第 37 卷　第 4 期　　厦门大学学报(自然科学版)　　Vol. 37　No. 4
1998 年 7 月　　Journal of Xiamen University (Natural Science)　　Jul. 1998

A_n 型完备例外序列的个数①

林亚南　苏秀萍
(厦门大学数学系　厦门　361005)

摘要　利用垂直范畴与倾斜理论, 给出计算 A_n 型完备例外序列个数的归纳公式

关键词　完备例外序列, A_n 型图的表示, 倾斜模, 垂直范畴
中国图书分类号　O 153.3

1　定理与概念

1992 年, 莫斯科大学 Rudakov 教授在加拿大数学年会上报告了 P^2 的向量界的例外序列[1]. 1993 年, 英国 Crawley-Boevey 教授引进了图的表示的例外序列概念, 指出辫子群自然地作用于图的表示的完备例外序列并研究其性质[2]. 1994 年开始, Ringel 教授[3]、姚海楼[4]亦得到关于完备例外序列的一些重要研究成果. 本文将证明如下的定理 1.

定理 1　设 k 为代数闭域, 高 A_n 型完备例外序列的个数为 S_n, 则

$$S_n = \frac{n+1}{2}(S_{n-1} + C^1_{n-1}S_1S_{n-2} + C^2_{n-1}S_2S_{n-3} + \cdots + C^{n-2}_{n-1}S_{n-2}S_1 + C^{n-1}_{n-1}S_{n-1})$$

本文总假定 k 为代数闭域, 代数 A 总指基的带单位元 1 的有限维结合 k-代数. 本文不区分一个 A-模与它的同构类以及 A 的 AR-箭图中对应的点. 设 A 是一个代数, $1_A = e_1 + \cdots + e_n$, 这里 $\{e_i\}$ 是本原正交幂等元, 不可分解 A-投射模的完全集为 $\{P(i)\}_{i=1}^n$. 记 $\mathrm{mod}A$ 为有限维左 A-模范畴, $\mathrm{ind}A$ 是 $\mathrm{mod}A$ 中不可分解模的类. A 称为 A_n 型的遗传代数, 即 A_n 型的图代数, 如果 $A = k\vec{Q}$, 这里 $\vec{Q}$ 是箭图, 其忘掉箭向后的底图为 $\overset{1}{\cdot} —— \overset{2}{\cdot} \cdots \overset{n-1}{\cdot} —— \overset{n}{\cdot}$. 一个不可分解 A-模 X 称为例外的, 如果 $\mathrm{Ext}^1_A(X, X) = 0$. A_n 型遗传代数上任一不可分解模均为例外的. 一对 A-模 (X, Y) 称为例外对, 如果 X、Y 均为例外模且 $\mathrm{Hom}_A(Y, X) = 0 = \mathrm{Ext}^1_A(Y, X)$. 例外对 (X, Y) 称为正交的, 如果 $\mathrm{Hom}_A(X, Y) = 0$. 例外对 (X, Y) 称为强的, 如果 $\mathrm{Ext}^1_A(X, Y) = 0$. 模序列 $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_r)$ 称为例外序列, 如果对任意 $i < j$, (X_i, X_j) 是例外对. 特别地, 当 $r = n$ 时, 称 $\mathbf{X}$ 为完备例外序列.

由 Geigle, Lenzing, Schofield[5,6] 引进的垂直范畴在研究有限维代数的表示理论中是非常有力的工具, 它提供了归纳证明的可能性. 设 X 是不可分解 A-模, X 的右垂直范畴为 $\mathrm{mod}A$ 的满子范畴, 定义为 $X^{\perp} = \{Y \in \mathrm{mod}A \mid \mathrm{Hom}_A(X, Y) = 0 = \mathrm{Ext}^1_A(X, Y)\}$.

2　定理 1 的证明: 线性序的情况

称 A 为线性序的 A_n 型遗传代数, 如果 $A = k\vec{Q}$, $\vec{Q}$: $\overset{1}{\cdot} \leftarrow \overset{2}{\cdot} \leftarrow \overset{3}{\cdot} \leftarrow \cdots \overset{n-1}{\cdot} \leftarrow \overset{n}{\cdot}$. 我们知道线性

① 本文 1998-01-21 收到;　国家自然科学基金、福建省自然科学基金和教育部优秀青年教师资助项目

序A_n型遗传代数的AR-箭图如图1, 对其进行编号, 其中$X_0^j = P(j)$为不可分解投射模, $X_i^j = \tau^{-i}P(j)$, $j = 1, \cdots, n$, $i = 0, \cdots, n-j$, 这里τ是AR-变换. 为叙述方便起见, 我们定义(见图2)

$$E_i^j = \{X_s^t \mid i \le s \le n-j,\ i+j \le s+t\}$$
$$W_i^j = \{X_s^t \mid s < i,\ i \le s+t < i+j\}$$
$$N_i^j = \{X_s^t \mid s < i,\ i+j \le s+t\}$$
$$S_i^j = \{X_s^t \mid i \le s,\ t+s < i+j\}$$
$$E_i^j = \{X_s^t \mid i \le s \le n-j,\ i+j \le s+t\}$$
$$L_i^j = \{X_s^t \mid s < i-1,\ s+t < i\}$$
$$R_i^j = \{X_s^t \mid i+j < s,\ i+j < s+t\}$$

易见, 当$i = 0$时, $L_0^j = W_0^j = N_0^j = \varnothing$. 因为代数闭域上有限表示型代数是标准的, 我们有

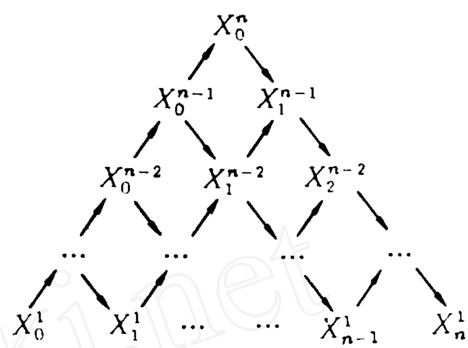

图1　A_n型遗传代数的AR-箭图

Fig. 1　AR-quiver of hereditary algebra of type A_n

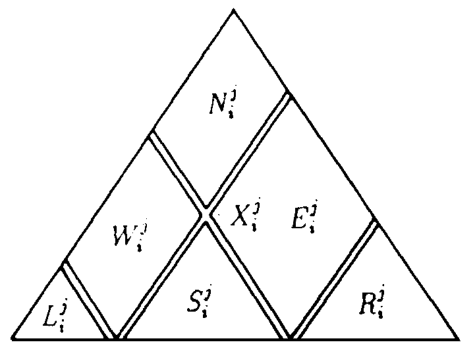

图2　一些记号的示意图

Fig. 2　Sketch map of some notations

引理1　1) 设Y是不可分解模, 则$\mathrm{Hom}_A(X_i^j, Y) \neq 0$的充要条件是$Y \in E_i^j$;

2) 设Y是不可分解模, 则$\mathrm{Ext}_A^1(X_i^j, Y) \neq 0$的充要条件是$Y \in W_i^j$;

3) $\mathrm{ind}(X_i^j)^{\perp} = S_i^j \cup N_i^j \cup L_i^j \cup R_i^j$.

引理2　设X, Y是不可分解模,

1) $X \in S_i^j$, $Y \in L_i^j \cup N_i^j \cup R_i^j$, 则$(X, Y)$是强的正交例外对;

2) $X \in L_i^j$, $Y \in R_i^j$, 则(X, Y)是强的正交例外对.

引理3　$(X_i^j)^{\perp} = \mathrm{mod}(B \oplus C)$, 这里$B$为$A_{j-1}$型线性序遗传代数, C是A_{n-j}型线性序遗传代数.

证　设$X_s^t \in (X_i^j)^{\perp}$. 当$X_s^t \in S_i^j$时, 存在满射$f: X_i^{s+t-i} \to X_s^t$, 这里$f$或是同构或是不可约满射的合成. 当$X_s^t \in L_i^j \cup R_i^j \cup N_i^j$, 时, 存在投射盖$f: X_0^{s+t} \to f_s^t$, 这里$f$或为同构或为不可约满射的合成. 所以$X_0^1, \cdots X_0^{i-1}, X_0^{i+j}, \cdots, X_0^{i+j}, X_i^1, \cdots X_i^{j-1}$是$(X_i^j)^{\perp}$的相对投射生成子. 因$(X_i^j)^{\perp}$是$\mathrm{mod}A$的正合的扩张闭的Abel满子范畴, 故有$(X_i^j)^{\perp} = \mathrm{mod}D$, 这里$D = \mathrm{End}_A(X_0^1 \oplus \cdots \oplus X_0^{i-1} \oplus X_0^{i+j} \oplus \cdots \oplus X_0^n \oplus X_i^1 \oplus \cdots \oplus X_i^{j-1})$. 由引理2知$D = B \oplus C$, $B = \mathrm{End}_A(X_i^1 \oplus \cdots \oplus X_i^{j-1})$是$A_{j-1}$型线性序遗传代数, $C = \mathrm{End}_A(X_0^1 \oplus \cdots \oplus X_0^{i-1} \oplus X_0^{i+j} \oplus \cdots \oplus X_0^n)$是$A_{n-j}$型线性序遗传代数.

定理的证明(A为线性序的情况)　设A_n型完备例外序列的个数为S_n, 并定义$S_0 = 1$. 记$E_i^j = \{(X_1, \cdots, X_{n-1}, X_i^j)$完备例外序列$\}$, $S_i^j = |E_i^j|$. 则$(X_1, \cdots, X_{n-1})$是$(X_i^j)^{\perp}$中完备例外序列的充要条件是$(X_1, \cdots, X_{n-1}, X_i^j) \in E_i^j$, 由引理3知$S_i^j$为$\mathrm{mod}(B \oplus C)$中完备例外序列的个数, 这里$B, C$分别是$A_{j-1}$型与$A_{n-j}$型线性序遗传代数. 故知$S_i^j = S_0^j = S_0^{n-j+1}$和$S_i^j = C_{n-1}^{j-1} S_{j-1} S_{n-j}$, $j = 1, \cdots, n$; $i = 0, \cdots, n-j$. 这样, $S_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{n-j} S_i^j = nS_0^1 + (n-1)S_0^2 + \cdots + 2S_0^{n-1} + S_0^n$, 进一步有

$S_n = \dfrac{n+1}{2}(S_0^1 + S_0^2 + \cdots + S_0^n)$. 所以 $S_n = \dfrac{n+1}{2}(C_{n-1}^0 S_0 S_{n-1} + C_{n-1}^1 S_1 S_{n-2} + C_{n-1}^2 S_2 S_{n-3} + \cdots + C_{n-1}^{n-2} S_{n-2} S_1 + C_{n-1}^{n-1} S_{n-1} S_0)$.

注 $S_1 = 1, S_2 = 3, S_3 = 16, S_4 = 125, S_5 = 1\ 296, S_6 = 16\ 807, S_9 = 10^8$.

3 定理的证明: APR-倾斜过程

APR-倾斜[7]过程是BGP[8]反射函子的一般化, 是倾斜理论的起源与特殊情况 设 A 是一个代数, $S(i)$ 是非入射的单投射模, 则模 $T = \tau^{-} S(i) \oplus (\bigoplus_{j \neq i} P(j))$ 称为相对于 $S(i)$ 的APR-倾斜模 记 $B = \mathrm{End}(_A T)$. 由倾斜理论[9], 我们知道

1) 函子 $\mathrm{Hom}_A(T, -)$ 与 $T \otimes_B -$ 导出下列满子满畴的可逆等价

$$\mathcal{T}(_A T) = \{_A M \mid \mathrm{Ext}_A^1(T, M) = 0\} \underset{T \otimes_B -}{\overset{\mathrm{Hom}_A(T,-)}{\rightleftarrows}} \mathcal{Y}(_A T) = \{_B N \mid \mathrm{Tor}_1^B(T, N) = 0\}$$

同时函子 $\mathrm{Ext}_A^1(T, -)$ 与 $\mathrm{Tor}_1^B(T, -)$ 导出下列满子范畴的可逆等价

$$\mathcal{F}(_A T) = \{_A M \mid \mathrm{Hom}_A(T, M) = 0\} \underset{\mathrm{Tor}_1^B(T,-)}{\overset{\mathrm{Ext}_A^1(T,-)}{\rightleftarrows}} \mathcal{X}(_A T) = \{_B N \mid T \otimes_B N = 0\}$$

2) $\mathrm{Tor}_1^B(T, -)\mathrm{Hom}_A(T, -) = 0 = (T \otimes_B -)\mathrm{Ext}_A^1(T, -)$

$\mathrm{Hom}_A(T, -)\mathrm{Tor}_1^B(T, -) = 0 = \mathrm{Ext}_A^1(T, -)(T \otimes_B -)$

因为任意两个 A_n 型遗传代数均可由重复APR-倾斜过程得到 要论证定理成立, 只要证明APR-过程对遗传代数保持完备例外序列不变即可. 又因完备例外序列定义以及APR-倾斜模是可分的, 我们只要证明APR-过程对遗传代数保持例外对即可. 即证明

命题 1 设 A 是遗传代数, T 是 APR-倾斜 A-模, $B = \mathrm{End}(_A T)$, 符号同上 设 (X, Y) 是 mod$A$ 中例外对, 则 (X', Y') 是 mod$B$ 中例外对, 这里, 当 $X \in \mathcal{T}(T)$ 时, $X' = \mathrm{Hom}_A(T, X)$, 当 $X \in \mathcal{F}(T)$ 时, $X' = \mathrm{EXt}_A^1(T, X)$; 当 $Y \in \mathcal{T}(T)$ 时, $Y' = \mathrm{Hom}_A(T, Y)$, 当 $Y \in \mathcal{F}(T)$ 时, $Y' = \mathrm{EXt}_A^1(T, X)$.

证 在APR-倾斜过程中 $\mathcal{F}(T)$ 只含一个模, 即投射单模, 我们分下列 3 种情况讨论

1) $X, Y \in \mathcal{T}(T)$, 这时结论显然成立, 因 $\mathcal{T}(T)$, $\mathcal{Y}(T)$ 均为扩张闭的, 且 $\mathrm{Hom}_A(T, -)$ 导出 $\mathcal{T}(T)$ 与 $\mathcal{Y}(T)$ 之间的等价.

2) $X \in \mathcal{T}(T)$, $Y \in \mathcal{F}(T)$. 此时 $X' = \mathrm{Hom}_A(T, X) \in \mathcal{Y}(T)$, $Y' = \mathrm{Ext}_A^1(T, Y) \in \mathcal{X}(T)$. 因 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是挠对, 所以 $\mathrm{Hom}_B(Y', X') = 0$, 假设 $\mathrm{Ext}_B^1(Y', X') \neq 0$, 即存在不可裂正合序列 $0 \to X' \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} Y' \to 0$ (*). A 是遗传代数, 所以 T 是可裂的, 我们不妨设 $E' = E_1' \oplus E_2'$, $f' = (f_1', f_2')$, 这里 $f_i': X' \to E_i'$, $i = 1, 2$ $E_1' = \mathrm{Hom}_A(T, E_1) \in \mathcal{Y}(T)$, $E_2' = \mathrm{Ext}_A^1(T, E_2) \in \mathcal{F}(T)$, $E_1 \in \mathcal{T}(T)$, $E_2 \in \mathcal{F}(T)$. 因 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是挠对, 所以 $f_2' = 0$, 而 $f_1' = \mathrm{Hom}_A(T, f)$. 将函子 $T \otimes -$ 作用于正合列(*), 得到正合列 $Y \to X \xrightarrow{f} E_1 \to 0$. 因 $\mathrm{Hom}_A(Y, X) = 0$, 所以 f 导出 $X \cong E_1$, 进而 f 导出 $X' \cong E_1'$, 这与(*)不可裂矛盾 所以 $\mathrm{Ext}_B^1(Y', X') = 0$.

3) $X \in \mathcal{F}(T)$, $Y \in \mathcal{T}(T)$. 这时 $X' = \mathrm{Ext}_A^1(T, X) \in \mathcal{X}(T)$, $Y' = \mathrm{Hom}_A(T, Y) \in \mathcal{Y}$, X 为非入射单投射模, X' 为非投射单入射模 所以 $\mathrm{Ext}_B^1(Y', X') = 0$. 为证明 $\mathrm{Hom}_B(Y', X') = 0$, 我们假设 $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_B(Y', X')$. 因 X' 为单模, 故 f 满 设 $K' = \mathrm{Ker} f$. 因 X 对子模封闭, 可设 $K' = \mathrm{Hom}_A(T, K)$, $K \in \mathcal{T}(T)$. 作用函子 $T \otimes_B -$ 于正合序列 $0 \to K' \to Y' \xrightarrow{f} X' \to 0$, 可得到正合列 0

$\to X \to K \to Y \to 0$, 因 $\mathrm{Ext}_A^1(Y, X) = 0$, 所以 $K \cong X \oplus Y$, 与 $X \in \mathbf{F}(T)$ 矛盾.

注 下面例子说明命题 1 中"A 是遗传代数"的条件是必要的.

例 1 $A = k(\overset{2}{\cdot} \xrightarrow{\alpha} \overset{1}{\cdot} \xleftarrow{\beta} \overset{3}{\cdot} \xleftarrow{\gamma} \overset{4}{\cdot})/<\beta r>$. 取 A PR-倾斜 A-模 $T = \tau^- P(1) \oplus (\bigoplus_{j \neq 1} P(j))$, $\mathrm{End}({}_A T) = k\left(\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[dr, "\sigma"] & & \\ & \overset{3}{\bullet} & \overset{4}{\bullet} \arrow[l, "\sigma"'] \\ \overset{2}{\bullet} \arrow[ur, "\omega"'] & & \end{tikzcd}\right)/<\delta\sigma>$. $X = P(1) \in \mathbf{F}(T)$, $Y = S(4) \in \mathbf{J}(T)$, 易见 (X, Y) 是 $\mathrm{mod}A$ 中例外对. 在 $\mathrm{mod}B$ 中, $X' \doteq \mathrm{Ext}_A^1(T, X) = S(3)$, $Y' \doteq \mathrm{Hom}_A(T, Y) = S(4)$, $\mathrm{Ext}_B^1(Y', X') = 0$, 故 (X', Y') 不是例外对.

参 考 文 献

1 Rudakov A N. Helices and vector bundles London Math. Soc, LNS 148, 1992

2 Crawley-Boevey W. Exceptional sequences of representations of quivers proceedings of ICRA VI Carleton - Ottawa Math., 1992, 14: 117～124

3 Ringel C M. The braid group action on the set of exceptional sequendes of a hereditary artin algebra. Contemp. Math., 1994, 171: 339～352

4 Hailou Yao. Endomorphism algebras of exceptional sequences of type A_n. Algebra Colloq., 1996, 3: 25～32

5 Geigle W, Lennzing H. Perpendicular categories with applications to representations and sheaves J. Algebra, 1991, 144: 173～343

6 Schofild A. Semi-invariants of quivers J. London Math. Soc, 1991, 43: 385～395

7 Auslander M, Plateek M I, Reiten I Coxeter functors without diagrams Trans Amer. Math. Soc, 1979, 250: 1～46

8 Bernstein I N, Gelfand I M, Ponomarev V A. Coxeter functors and Gabriel's theorem. Uspechi Mat. Nauk, translated in Russian Math. Suveys, 1973, 28: 17～32

9 Happel D, Ringel C M. Tilted algebras Tran. Amer. Math. Soc, 1982, 274: 399～443

The Number of the Complete Exceptional Sequences of Type A_n

Lin Ya'nan Su Xiuping

(Dept. of Math., Xiamen Univ., Xiamen 361005)

Abstract By using the perpendicular categories and tilting theory, an inductive formula to compute the number of the complete exceptional sequences of type A_n was presented.

Key words Complete exceptional sequences, Representations of quiver of type A_n, Tilting module, Perpendicular category