{pC_0^{p-1}}\|h\|_{L^1(\Omega)}\right)^{(pC_0^{p-1}-\frac{-1}{p-1})^{-1}}.$$

结合式(5), (21) 和(22):

$$\begin{aligned}|T_h - t_0| &\leqslant C_2^{p-1}(\|u_h(\cdot, t_0)\|_{L^1(\Omega)})^{1-p} \leqslant \\ & C_2^{p-1}(\|u(\cdot, t_0)\|_{L^1(\Omega)} - \|v(\cdot, t_0)\|_{L^1(\Omega)})^{1-p} \leqslant \\ & C_2^{p-1}\left(C_1(T-t_0)^{\frac{-1}{p-1}} - \frac{C_1}{2}(T-t_0)^{\frac{-1}{p-1}}\right)^{1-p} \leqslant \\ & C_2^{p-1}\left(\frac{C_1}{2}\right)^{1-p}(T-t_0).\end{aligned}$$

利用三角不等式:

$$\begin{aligned}|T_h - T| &\leqslant |T_h - t_0| + |T - t_0| \leqslant \\ & \left(1 + C_2^{p-1}\left(\frac{C_1}{2}\right)^{1-p}\right)|T - t_0| \leqslant \\ & C(\|h\|_{L^1(\Omega)})^{(pC_0^{p-1}-\frac{-1}{p-1})^{-1}},\end{aligned}$$

其中 $C = C(u_0, C_0, C_1, C_2) > 0$, 证毕.

参考文献:

[1] Wu Zhuoqun, Zhao Junning, Yin Jingxue, et al. Nonlinear Diffusion Equations[M]. Singapore: World Scientific, 2001.

[2] Galaktionov V A. On asymptotic self-similar behaviour for a quasilinar heat equation: single point Blow-up[J]. SIAM J. Math. Anal., 1995, 26(3): 675-693.

[3] Herreo M A, Velázquez. Generic behaovior of one-dimensional Blow-up patterns[J]. Ann Scuola Norm Sup di Pisa, 1992, 19(3): 381-950.

[4] Pablo Groisman, Julio D Rossi, Harem Zaag. On the dependence of the Blow-up time with respect to the initial data in a semilinear parabolic problem[J]. Comm. Partial. Diff. Equa, 2003, 28(3-4): 733-744.

[5] Ladyzhenskaja O A, Solonnekov V A, Vralceva N A. Linear and quasilinear equations of parabolic type[M]. Providence: Amer. Math. Soc., 1968.

The Dependence of Blow-up Time with Respect to the Initial Data in Porous Medium Equations with Nonlinear Sources

LIANG Zhi-lei, ZHAO Jun-ning

(School of Mathematical Science, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: This paper is devoted to the Dirichilet problem of a porous media equation. Let T be the Blow-up time of the solution, it has investigated the relation between T and the Blow-up time T_h of the corresponding solution when a perturbed function $h(x)$ was added to the initial value $u_0(x)$, and find the fact that $|T - T_h|$ and $\|h\|_{L^1(\Omega)}$ has a continuous dependence on each other, where $1 < m < p$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $0 \leqslant u_0(x) \in L^\infty(\Omega)$, $h(x) \in L^\infty(\Omega)$, Ω is a bounded domain in R^N.

Key words: porous medium equations; Blow-up time; Blow-up solution; strong nonlinear source