

Doo-Sabin 曲面控制网格的收敛估计

程黄和, 曾晓明*

(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: Doo-Sabin 细分曲面是定义在任意拓扑网格上的一种细分曲面的框架, 它是双二次 B 样条曲面的一种推广. 基于这个性质 Doo-Sabin 曲面被广泛应用于具有任意拓扑结构的复杂形体的造型. 本文运用 Doo-Sabin 控制点的一阶差分技术来研究 Doo-Sabin 细分曲面控制网格的收敛问题. 证明了 Doo-Sabin 曲面控制网格以指数速率收敛, 并给出了一个计算估计公式. 在此基础上可以给出 Doo-Sabin 曲面的误差估计的计算公式.

关键词: Doo-Sabin 曲面; 控制网格; 细分曲面; 收敛速度

中图分类号: O 174.41; TP 391.72 **文献标识码:** A

文章编号: 0438-0479(2006)02-0162-03

B-样条曲面和非均匀有理 B-样条曲面是定义在四边形拓扑网格上的. 作为 B-样条曲面的推广, 细分曲面是定义在任意拓扑网格上, 基于这个性质细分曲面被广泛应用于具有任意拓扑结构的复杂形体的造型.

Doo-Sabin 细分曲面是定义在任意拓扑网格上的一种细分曲面的框架, 它是双二次 B 样条曲面的一种推广. 它在每一次细分时按 Doo-Sabin 规则^[1], 由原来的控制顶点产生一组新的控制顶点, 由这些点构成新的控制网格, 按此规则不断细分得到的控制网格极限就是 Doo-Sabin 曲面. 自然要问, 在细分过程中, 控制网格与极限曲面的近似程度如何? 控制网格是以怎样的速率在收敛呢? 文献[2]对 Catmull-Clark 曲面进行了误差分析^[3-5].

本文证明 Doo-Sabin 控制网格以指数速率收敛, 并给出了一个计算估计公式.

1 定义和记号

设给定一个 Doo-Sabin 曲面片的控制网格 Π_0 . 不失一般性, 假设初始网格已至少细分两次, 因而奇异 $N(N \neq 4)$ 边形是孤立的. 按图 1 控制顶点 $P_i^{(0)} (1 \leq i \leq N+5)$ 的排列顺序, 其中 $P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \dots, P_N^{(0)}$ 是奇异 N 边形的顶点. 经过一次细分得到一组新的控制顶点 $P_i^{(1)} (1 \leq i \leq N+12)$ 称它们为 1-层次控制顶点, 这些

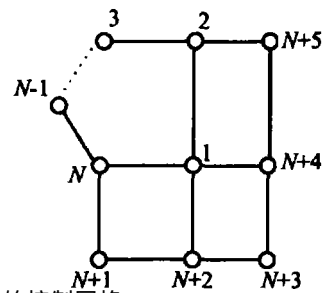


图 1 初始控制网格

Fig. 1 Initial control mesh

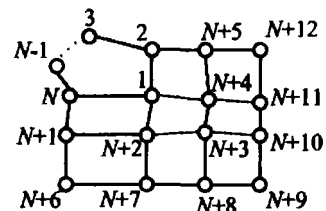


图 2 细分一次后的控制网格

Fig. 2 One level control mesh

顶点构成一个新的控制网格 Π_1 (见图 2). 继续细分, 第 n 次细分得到的所有控制顶点称为 n -层次控制顶点, 记为 $P_i^{(n)}$. 所有这些 n -层次控制顶点组成一个 n -层次控制网格, 记为 $\Pi_n (n = 0, 1, 2, \dots)$.

定义 1 在控制网格 $\Pi_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ 内的任意两个顶点 $P_i^{(n)}$ 和 $P_j^{(n)}$, 若 $P_i^{(n)}P_j^{(n)}$ 是 Π_n 中的一条边则称 $P_i^{(n)}$ 是 $P_j^{(n)}$ 的相邻点. 如图 1, $P_1^{(0)}$ 的相邻点有 $P_2^{(0)}, P_N^{(0)}, P_{N+2}^{(0)}$ 和 $P_{N+4}^{(0)}$.

设 $X = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in R^k(X)$ 的 p -范数定义为

收稿日期: 2005-03-16

基金项目: 国家自然科学基金(10571145)资助

作者简介: 程黄和(1980-), 男, 硕士研究生.

* 通讯作者: xmzeng@jingxian.xmu.edu.cn

$$\|X\|_p = \begin{cases} (|x^1|^p + |x^2|^p + \dots + |x^k|^p)^{1/p}, \\ 1 \leq p < \infty, \\ \max_k |x^k|, \quad p = \infty. \end{cases}$$

特别地当 $p = 2$ 时, 我们把 $\|X\|_2$ 简记为 $\|X\|$.

2 定理及证明

本节给出本文主要结果及其证明. 按图 1 和图 2 中控制顶点的排列顺序在 $\prod_n (n = 0, 1, 2 \dots)$ 中由控制顶点 $P_i^{(n)} (1 \leq i \leq N+5)$ 所构成的子网格与 \prod_0 具有相同的拓扑结构. 关于这些子网格之间的关系, 首先建立如下两个定理.

定理 1 在控制网格 $\prod_n (n = 0, 1, 2 \dots)$ 中由控制顶点 $P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, \dots, P_N^{(n)}$ 构成的 N 边形, 则有

$$\sum_{i=1}^N \frac{P_i^{(n)}}{N} = \sum_{i=1}^N \frac{P_i^{(0)}}{N} \triangleq P_0 \quad (1)$$

且若记

$$T_0^{(n)} = \max\{\|P_i^{(n)} - P_0\| : i = 1, 2, \dots, N\},$$

有

$$T_0^{(n)} \leq K^n T_0^{(0)} \quad (2)$$

其中 $K = \frac{1}{2} + \frac{1}{2N} + \frac{\lceil \frac{N}{6} \rceil}{N}$, $\lceil \frac{N}{6} \rceil$ 表示小于 $\frac{N}{6}$ 的最大整数.

证明 由 Door-Sabin 细分规则的对称性知式(1)成立. 直接计算得到

$$4N(P_1^{(1)} - P_0) = (N+1)P_1 + (2\cos \frac{2\pi}{N} - 1)P_2 + (2\cos \frac{4\pi}{N} - 1)P_3 + \dots + (2\cos \frac{2(N-2)\pi}{N} - 1)P_{N-1} + (2\cos \frac{2(N-1)\pi}{N} - 1)P_N,$$

注意到上式所有 $P_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 的系数之和为零, 若设所有 $P_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 的正项系数之和为 A , 那么

$$\|P_1^{(1)} - P_0\| \leq \frac{A}{2N} T_0^{(0)},$$

显然有且仅有 $P_1, P_i, P_{N+2-i} (i = 2, 3, \dots, \lceil \frac{N}{6} \rceil)$ 的系数非负且 P_i 与 $P_{N+2-i} (i = 2, 3, \dots, N)$ 的系数相等, 从而

$$A = (N+1) + 2[(2\cos \frac{2\pi}{N} - 1) + (2\cos \frac{4\pi}{N} - 1) + \dots + (2\cos \frac{2(k-1)\pi}{N} - 1)] \leq N+1 + 2\lceil \frac{N}{6} \rceil$$

因此

$$\|P_1^{(1)} - P_0\| \leq K T_0^{(0)}.$$

由 Door-Sabin 细分规则的特征知

$$\|P_i^{(1)} - P_0\| \leq K T_0^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

且

$$\|P_i^{(n)} - P_0\| \leq K T_0^{(n-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

递推即可得式(2)成立.

在控制网格 $\prod_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ 中, 设所有 4 边形的边长最大值为 T_n 即

$$T_n = \max\{\|P_i^{(n)} - P_j^{(n)}\| : P_i^{(n)} \text{ 与 } P_j^{(n)} \text{ 互为相邻点, } i, j \neq 3, 4, \dots, N-1\}.$$

定理 2 设控制网格 \prod_n 是对初始网格 \prod_0 作用 n 次 Door-Sabin 细分规则后得到的新网格, 则

$$T_n \leq \max\{\frac{1}{2}T_{n-1}, \frac{1}{4}T_{n-1} + 2a_N K^n T_0^{(0)}\} \quad (3)$$

其中 $a_N = \frac{3}{4} - \frac{4 + \cos \frac{2\pi}{N}}{2N} (N \geq 3)$.

证明 首先证

$$T_1 \leq \max\{\frac{1}{2}T_0, \frac{1}{4}T_0 + 2a_N \cdot K T_0^{(0)}\} \quad (4)$$

见图 2, 易证 T_n 中除 $\|P_N^{(1)} - P_{N+1}^{(1)}\|, \|P_1^{(1)} - P_{N+2}^{(1)}\|, \|P_1^{(1)} - P_{N+4}^{(1)}\|, \|P_2^{(1)} - P_{N+5}^{(1)}\|$ 以外, 其它的边长都不超过 $\frac{1}{2}T_0$, 直接计算有

$$\|P_N^{(1)} - P_{N+1}^{(1)}\| = \|\frac{3}{16}(P_N - P_{N+1}) + \frac{1}{16}(P_1 - P_{N+2}) - (\frac{1}{2} - \frac{5}{4N})P_N - (\frac{1}{4} - \frac{3 + 2\cos \frac{2\pi}{N}}{4N})P_1 + \sum_{i=2}^{N-1} \frac{3 + 2\cos \frac{2\pi(i-N)}{N}}{4N}P_i\| \leq \frac{1}{4}T_0 + 2a_N \cdot K T_0^{(0)}.$$

对 $\|P_1^{(1)} - P_{N+2}^{(1)}\|, \|P_1^{(1)} - P_{N+4}^{(1)}\|, \|P_2^{(1)} - P_{N+5}^{(1)}\|$ 有相同的结论, 从而式(4)成立. 由 Door-Sabin 细分规则的特性, 知

$$T_n \leq \max\{\frac{1}{2}T_{n-1}, \frac{1}{4}T_{n-1} + 2a_N \cdot K T_0^{(n-1)}\} \quad (5)$$

由式(2)和式(5)即可得式(3)成立.

作为定理 1 和定理 2 的直接推论, 得本文的一个结论.

推论 1 对 n 水平的控制网格 $\prod_n (n = 0, 1,$

$2, \dots)$, 记所有边长的最大值为 M_n , 即

$M_n = \max\{ \|P_i^{(n)} - P_j^{(n)}\|; P_i^{(n)} \text{ 与 } P_j^{(n)} \text{ 互为相邻点} \},$

则

$$M_n \leq \max\{ T_n, 2K^n T_0^{(0)} \},$$

事实上当 $N = 4$ 时, $M_n \leq \frac{1}{2^n} T_0$.

参考文献:

- [1] Doo D, Sabin M. Analysis of the behavior of recursive division surface [J]. Computer Aided Design, 1978, 10(6): 356 - 360.

- [2] 曾晓明, 杨军. Catmull Clark 细分曲面的误差分析 [J]. 厦门大学学报: 自然科学版, 2004, 43(1): 1- 3.
- [3] Jos Stam. Exact evaluation of Catmull Clark subdivision surfaces at arbitrary parameter values [C] // Proceedings of Siggraph 98. USA: Addison Wesley, 1998: 395- 400.
- [4] 王国瑾, 汪国昭, 郑建民. 计算机辅助几何设计 [M]. Germany: Springer, 2001: 362- 366.
- [5] Reif U. Best bounds on the approximation of polynomials and splines by their control structure [J]. Computer Aided Geometric Design, 2000(17): 579- 589.

Estimation of Convergence of Doo Sabin Surface Control Meshes

CHENG Huang he, ZENG Xiaoming*

(School of Mathematical Science, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: The Doo Sabin surface was designed to generalize the bi quadric B spline surface to the meshes of arbitrary topology. In this paper, the convergence rate of control meshes of Doo Sabin surface was estimated. The control meshes of Doo Sabin surface converge in an exponential rate was proved, and a computing formula for estimation of convergence rate of Doo Sabin surface control meshes was given.

Key words: Doo Sabin surfaces; control meshes; subdivision surfaces; rate of convergence