第 43 卷 第 1 期
2004 年 1 月

厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)

Vol. 43 No. 1
Jan. 2004

快 讯·

文章编号:0438-0479(2004)01-0004-02

非稳定边界层方程组整体解的存在惟一性

张剑文,赵俊宁*

(厦门大学数学系,福建 厦门 361005)

摘要: 对牛顿流体和非牛顿流体的非稳定边界层方程组证明了弱解的整体存在性和惟一性.

关键词: 边界层;非牛顿流体;整体解

中图分类号: O 241.82 **文献标识码**:A

1 预备知识

对称边界层中流体运动由下面形式方程组描述

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y = \gamma(|u_y|^{n-1}u_y)_y + U_t + UU_x \\ u_x + v_y = 0 \end{cases} \tag{1}$$

在域 $D = \{0 < t < T, 0 < x < L, 0 < y < \infty\}$ 内满足如下初边值条件

$$\begin{cases} u(0,x,y) = u_0(x,y) \\ u(t,0,y) = u_1(t,y) \\ v(t,x,0) = v_0(t,x) \\ u(t,x,0) = 0 \\ \lim\limits_{y\to\infty} u(t,x,y) = U(t,x) \end{cases} \tag{2}$$

当 $0 < n < 1$,式(1) 描述了拟可塑流体在边界层附近的非稳定运动;当 $n > 1$,式(1) 描述了可膨胀流体在边界层附近的非稳定运动;当 $n = 1$,式(1) 描述了牛顿流体在边界层附近的非稳定运动,这时式(1) 被称为 Prandtl's 方程组. 对于 Prandtl's 方程组 Oleinik 于 1966 年证明了局部古典解的存在性[1],Xin①讨论了整体弱解的存在惟一性. 但对 $0 < n < 1$ 时(1) ~ (2) 整体解的存在性以及 $n > 1$ 情形的局部解的存在性还没有任何结果. 这些问题在 Oleinik 和 Samokhin 的专著中已作为公开问题被列出[2]. 本文对 $0 < n \le 1$ 情形在一定条件下证明了整体 BV 解的存在性,对 $n > 1$ 情形证明了局部 BV 解的存在性. 本文还讨论了解的惟一性.

2 主要结果

不妨设 $\gamma = 1$,为证明解的存在性,利用了下面 Crocco 变换

$$\tau = t, \xi = x, \eta = \frac{u}{U}, W(\tau,\xi,\eta) = \frac{|u_y|^{n-1}u_y}{U^{\frac{2n}{n+1}}}.$$

式(1) ~ (2) 变换为

$$W_\tau + \eta U W_\xi + AW_\xi + BW - n|W|^{\frac{1+n}{n}}W_{\eta\eta} = 0 \tag{3}$$

$$\Omega_T = \{(\tau,\xi,\eta) \mid 0 < \tau < T, 0 < \xi < L, 0 < \eta < 1\}.$$

$$W(\tau,\xi,1) = 0, W(0,\xi,\eta) = W_0(\xi,\eta), W(\tau,0,\eta) = W_1(\tau,\eta) \tag{4}$$

$$|W|^{\frac{1-n}{n}}WW_\eta - U^{\frac{1-n}{1+n}}v_0|W|^{\frac{1-n}{n}}W + (U_\xi + \frac{U_t}{U}) = 0, \quad \eta = 0 \tag{5}$$

其中

$$A = (1-\eta^2)U_\xi + (1-\eta)\frac{U_\tau}{U},$$

$$B = \frac{2n}{1+n}(\eta U_\xi + \frac{U_\tau}{U}),$$

$$W_0(\xi,\eta) = \frac{|u_{0y}|^{n-1}u_{0y}}{U^{\frac{2n}{n+1}}},$$

收稿日期:2003-11-17

基金项目:国家自然科学基金(19971070)资助

作者简介:张剑文(1977 -),男,博士研究生.

*Corresponding author:赵俊宁,男,教授,博士生导师.

① On the global existence of solutions to the Prandtl's system, to appear in Advance in Mathematics.
Global Well-Posedness for the two dimensional Prandtl's boundary layer equations, preprint.

$$W_1(\tau,\eta) = \frac{|u_{1y}|^{n-1}u_{1y}}{U^{\frac{2n}{n+1}}} \tag{6}$$

我们证明了如下结果:

定理 1　假设 $0 < n \leq 1$, $U(\tau,\xi)$, $W_0(\xi,\eta)$, $W_1(\tau,\eta)$, $v_0(\tau,\xi)$ 适当光滑且

$$U(\tau,\xi) > 0,\ UU_\xi + U_\tau \geq 0,\ v_0(\tau,\xi) \leq 0,$$
$$W_0(\xi,\eta) \geq 0,\ W_1(\tau,\eta) \geq 0 \tag{7}$$
$$C_0^{-1}(1-\eta)^{\frac{2n}{n+1}} \leq W_0(\xi,\eta),$$
$$W_1(\tau,\eta) \leq C(1-\eta)^{\frac{2n}{n+1}}.$$

那么式(3) ～ (5) 存在弱解 $W \in BV(\Omega_T) \cap L^\infty(\Omega_T)$.

定理 2　假设 $n > 1$,定理 1 中假设:式(7) 成立,还假设存在常数 C_1,使

$$C_1^{-1}(1-\eta)^n \leq W_0(\xi,\eta),$$
$$W_1(\tau,\eta) \leq C_1(1-\eta)^n,$$

那么式(3) ～ (5) 存在局部解 $W \in BV(\Omega_{T_0}) \cap L^\infty(\Omega_{T_0})$.

定理 3　式(3) ～ (5) 的解是惟一的.

作为定理 1、定理 2 的直接推论,我们证明了问题(1) ～ (2) 当 $0 < n \leq 1$ 时存在整体解 $u(x,y,t)$,当 $n > 1$ 的存在局部解 $u(x,y,t)$,并在一定条件下解是惟一的.

为了证明弱解的存在性,本文使用了抛物正则化方法,即式(3) ～ (5) $(0 < n \leq 1)$ 的解是下面抛物问题解的极限:

$$W_\tau + \eta U W_\xi + AW_\eta + BW - nW^{\frac{1+n}{n}}W_{\eta\eta} - \varepsilon n W^{\frac{1+n}{n}} W_{\xi\xi} = 0 \tag{8}$$
$$W(0,\xi,\eta) = W_{0\varepsilon}(\xi,\eta),$$
$$W(\tau,0,\eta) = W_{1\varepsilon}(\tau,\eta),$$
$$W(\tau,L,\eta) = W_{2\varepsilon}(\tau,\eta),$$
$$W(\tau,\xi,1) = \varepsilon^{\frac{2n}{n+1}} \tag{9}$$
$$W^{\frac{1}{n}}W_\eta - v_0 U^{\frac{1-n}{1+n}} W^{\frac{1}{n}} + U\xi + \frac{U_\tau}{U} = 0,\quad \eta = 0 \tag{10}$$

式中

$$W_{0\varepsilon} \to W_0,\ W_{1\varepsilon} \to W_1,$$
$$W_{0\varepsilon}|_{\eta=1} = W_{1\varepsilon}|_{\eta=1} = W_{2\varepsilon}|_{\eta=1} = \varepsilon^{\frac{2n}{n+1}}.$$
$$W_{0\varepsilon}, W_{1\varepsilon}, W_{2\varepsilon} \geq \varepsilon^{\frac{2n}{n+1}},$$
$$C_0^{-1}(1+\varepsilon-\eta)^{\frac{2n}{n+1}} \leq W_{0\varepsilon}, W_{1\varepsilon}, W_{2\varepsilon} \leq C_0(1+\varepsilon-\eta)^{\frac{2n}{n+1}}.$$

通过证明

$$C_1^{-1}(1+\varepsilon-\eta)^{\frac{2n}{n+1}} \leq W_\varepsilon \leq C_1(1+\varepsilon-\eta)^{\frac{2n}{n+1}},$$
$$\int_{\Omega_T}(1+\varepsilon-\eta)^\alpha(W_{\varepsilon\eta}^2 + \varepsilon W_{\varepsilon\xi}^2)\,d\xi d\eta d\tau \leq C,$$
$$\frac{1-3n}{1+n} < \alpha < 1.$$
$$\iint(|W_{\varepsilon\tau}| + |W_{\varepsilon\xi}|)\,d\xi d\eta \leq C,$$

我们可得到式(3) ～ (5) BV 弱解的存在性.

参考文献:

[1] Oleinik O A. On the mathernatics theory of boundary layer for non-stationary incompressible flow[J]. J. Appl. Mech. ,1966 ,30 :951 - 974.

[2] Oleinik O A ,Samokhin. Mathematical Models in Boundary Layer Theory[M]. BocaRaton-London-New York-Washington D. C. :Chapman & Hall/ CRC ,1999.

On the Global Existence and Uniqueness of Solutions to Nonstationary Boundary Layer System

ZHANG Jian-wen , ZHAO Jun-ning

(Dept. of Math. ,Xiamen University , Xiamen 361005 ,China)

Abstract : In this paper we establish a global existence of BV-weak solution to nonstationary boundary layer system of pseudo-plastic fluid and a local existence of BV-weak solution to nonstationary boundary layer system of dilatable fluid. Moreover uniqueness of weak solution is proved.

Key words : boundary layer ;Non-Newtonian flows ;global solution