第51卷第6期 数学学报中文版 Vol.51, No.6
2008年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Nov., 2008

文章编号: 0583-1431(2008)06-1143-08 文献标识码: A

Hilbert 空间中 g-Parseval 框架的一些性质

肖祥春

厦门大学数学科学学院 厦门 363105
福州大学数学与计算机科学学院 福州 350002
E-mail: xxc570@163.com

朱玉灿

福州大学数学与计算机科学学院 福州 350002
E-mail: zhuyucan@fzu.edu.cn

曾晓明

厦门大学数学科学学院 厦门 363105
E-mail: xmzeng@xmu.edu.cn

摘 要 在 Hilbert 空间中讨论 g-Parseval 框架的一些性质, 得到 g-Parseval 框架的一些恒等式和不等式.

关键词 g- 框架; g-Parseval 框架; g- 标准正交基
MR(2000) 主题分类 42C99
中图分类 O177.1

Some Properties of g-Parseval Frames in Hilbert Spaces

Xiang Chun XIAO

Department of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, *P. R. China*
Department of Mathematics and Computer Science,
Fuzhou University, Fuzhou 350002, *P. R. China*
E-mail: xxc570@163.com

Yu Can ZHU

Department of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou 350002, *P. R. China*
E-mail: zhuyucan@fzu.edu.cn

Xiao Ming ZENG

Department of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, *P. R. China*
E-mail: xmzeng@xmu.edu.cn

Abstract We discuss some properties of the g-Parseval frames in Hilbert spaces and obtain some identities and inequalities of the g-Parseval frames in Hilbert spaces.

收稿日期: 2007-10-09; 接受日期: 2008-05-30
基金项目: 国家自然科学基金 (10571145); 福建省自然科学基金项目 (Z0511013) 及省教育厅基金项目 (JB04038)

Keywords g-frame; g-Parseval frame; g-orthonormal basis
MR(2000) Subject Classification 42C99
Chinese Library Classification O177.1

1 引言

Hilbert 空间中的框架最早由 Duffin 和 Schaeffer [1] 于 1952 年在研究非调和 Fourier 级数时引入的概念, 并对它的一些性质作了初步的研究. 直到 1986 年, Daubechies, Grossmann 和 Meyer [2] 的突破性研究, 才使框架理论被人们广泛关注, 国内外许多学者对它进行一些深入的研究 [3–7]. 现在框架理论不仅是在理论上还是在应用上都起着重要的作用, 已经被广泛应用于信号处理 [8], 信号采样 [9], 系统模型 [10], 量子力学 [11], 图象处理 [12], 编码与信号传输 [13–14] 等领域.

孙文昌 [15] 在 Hilbert 空间中提出了 g- 框架的概念, 把 Hilbert 空间中已有的几种框架的讨论作统一处理, 得到了一些重要的研究成果. 本文讨论 Hilbert 空间中 g- 框架和 g-Parseval 框架的一些性质.

设 U 和 V 是两个 Hilbert 空间, 其内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, 范数为 $\|\cdot\|$, $\{V_j\}_{j\in J}$ 是 V 的闭子空间序列, 其中 J 是整数集 Z 的子集, 记 $L(U,V_j)$ 为从 U 到 V_j 的所有有界线性算子的集合.

定义 1.1 [15] 一个序列 $\{\Lambda_j\in L(U,V_j):j\in J\}$ 称为 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 g- 框架, 如果存在正数 A,B, 使得

$$A\|f\|^2\le\sum_{j\in J}\|\Lambda_jf\|^2\le B\|f\|^2,\quad \forall f\in U. \tag{1}$$

分别称 A,B 为 g- 框架的上下界. 如果只有 (1.1) 式右边的不等式成立, 则称序列 $\{\Lambda_j:j\in J\}$ 为 g-Bessel 序列. 如果 $A=B=\lambda$, 则称为 g-λ - 紧框架. 如果 $\lambda=1$, 则称 $\{\Lambda_j:j\in J\}$ 为 g-Parseval 框架.

如果对任意的 $j\in J$, $V_j=C$, 由 Riesz 表示定理, 对每个有界线性泛函 $\Lambda_j\in L(U,C)$, 存在某个 $f_j\in U$, 使得 $\Lambda_jf=\langle f,f_j\rangle$, $\forall f\in U$, 由 g- 框架和框架定义得: $\{\Lambda_j\in L(U,V_j):j\in J\}$ 是 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 g- 框架当且仅当 $\{f_j\}_{j\in J}$ 是 U 的框架.

例 1.1 设 $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ 为 U 的标准正交基, 对任意的 $j=1,2,\ldots$, 令 $V_j=\overline{\operatorname{span}}\{e_1,e_2,\ldots,e_j\}$, $\Lambda_j:U\to V_j$, $\Lambda_jf=\sum_{k=1}^j\langle f,\frac{e_j}{\sqrt{j}}\rangle e_k$, 则对任意 $\forall f\in U$, 有

$$\|\Lambda_jf\|^2\le\sum_{k=1}^j\left|\left\langle f,\frac{e_j}{\sqrt{j}}\right\rangle\right|^2\|e_k\|^2=|\langle f,e_j\rangle|^2\le\|f\|^2,$$

从而

$$\sum_{j=1}^\infty\|\Lambda_jf\|^2=\sum_{j=1}^\infty|\langle f,e_j\rangle|^2=\|f\|^2,$$

因此 $\{\Lambda_j\}_{j=1}^\infty$ 为 U 的 g-Parseval 框架.

设 $\{\Lambda_j:j\in J\}$ 是 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 g- 框架, 在文 [15] 作者定义了 g- 框架算子 S,

$$Sf=\sum_{j\in J}\Lambda_j^*\Lambda_jf,\quad \forall f\in U,$$

这里 Λ_j^* 是 Λ_j 的共轭算子, 且证明了 S 是可逆的, 正的自共轭算子. 又

$$\langle Sf,f\rangle=\left\langle\sum_{j\in J}\Lambda_j^*\Lambda_jf,f\right\rangle=\sum_{j\in J}\langle\Lambda_jf,\Lambda_jf\rangle=\sum_{j\in J}\|\Lambda_jf\|^2,$$

所以有 $A\|f\|^2\le\langle Sf,f\rangle\le B\|f\|^2$ ，且下面的重构式子成立：

$$f=SS^{-1}f=S^{-1}Sf=\sum_{j\in J}\Lambda_j^*\Lambda_jS^{-1}f=\sum_{j\in J}S^{-1}\Lambda_j^*\Lambda_jf,\quad\forall f\in U.\tag{2}$$

记 $\widetilde{\Lambda}_j=\Lambda_jS^{-1}$, 则上式变成

$$f=\sum_{j\in J}\Lambda_j^*\widetilde{\Lambda}_jf=\sum_{j\in J}\widetilde{\Lambda}_j\Lambda_j^*f,$$

则 $\{\widetilde{\Lambda}_j:j\in J\}$ 仍为 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 g- 框架 [15], 并且称 $\{\widetilde{\Lambda}_j:j\in J\}$ 为 $\{\Lambda_j:j\in J\}$ 的对偶框架. 对任意 $K\subset J$, 记 $K^c=J\backslash K$, 我们定义线性算子

$$S_Kf=\sum_{j\in K}\Lambda_j^*\Lambda_jf,\quad\forall f\in U.$$

定义 1.2 [15] 一个序列 $\{\Lambda_j\in L(U,V_j):j\in J\}$ 称为 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 g- 标准正交基, 如果满足

(1) $\langle\Lambda_i^*f_i,\Lambda_j^*f_j\rangle=\delta_{i,j}\langle f_i,f_j\rangle$, $\forall i,j\in J,\ f_i\in V_i,\ f_j\in V_j$;

(2) $\sum_{j\in J}\|\Lambda_jf\|^2=\|f\|^2$, $\forall f\in U$,

其中 Λ_j^* 为 Λ_j 的共轭算子.

Casazza 等人在研究 Hilbert 空间中的 Parseval 框架的最优分解时, 发现了一些新的 Parseval 框架恒等式, 下面我们给出这些恒等式.

定理 1.1 [16] 设 $\{f_i\}_{i\in I}\subset H$ 是 H 的框架, $\{\widetilde{f}_i\}_{i\in I}\subset H$, 为其对偶框架, 则对任意的 $K\subset I$, 有

$$\sum_{j\in K}|\langle f,f_j\rangle|^2-\sum_{j\in I}|\langle S_Kf,\widetilde{f}_j\rangle|^2=\sum_{j\in K^c}|\langle f,f_j\rangle|^2-\sum_{j\in I}|\langle S_{K^c}f,\widetilde{f}_j\rangle|^2.$$

定理 1.2 [16] (Parseval 框架恒等式) 设 $\{f_i\}_{i\in I}\subset H$ 是 H 的 Parseval 框架, 对任意的 $K\subset I$ 和 $f\in H$, 有

$$\sum_{j\in K}|\langle f,f_j\rangle|^2-\left\|\sum_{j\in K}\langle f,f_j\rangle f_j\right\|^2=\sum_{j\in K^c}|\langle f,f_j\rangle|^2-\left\|\sum_{j\in K^c}\langle f,f_j\rangle f_j\right\|^2.$$

注 1 定理 1.2 是定理 1.1 的特例, 即取 $\{f_i\}_{i\in I}$ 为 Parseval 框架.

推论 1.1 [16] 设 $\{f_i\}_{i\in I}\subset H$ 是 H 的 λ- 紧框架, 对任意的 $K\subset I$ 和 $f\in H$, 有

$$\lambda\sum_{j\in K}|\langle f,f_j\rangle|^2-\left\|\sum_{j\in K}\langle f,f_j\rangle f_j\right\|^2=\lambda\sum_{j\in K^c}|\langle f,f_j\rangle|^2-\left\|\sum_{j\in K^c}\langle f,f_j\rangle f_j\right\|^2.$$

2 g-Parseval 框架恒等式

为了证明结论, 先给出几个引理.

引理 2.1 设 H 为 Hilbert 空间, T 为自共轭有界线性算子, 且满足对任意 $\forall f\in H$, 有 $\langle Tf,f\rangle=0$, 则 $T=0$.

证明 根据 T 为自共轭有界线性算子, 直接验证得: 对任意 $f,g\in H$, 有

$$\mathrm{Re}\langle Tf,g\rangle=\frac{1}{4}[\langle T(f+g),f+g\rangle-\langle T(f-g,f-g)\rangle]=0.$$

取 $g=Tf$ 得: 对任意 $f\in H$, 有 $Tf=0$, 即 $T=0$.

引理 2.2 [17] 设 H 为 Hilbert 空间. 如果 $U_1,V_1\in L(H)$ 是自共轭有界线性算子, 满足 $U_1+V_1=I_H$, 则任意的 $f\in H$, 有

$$\langle U_1f,f\rangle+\|V_1f\|^2=\langle V_1f,f\rangle+\|U_1f\|^2\geq\frac{3}{4}\|f\|^2.$$

定理 2.1 设 $\{\Lambda_j\in L(U,V_j):j\in J\}$ 是 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 g- 框架, $\{\widetilde{\Lambda}_j:j\in J\}$ 为其对偶框架, 对任意的 $K\subset J$ 和 $f\in U$, 有

$$\sum_{j\in K}\|\Lambda_jf\|^2+\sum_{j\in J}\|\widetilde{\Lambda}_jS_{K^c}f\|^2=\sum_{j\in K^c}\|\Lambda_jf\|^2+\sum_{j\in J}\|\widetilde{\Lambda}_jS_Kf\|^2\geq\frac{3}{4}\sum_{j\in J}\|\Lambda_jf\|^2. \tag{2.1}$$

证明 因为 S 是 U 上的可逆的、正的线性算子, 则 $S^{-1/2}$ 存在, 且 $S_K+S_{K^c}=S$, 所以

$$S^{-1/2}S_KS^{-1/2}+S^{-1/2}S_{K^c}S^{-1/2}=I_U.$$

令 $U_1=S^{-1/2}S_KS^{-1/2},V_1=S^{-1/2}S_{K^c}S^{-1/2}$, 则由引理 2.2 得

$$\begin{aligned}\langle S^{-1/2}S_KS^{-1/2}f,f\rangle+\|S^{-1/2}S_{K^c}S^{-1/2}f\|^2&=\langle S^{-1/2}S_{K^c}S^{-1/2}f,f\rangle+\|S^{-1/2}S_KS^{-1/2}f\|^2\\&\geq\frac{3}{4}\|f\|^2.\end{aligned}$$

用 $S^{1/2}f$ 代替 f, 化简得

$$\langle S_Kf,f\rangle+\langle S^{-1}S_{K^c}f,S_{K^c}f\rangle=\langle S_{K^c}f,f\rangle+\langle S^{-1}S_Kf,S_Kf\rangle\geq\frac{3}{4}\langle Sf,f\rangle. \tag{2.2}$$

又因为

$$\langle S_Kf,f\rangle=\left\langle\sum_{j\in K}\Lambda_j^*\Lambda_jf,f\right\rangle=\sum_{j\in K}\langle\Lambda_jf,\Lambda_jf\rangle=\sum_{j\in K}\|\Lambda_j\|^2, \tag{2.3}$$

且

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J}\|\widetilde{\Lambda}_jf\|^2&=\sum_{j\in J}\|\Lambda_jS^{-1}f\|^2=\sum_{j\in J}\langle\Lambda_jS^{-1}f,\Lambda_jS^{-1}f\rangle\\&=\sum_{j\in J}\langle\Lambda_j^*S^{-1}f,S^{-1}f\rangle=\langle SS^{-1}f,S^{-1}f\rangle\\&=\langle f,S^{-1}f\rangle=\langle S^{-1}f,f\rangle.\end{aligned} \tag{2.4}$$

将 (2.3) 式和 (2.4) 式代入 (2.2) 式即得到结论.

定理 2.2 设 $\{\Lambda_j\in L(U,V_j):j\in J\}$ 是 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 g-Parseval 框架, 对任意的 $K\subset J$ 和 $f\in U$, 有

$$\sum_{j\in K}\|\Lambda_jf\|^2+\left\|\sum_{j\in K^c}\Lambda_j^*\Lambda_jf\right\|^2=\sum_{j\in K^c}\|\Lambda_jf\|^2+\left\|\sum_{j\in K}\Lambda_j^*\Lambda_jf\right\|^2\geq\frac{3}{4}\|f\|^2. \tag{2.5}$$

证明 因为 $\{\Lambda_j\in L(U,V_j):j\in J\}$ 是 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 g-Parseval 框架, 则对任意 $f\in U$, 有

$$\sum_{j\in J}\|\Lambda_jf\|^2=\|f\|^2. \tag{2.6}$$

从而

$$\langle Sf,f\rangle=\left\langle \sum_{j\in J}\Lambda_j^*\Lambda_j f,f\right\rangle=\sum_{j\in J}\langle\Lambda_j f,\Lambda_j f\rangle=\sum_{j\in J}\|\Lambda_j f\|^2=\|f\|^2=\langle f,f\rangle.$$

所以对任意 $f\in U$, 有 $\langle (S-I)f,f\rangle=0$. 记 $T=S-I$, 由于 S 是自共轭有界线性算子, 则

$$T^*=(S-I)^*=S^*-I^*=S-I=T,$$

即 T 也是自共轭有界线性算子, 根据引理 2.1 知 $T=0$, 即 $S=I$, 从而 $\widetilde{\Lambda}_j=\Lambda_j S^{-1}=\Lambda_j$. 由 (2.6) 式得: 对任意的 $K\subset J$ 和 $f\in U$, 有

$$\sum_{j\in J}\|\widetilde{\Lambda}_j S_K f\|^2=\sum_{j\in J}\|\Lambda_j S_K f\|^2=\|S_K f\|^2=\left\|\sum_{j\in K}\Lambda_j^*\Lambda_j f\right\|^2$$

和

$$\sum_{j\in J}\|\widetilde{\Lambda}_j S_{K^c} f\|^2=\sum_{j\in J}\|\Lambda_j S_{K^c} f\|^2=\|S_{K^c} f\|^2=\left\|\sum_{j\in K^c}\Lambda_j^*\Lambda_j f\right\|^2.$$

再利用 (2.6) 式和定理 2.1 得 (2.5) 式成立.

推论 2.1 设 $\{\Lambda_j\in L(U,V_j):j\in J\}$ 是 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 g-Parseval 框架, 对任意的 $K\subset J$ 和 $f\in U$, 有

$$\sum_{j\in K}\|\Lambda_j f\|^2-\left\|\sum_{j\in K}\Lambda_j^*\Lambda_j f\right\|^2=\sum_{j\in K^c}\|\Lambda_j f\|^2-\left\|\sum_{j\in K^c}\Lambda_j^*\Lambda_j f\right\|^2.$$

推论 2.2 设 $\{\Lambda_j\in L(U,V_j):j\in J\}$ 是 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 g-λ- 紧框架, 对任意的 $K\subset J$ 和 $f\in U$, 有

$$\lambda\sum_{j\in K}\|\Lambda_j f\|^2-\left\|\sum_{j\in K}\Lambda_j^*\Lambda_j f\right\|^2=\lambda\sum_{j\in K^c}\|\Lambda_j f\|^2-\left\|\sum_{j\in K^c}\Lambda_j^*\Lambda_j f\right\|^2.$$

证明 因为 $\{\Lambda_j:j\in J\}$ 是 g-λ - 紧框架, 则 $\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Lambda_j:j\in J\}$ 是 g-Parseval 框架, 再利用定理 2.2 即可得到结论.

注 2 设 $\{f_j\}_{j\in J}$ 是 Hilbert 空间 H 的框架或 Parseval 框架, 令 $\Lambda_j f=\langle f,f_j\rangle$, $V_j=C$, $j\in J$, 则 $\{\Lambda_j\in L(H,V_j):j\in J\}$ 是 H 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 g- 框架或 g-Parseval 框架, 由定理 2.1 得到文献 [17, 定理 1.1、定理 2.2] 和文献 [16, 定理 3.1].

3 g-Parseval 框架恒等式的进一步讨论

本节对 g-Parseval 框架恒等式的性质作进一步的讨论, 为此需引入如下记号.

设 $F=\{\Lambda_j\in L(U,V_j):j\in J\}$ 是 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 g- 框架, 对任意 $K\subset J$, 令

$$\nu_-(F,K)=\sup_{f\neq 0}\frac{\sum_{j\in K^c}\|\Lambda_j f\|^2+\|\sum_{j\in K}\Lambda_j^*\Lambda_j f\|^2}{\|f\|^2},$$

$$\nu_+(F,K)=\sup_{f\neq 0}\frac{\sum_{j\in K^c}\|\Lambda_j f\|^2+\|\sum_{j\in K}\Lambda_j^*\Lambda_j f\|^2}{\|f\|^2}.$$

定理 3.1 $\nu_-(F,K)$ 和 $\nu_+(F,K)$ 有如下的性质:

(1) $\frac{3}{4}\le\nu_-(F,K)\le\nu_+(F,K)\le 1$;

(2) $\nu_-(F,K^c)=\nu_-(F,K)$, $\nu_+(F,K^c)=\nu_+(F,K)$;

(3) $\nu_-(F,J)=\nu_+(F,J)$, $\nu_-(F,\phi)=\nu_+(F,\phi)$;

(4) $\{\Lambda_j\in L(U,V_j):j\in J\}$ 是 g- 标准正交基 $\Rightarrow$ 对任意 $K\subset J$, $\nu_-(F,K)=\nu_+(F,K)=1$.

证明 由定理 2.2 可知道第一个不等式成立. 对第二个不等式, 我们先证明: 对任意 $\forall f\in U$, 有

$$\Big\|\sum_{j\in K}\Lambda_j^*\Lambda_j f\Big\|^2\le\sum_{j\in K}\|\Lambda_j f\|^2.$$

事实上, 对任意 $f\in U$, 有

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{j\in K}\Lambda_j^*\Lambda_j f\Big\|^2&=\sup_{h\in U,\,\|h\|=1}\Big|\Big\langle\sum_{j\in K}\Lambda_j^*\Lambda_j f,h\Big\rangle\Big|^2\\&=\sup_{h\in U,\,\|h\|=1}\Big|\sum_{j\in K}\langle\Lambda_j f,\Lambda_j h\rangle\Big|^2\\&\le\sup_{h\in U,\,\|h\|=1}\Big(\sum_{j\in K}\|\Lambda_j f\|\cdot\|\Lambda_j h\|\Big)^2\\&\le\sup_{h\in U,\,\|h\|=1}\Big(\sum_{j\in K}\|\Lambda_j f\|^2\Big)\Big(\sum_{j\in K}\|\Lambda_j h\|^2\Big)\\&=\sup_{h\in U,\,\|h\|=1}\Big(\sum_{j\in K}\|\Lambda_j f\|^2\Big)\|h\|^2\le\sum_{j\in K}\|\Lambda_j f\|^2,\end{aligned}$$

所以, 对任意 $f\in U$, 有

$$\sum_{j\in K^c}\|\Lambda_j f\|^2+\Big\|\sum_{j\in K}\Lambda_j^*\Lambda_j f\Big\|^2\le\sum_{j\in K^c}\|\Lambda_j f\|^2+\sum_{j\in K}\|\Lambda_j f\|^2=\|f\|^2.$$

第二个不等式得证.

(2) 和 (3) 可由定理 2.2 直接得到.

(4) $\{\Lambda_j\in L(U,V_j):j\in J\}$ 是 g- 标准正交基, 由 g- 标准正交基定义得, 对任意 $i,j\in J$, $f_i\in V_i$, $f_j\in V_j$, 有

$$\langle\Lambda_i^*f_i,\Lambda_j^*f_j\rangle=\delta_{i,j}\langle f_i,f_j\rangle=\begin{cases}0, & i\ne j,\\ \langle f_i,f_j\rangle, & i=j\end{cases}$$

对任意的 $f\in U$, $j\in J$, 有 $\Lambda_j f\in V_j$, 则

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{j\in K}\Lambda_j^*\Lambda_j f\Big\|^2&=\Big\langle\sum_{i\in K}\Lambda_i^*\Lambda_i f,\sum_{j\in K}\Lambda_j^*\Lambda_j f\Big\rangle\\&=\sum_{i\in K}\sum_{j\in K}\langle\Lambda_i^*\Lambda_i f,\Lambda_j^*\Lambda_j f\rangle\\&=\sum_{i\in K}\sum_{j\in K}\delta_{i,j}\langle\Lambda_i f,\Lambda_j f\rangle\\&=\sum_{j\in K}\langle\Lambda_j f,\Lambda_j f\rangle=\sum_{j\in K}\|\Lambda_j\|^2.\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{j\in K^c}\|\Lambda_j f\|^2+\left\|\sum_{j\in K}\Lambda_j^*\Lambda_j f\right\|^2=\sum_{j\in K^c}\|\Lambda_j f\|^2+\sum_{j\in K}\|\Lambda_j f\|^2=\|f\|^2,$$

故此 $\nu_-(F,K)=\nu_+(F,K)=1$.

也许有人会问 $\nu_-(F,K)$, $\nu_+(F,K)$ 能取到最大值 1 吗? 事实上, 这样的例子是存在的.

例 3.1 设 U 是可分的 Hilbert 空间, $\{f_j:j\in J\}$ 是 U 的标准正交基, 定义

$$\Lambda_{f_j}:U\to C,\quad \Lambda_{f_j}=\langle f,f_j\rangle,\quad \forall f\in U,$$

则对任意的 $c\in C$, $\Lambda_{f_j}^*c=cf_j$, 所以

$$\langle\Lambda_{f_i}^*g_{f_i},\Lambda_{f_j}^*g_{f_j}\rangle=\langle g_{f_i}f_i,g_{f_j}f_j\rangle=\delta_{i,j}\langle g_{f_i},g_{f_j}\rangle,$$

其中 $g_{f_i},g_{f_j}\in C$, $i,j\in J$. 又因为 $\{f_j:j\in J\}$ 是 U 的标准正交基, 所以

$$\sum_{j\in J}\|\Lambda_{f_j}f\|^2=\sum_{j\in J}|\langle f,f_j\rangle|^2=\|f\|^2,\quad \forall f\in U.$$

所以 $\{\Lambda_{f_j}:j\in J\}$ 是 g- 标准正交基, 再根据定理 3.1 知: $\nu_-(F,K),\nu_+(F,K)$ 能取到最大值 1.

定理 3.2 设 $F=\{\Lambda_j\in L(U,V_j):j\in J\}$ 是 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 g-Parseval 框架, 对任意的 $K\subset J$ 和 $f\in U$, 下列条件等价:

(1) $\nu_-(F,K)=\nu_+(F,K)=1$;

(2) $\sum_{j\in K}\|\Lambda_j f\|^2=\|\sum_{j\in K}\Lambda_j^*\Lambda_j f\|^2$;

(3) $\sum_{j\in K^c}\|\Lambda_j f\|^2=\|\sum_{j\in K^c}\Lambda_j^*\Lambda_j f\|^2$;

(4) $S_KS_{K^c}f=0$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 $\nu_-(F,K)=\nu_+(F,K)=1$, 因为 $F=\{\Lambda_j\in L(U,V_j):j\in J\}$ 是 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 g-Parseval 框架, 有

$$\|f\|^2=\sum_{j\in K^c}\|\Lambda_j f\|^2+\sum_{j\in K}\|\Lambda_j f\|^2,$$

从而

$$\sum_{j\in K^c}\|\Lambda_j f\|^2+\left\|\sum_{j\in K}\Lambda_j^*\Lambda_j f\right\|^2=\|f\|^2=\sum_{j\in K^c}\|\Lambda_j f\|^2+\sum_{j\in K}\|\Lambda_j f\|^2.$$

由此推出 (2) 成立.

(2) $\Rightarrow$ (1) 若 (2) 成立, 由于 $F=\{\Lambda_j\in L(U,V_j):j\in J\}$ 是 U 关于 $\{V_j:j\in J\}$ 的 g-Parseval 框架, 则

$$\sum_{j\in K^c}\|\Lambda_j f\|^2+\left\|\sum_{j\in K}\Lambda_j^*\Lambda_j f\right\|^2=\sum_{j\in K^c}\|\Lambda_j f\|^2+\sum_{j\in K}\|\Lambda_j f\|^2=\|f\|^2,$$

从而 $\nu_-(F,K)=\nu_+(F,K)=1$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) 由定理 2.2 可立即得到 (2) 与 (3) 等价.

(2) $\Leftrightarrow$ (4) 根据如下等式得到 (2) 与 (4) 等价.

$$\begin{aligned}\sum_{j\in K}\|\Lambda_j f\|^2-\left\|\sum_{j\in K}\Lambda_j^*\Lambda_j f\right\|^2&=\langle S_Kf,f\rangle-\langle S_Kf,S_Kf\rangle=\langle(S_K-S_K^2)f,f\rangle\\&=\langle S_K(I-S_K)f,f\rangle=\langle S_KS_{K^c}f,f\rangle.\end{aligned}$$

参 考 文 献

[1] Duffin R. J., Schaeffer A. C., A class of nonharmonic Fourier series, *Trans. Math. Soc.*, 1952, **72**: 341–366.

[2] Daubechies I., Grossmann A., Meyer Y., Painless nonorthogonal expansions, *J. Math. Phys.*, 1986, **27**: 271–1283.

[3] Casazza P. G., The art of frame theory, *Taiwanese J. of Math.*, 2000, **4**(2): 129–201.

[4] Christensen O., An introduction to frames and Riesz bases, Boston: Birkhäuser, 2003.

[5] Yang D. Y., Zhou X. W., Yuan Z. Z., Frame wavelets with compact supports for $L^2(R^n)$, *Acta Mathematica Sinica, English Series,* 2007, **23**(2): 349–356.

[6] Zhu Y. C., q-Besselian frames in Banach spaces, *Acta Mathematica Sinica, English Series,* 2007, **23**(9): 1707–1718.

[7] Li C. Y., Cao H. X., X_d frames and Riesz bases for a Banach space, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series,* 2006, **49**(6): 1361–1366 (in Chinese).

[8] Mallat S., A wavelet tour of signal processing (Second Edition), San Diego: Academic Press, 2000.

[9] Feichtinger H. G., Gröchenig K., Theory and practice of irregular sampling, in: J. J. Benedetto, M. Frazier (Eds.), Wavelets: Mathematics and Applications, Boca Raton: CRC Press. 1994, 305–363.

[10] Dudey Ward N. E., Partington J. R., A construction of rational wavelets and frames in Hardy–Sobolev space with applications to system modelling, *SIAM J. Control Optim.*, 1998, **36**: 654–679.

[11] Eldar Y., Forney G. D., Optimal tight frames and quantum measurement, *IEEE Trans. Inform. Theory,* 2002, **48**: 599–610.

[12] Chan R. H., Riemenschneider S. D., Shen L., Shen Z., Tight frame: An efficient way for high-resolution image reconstruction, *Appl. Comput. Harmon. Anal.,* 2004, **17**: 91–115.

[13] Holmes R. B., Paulsen V. I., Optimal frames for erasures, *Linear Algebra Appl.,* 2004, **377**: 31–51.

[14] Strohmer T., Heath R., Grassmanian frames with applications to coding and communications, *Appl. Comput. Harmon. Anal.,* 2003, **14**: 257–275.

[15] Sun W., g-Frames and g-Riesz bases, *J. Math. Anal. Appl.,* 2006, **322**: 437–452.

[16] Balan R., Casazza P. G., Edidin D., Kutyniok G., A new identity for Parseval frames, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 2007, **135**(4): 1007–1015.

[17] Gavruta P., On some identities and inequalities for frames in Hilbert spaces, *J. Math. Anal. Appl.,* 2006, **321**: 469–478.