2006 年 5 月 Journal of Xiamen University (Natural Science) May 2006

• 研究简报 •

Prandtl 方程整体解的存在惟一性

徐新英, 赵俊宁*

(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 考虑非定常的 Prandtl 方程 $U(t,x)=x^m U_1(t,x)$, 且 $m\geqslant 1$, $0\leqslant x<L$ 的特殊情况, 在本文的条件下, 所研究的方程具有奇性. 首先利用 Crocco 变换把 Prandtl 方程变换成一个关于 w 的方程, 然后将其正则化, 借助于正则化以后的方程得到 w_ε(正则化后方程的解) 及其各种一阶导数的估计. 利用得到的各种估计通过取极限得到了 Crocco 变换后方程解的存在惟一性. 最后返回边界层, 得到 Prandtl 方程全局解的存在惟一性.

关键词: Prandtl 方程; 整体解

中图分类号: O 175　　文献标识码: A　　文章编号: 0438-0479(2006)03-0436-03

1 主要结论

考虑下列非定常的 Prandtl 方程:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y = u_{yy} + U_t + UU_x \\ u_x + v_y = 0 \end{cases} \tag{1}$$

在区域 $D=\{0<t<T, 0<x<L, 0<y<\infty\}$ 上的初边值条件为:

$$\begin{cases} u(0,x,y) = u_0(x,y),\ u(t,0,y) = 0 \\ v(t,x,0) = v_0(t,x),\ u(t,x,0) = 0 \\ \lim\limits_{y\to\infty} u(t,x,y) = U = x^m U_1(t,x) \end{cases} \tag{2}$$

这里 $m\geqslant 1$, $U_1(t,x)>0$, $UU_x+U_t\geqslant 0$, $v_0(t,x)\leqslant 0$[1].

应用 Crocco 变换:

$$\tau = t,\ \xi = x,\ \eta = \frac{u}{U},\ w(\tau,\xi,\eta) = \frac{u_y}{U} \tag{3}$$

则问题(1)~(2) 被变成下列边界层问题:

$$w_\tau + \eta U w_\xi + Aw_\eta + Bw - w^2 w_{\eta\eta} = 0,\ 在\ \Omega_T\ 上 \tag{4}$$

$$w(0,\xi,\eta) = w_0(\xi,\eta) = \frac{u_{0y}}{U(0,x)},\ w(\tau,\xi,1) = 0 \tag{5}$$

$$ww_\eta - v_0 w + \left(U_\xi + \frac{U_\tau}{U}\right) = 0,\ 当\ \eta = 0 \tag{6}$$

其中 $\Omega_T=\{(\tau,\xi,\eta)\mid 0<\tau<T, 0<\xi<L, 0<\eta<1\}$,

$$A = (1-\eta^2)U_\xi + (1-\eta)\frac{U_\tau}{U},\ B = \eta U_\xi + \frac{U_\tau}{U} \tag{7}$$

现在定义式(4)~(6) 的弱解. 设

$$\mathrm{sgn}_\beta s = \int_0^s h_\beta(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8}$$

这里 $\beta>0$, $h_\beta(s)=\frac{2}{\beta}\left(1-\frac{|s|}{\beta}\right)_+$. 显然 $h_\beta(s)\in C(R)$, $h_\beta(s)\geqslant 0$; $|sh_\beta(s)|\leqslant 1$, $|\mathrm{sgn}_\beta s|\leqslant 1$; $\lim\limits_{\beta\to 0}\mathrm{sgn}_\beta s=\mathrm{sgn}\, s$, $\lim\limits_{\beta\to 0} sh_\beta(s)=0$.

本文中 $X=(\tau,\xi,\eta)$, $\mathrm{d}X=\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau$, $\Omega_T=(0,L)\times(0,1)\times(0,T)$, $\Omega_0=(0,L)\times(0,1)$, $\Omega_1=(0,L)\times(0,T)$, $\Omega_2=(0,1)\times(0,T)$.

定义 1　称 w 是式(4)~(6) 弱解, 若 $w\in BV(\Omega_T)\cap L^\infty(\Omega_T)$ 且满足下列条件:

(i) $w_\eta\in L^2(\Omega_T)$ 并且存在非负常数 C 满足

$$C^{-1}(1-\eta)\leqslant w\leqslant C(1-\eta),\ \forall(\tau,\xi,\eta)\in\Omega_T \tag{9}$$

(ii) 对任意的 $\varphi\in C_0^2(\Omega_T)$, $\varphi\geqslant 0$, $V=w^{-1}$ 满足下面的积分不等式:

$$\int_{\Omega_T} I_\beta(V-k)\{\varphi_\tau + (\eta U\varphi)_\xi + (A\varphi)_\eta\}\mathrm{d}X + \int_{\Omega_T} B\,\mathrm{sgn}_\beta(V-k)V\varphi\mathrm{d}X - \int_{\Omega_T} V^{-2}V_\eta^2\mathrm{sgn}'_\beta(V-k)\varphi + \int_{\Omega_T} G_\beta(V,k)\varphi_{\eta\eta}\mathrm{d}X \geqslant 0 \tag{10}$$

其中

$$I_\beta(s) = \int_0^s \mathrm{sgn}_\beta\tau\mathrm{d}\tau,$$

$$G_\beta(V,k) = \int_k^V s^{-2}\mathrm{sgn}_\beta(s-k)\mathrm{d}s.$$

收稿日期: 2005-06-29

作者简介: 徐新英(1977-), 女, 博士研究生.

* 通讯作者: Jnzhao@xmu.edu.cn

$$\mathrm{sgn}_\beta s = \int_0^s h_\beta(\tau)\,d\tau, \beta > 0;$$

$$h_\beta(s) = \frac{2}{\beta}\left(1 - \frac{|s|}{\beta}\right)_+.$$

(iii) 在迹的意义下满足初边值条件.

定义 2　函数 $u(t,x,y)$, $v(t,x,y)$ 称为非定常边界层问题(1) ~ (2) 的解, 如果 $u(t,x,y)$、$v(t,x,y)$ 满足以下条件:

(i) $u \in L^\infty(D) \cap BV(D)$, $u_y \in L^\infty(D) \cap BV(D)$, $u_{yy} \in L^2(D)$;

(ii) 存在一个常数 $C > 0$ 满足

$$C^{-1}U(x,t)\left(1 - \frac{u(t,x,y)}{U(t,x)}\right) \leqslant u_y(t,x,y) \leqslant CU(x,t)\left(1 - \frac{u(t,x,y)}{U(t,x)}\right);$$

(iii) 设 $\tau = t, \xi = x, \eta = \dfrac{u}{U}, w(\tau,\xi,\eta) = \dfrac{u_y}{U}$, 则 $w(\tau,\xi,\eta)$ 是方程(4) ~ (6) 在定义 1 意义下的解;

(iv) $v(t,x,y)$ 是 D 中的一个正规测度, 满足

$$\int_D [u_{yy}\varphi + u\varphi_t + \frac{u^2}{2}\varphi_x + (UU_x + U_t)\varphi - vu_y\varphi]\,dt\,dx\,dy = 0, \forall \varphi \in C_0^1(D).$$

注　如果 $w_\tau, w_\xi \in L^2(\Omega_T)$, 那么对几乎处处 $(t,x,y) \in D$, $w, u_x, v, v_y \in L^2(D)$ 且 u, v 满足方程(1).

定理 1　假设 $U(\tau,\xi)$, $w_0(\xi,\eta)$, $v_0(\tau,\xi)$ 充分光滑,

$$U_1(\tau,\xi) > 0, U_\tau + UU_\xi \geqslant 0, v_0(\tau,\xi) \leqslant 0;$$

并且存在非负常数 C_0 使得

$$C_0^{-1}(1-\eta) \leqslant w_0(\xi,\eta), w_1(\tau,\eta) \leqslant C_0(1-\eta) \tag{11}$$

则式(4) ~ (6) 存在弱解 $w \in BV(\Omega_T) \cap L^\infty(\Omega_T)$[2].

定理 2　方程(4) ~ (6) 的解惟一.

定理 3　假设 $U(t,x)$, $v_0(t,x)$, $u_0(x,y)$, $u_1(t,y)$ 充分光滑且满足下面的条件:

$$U_1(t,x) > 0, UU_x + U_t \geqslant 0, v_0(t,x) \leqslant 0;$$

$$C^{-1}\left(1 - \frac{u_0(x,y)}{U(0,x)}\right) \leqslant \frac{u_{0y}(x,y)}{U(0,x)} \leqslant C\left(1 - \frac{u_0(x,y)}{U(0,x)}\right);$$

$$C^{-1}\left(1 - \frac{u_1(t,y)}{U(t,0)}\right) \leqslant \frac{u_{1y}(t,y)}{U(t,0)} \leqslant C\left(1 - \frac{u_1(t,y)}{U(t,0)}\right).$$

则问题(1) ~ (2) 存在定义 2 意义下的惟一弱解.

2　定理 1 的证明

为了得到问题(4) ~ (6) 的解, 我们首先是把式(4) ~ (6) 正则化, 然后取正则化以后的解 w_ε 的极限作为原问题的解. 为了证明 w_ε 的紧致性, 我们需要对 w_ε 及其导数进行一些估计.

考虑式(4) ~ (6) 正则化以后的问题:

$$w_\tau + \eta U w_\xi + Aw_\eta + Bw - \Psi^2(w)w_{\eta\eta} - \varepsilon\Psi^2(w)w_{\xi\xi} = 0, \text{在 } \Omega_T \text{ 上} \tag{12}$$

$$w(0,\xi,\eta) = w_{0\varepsilon}(\xi,\eta), w(\tau,0,\eta) = w_{1\varepsilon}(\tau,\eta),$$
$$w(\tau,L,\eta) = w_{2\varepsilon}(\tau,\eta), w(\tau,\xi,1) = \varepsilon \tag{13}$$

$$\Psi(w)w_\eta - v_0\Psi(w) + \left(U_\xi + \frac{U_\tau}{U}\right) = 0, \text{当 } \eta = 0 \tag{14}$$

其中 A, B 的表达式见式(7), $w_{0\varepsilon}$, $w_{1\varepsilon}$, $w_{2\varepsilon}$ 充分光滑且

$$\begin{cases} w_{0\varepsilon} \to w_0 \\ w_{0\varepsilon}|_{\eta=1} = w_{1\varepsilon}|_{\eta=1} = w_{2\varepsilon}|_{\eta=1} = \varepsilon \\ C_0^{-1}(1+\varepsilon-\eta) \leqslant w_{0\varepsilon}, w_{1\varepsilon}, w_{2\varepsilon} \leqslant C_0(1+\varepsilon-\eta) \end{cases} \tag{15}$$

$$\Psi_\varepsilon(w) = \begin{cases} w, & \text{当 } w \geqslant \mu\varepsilon \\ \dfrac{\mu}{2}\varepsilon & \text{当 } w \leqslant 0 \end{cases} \tag{16}$$

假设 $\Psi_\varepsilon(s) \in C^1(R)$, $0 \leqslant \Psi'_\varepsilon(s) \leqslant 1$, $\mu > 0$.

众所周知式(12) ~ (14) 存在惟一解 $w_\varepsilon \in C^2(\overline{\Omega}_T) \cap C^3(\Omega_T)$[8]. 由强极值原理可得

$$w_\varepsilon \geqslant C\varepsilon,$$

这里常数 C 与 ε 无关.

在式(16) 选 $\mu = C$, 那么式(12) 和(14) 可变为:

$$w_\tau + \eta U w_\xi + Aw_\eta + Bw - w^2 w_{\eta\eta} - \varepsilon w^2 w_{\eta\eta} = 0, \text{在 } \Omega_T \text{ 上} \tag{17}$$

$$ww_\eta - v_0 w + \left(U_\xi + \frac{U_\tau}{U}\right) = 0, \text{当 } \eta = 0 \tag{18}$$

为了证明 w_ε 的紧致性, 我们需要下面的估计.

引理 1　问题(17)、(18)、(13) 的解 w_ε 满足

$$C_1^{-1}(1+\varepsilon-\eta) \leqslant w_\varepsilon \leqslant C_1(1+\varepsilon-\eta).$$

引理 2　$V_\varepsilon = w_\varepsilon^{-1}$, 它满足

$$\int_{\Omega_T} (\xi + \varepsilon^{\frac{1}{2}})^{-\alpha}(1+\varepsilon-\eta)^\beta[(V_\varepsilon^{-1})_\eta^2 + \varepsilon(V_\varepsilon^{-1})_\xi^2]\,dX \leqslant C,$$

其中 $C > 0$ 与 ε 无关, $0 < \alpha < 1$, $\beta > -1$.

利用引理 2 和 Hölder 不等式, 可以得到下面的推论.

推论 1　假设 w_ε 是问题(17)、(18)、(13) 的解, 则存在一个与 ε 无关常数 $C > 0$ 满足

$$\int_{\Omega_T} |w_{\varepsilon\eta}|\,d\tau\,d\xi\,d\eta \leqslant C.$$

引理 3　问题(17)、(18)、(13) 的解 w_ε 满足

$$\int (|w_{\varepsilon\tau}| + |w_{\varepsilon\xi}|)\,d\xi\,d\eta|_{\tau=t} \leqslant C,$$

其中 C 与 ε 无关.

利用引理 1～ 引理 3 就可以证明正则化后的方程(17)、(18)、(13) 解的极限(当 $\varepsilon \to 0$) 就是式(4)～(6) 解[3], 即证明了定理 1.

3　Prandtl 方程解的存在性

令

$$y = \int_0^{\frac{u}{U(t,x)}} w^{-1}(t, x, \eta)\,d\eta \tag{19}$$

由 $C^{-1}(1-\eta) \leqslant w \leqslant C(1-\eta)$, $U \geqslant 0$, 有

$$u \to U(t, x),\ y \to \infty.$$

由 $u_y = U(t, x) w$ 和定理 1, 可以得到

$$w|_{t=0} = w_0 = \frac{u_{0y}}{U},\ w|_{\eta=1} = 0,$$

因此 $u|_{t=0} = u_0$, $u|_{x=0} = u_1$, $u|_{y=0} = 0$.

通过计算还可以得到的表达式 u_t, u_x, u_y, u_{yy}.

然后令

$$v = \frac{-w - uu_x + u_{yy} + UU_x + U_t}{u_y} \tag{20}$$

可以具体把 u_t, u_x, u_y, u_{yy} 代入得到 v, 再计算出 v_y, 通过验证, u, v 确实满足方程(1).

4　弱解的惟一性

为了证明前面得到的解的惟一性, 我们需要下面的引理.

引理 4　假设 w_1, w_2 是方程(4)～(6) 的两个解, 则

$$\int_{\Omega_T} |V_1 - V_2| \{\varphi_t + (\eta U\varphi)_\xi + (A\varphi)_\eta + B\varphi\} dX + \int_{\Omega_T} |V_1^{-1} - V_2^{-1}| \varphi_{\eta\eta} dX \geqslant 0,$$

其中 $V_1 = w_1^{-1}$, $V_2 = w_2^{-1}$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_T)$.

利用上述引理就可以证明定理 2, 然后由定理 2 就可以证明问题(1)～(2) 解的惟一性.

参考文献:

[1] Oleinik A Samokhin. Mathematical Models in Boundary Layer[M]. USA: Chapman & Hall/CRC, 1999.

[2] Vol'pert A I. BV space and quasilinear equations[J]. Mat. sb., 1967, 73: 255-302.

[3] Evans L C. Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations[C]// Conference Board of the Mathematical Sciences, Regional Conferences Series in Mathematics. Phode Island: American Mathematical Society Proridence, 1998: 74.

The Existence and Uniquence of the Globle Solution to Prandtl Equation

XU Xin-ying, ZHAO Jun-ning*

(School of Mathmatical Science, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: The Prandtl system for a non-stationary Prandtl equation is considered in this paper. It is assumed that $U(t, x, y) = x^m U_1(t, x)$ in the nonstationary case, where $m \geqslant 1$ and $0 \leqslant x \leqslant L$. The aim of this article is to prove the existence and uniquence of the globle solution to this equation. But it is a singular equation in the condition of this article. Firstly the Prandtl equation is changed to another equation of w by Crocco transformation. Then the equation is regularized and some estimates of w_ε(the solution of the regularlized equation) and the partial of w_ε are gotten. The limit of w_ε can be proved to be the solution of the equation of w. Lastly the existence and uniquence of the globle solution to Prandtl equation is proved.

Key words: Prandtl equation; globle solution