第 41 卷　第 2 期　　厦门大学学报(自然科学版)　　Vol. 41　No. 2
2002 年 3 月　　Journal of Xiamen University (Natural Science)　　Mar. 2002

文章编号:0438-0479(2002)02-0145-03

# 拟遗传代数的好模范畴

林卫强[1] ,林亚南[2]

(1. 漳州师范学院数学系,福建 漳州 363000;2. 厦门大学数学系,福建 厦门 361005)

**摘要**: 用图表示范畴的两个子范畴 $\mathrm{rep}_1^{\leq}(Q, I)$ 和 $\mathrm{rep}_2^{\leq}(Q, I)$ 及其性质,刻划了拟遗传代数的好模范畴,余好模范畴及特征模. 主要结论给出了 $A \in \mathrm{rep}_1^{\leq}(Q, I)$ 及 $\mathbf{F}(\Delta) = \mathrm{rep}_1^{\leq}(Q, I)$ 的刻划及其对偶结论.

**关键词**: 拟遗传代数;图表示范畴;好模范畴

**中图分类号**: O 153.3　　**文献标识码**:A

为了研究在复半单李代数及代数群的表示理论中出现的最高权范畴,Cline, Parshall 及 Scott 提出拟遗传代数的概念[1]. 研究结果表明拟遗传代数是相当普遍的,许多自然出现的代数被证明是拟遗传代数. Dlab 和 Ringel 从环论和模论的角度介绍了拟遗传代数的好模范畴、余好模范畴、特征模等重要概念并讨论了它们的性质[2]. 本文利用图表示的两个子范畴及其性质[3],刻划拟遗传代数上的好模范畴等.

## 1　记号与概念

文中代数 A 总指代数闭域 $k$ 上的连通的基的带单位元 1 的有限维结合代数. 模皆指有限生成左 $A$-模,并用 $A$-mod 表示有限生成左 $A$ 模范畴. 态射 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ 的复合记为 $gf$. $D$ 表示反变对偶函子 $\mathrm{Hom}_k(-, k)$.

总设 $Q = (Q_0, Q_1)$ 是有限箭图,这里 $Q_0$ 是点集,$Q_1$ 是箭集. 把 $Q$ 中箭 $\rho$ 的起点记为 $s(\rho)$,终点记为 $t(\rho)$. $Q$ 中一条非平凡路是一个箭序列 $w = a_l \cdots a_1 (l \geq 1)$ 满足 $t(a_i) = s(a_{i+1})$, $1 \leq i < l$;规定路的起点 $s(w) = s(a_1)$,路的终点 $t(w) = t(a_l)$;对任意点 $i \in Q_0$,定义平凡路 $e_i$. $Q$ 中所有路的集合记为 $W$, $Q$ 中所有以 $i$ 为起点的路的集合记为 $W_i$, $Q$ 中所有以 $i$ 为终点的路的集合记为 $W_i$, $Q$ 的关系指的是 $Q$ 的长度不小于 2 的路的线性组合, $kQ$ 表示 $Q$ 的路代数, I 是由 $Q$ 的关系集合生成的 $kQ$ 的理想. 路 $w$ 在自然同态: $kQ \to kQ/I$ 下的像记为 $\overline{w}$. 带关系箭图 $(Q, I)$ 上的一个表示指的是 $V = (V_i, V_a)_{\substack{i \in Q_0 \\ a \in Q_1}}$,这里 $V_i$ 是有限维 $k$- 线性空间, $V_a$ 是 $k$- 线性映射 $V_a: V_{s(a)} \to V_{t(a)}$,满足:对于 $\rho = \sum \lambda_i w_i \in I$,有 $\sum \lambda_i V_{w_i} = 0$;这里 $w_i = a_l \cdots a_1 \in W$, $V_{w_i} = V_{a_l} \cdots V_{a_1}$. 从 $(Q, I)$ 的一个表示 $V = (V_i, V_a)_{\substack{i \in Q_0 \\ a \in Q_1}}$ 到另一个表示 $U = (U_i, U_a)_{\substack{i \in Q_0 \\ a \in Q_1}}$ 的态射为 $f = (f_i)_{i \in Q_0}$, $f_i$ 是 $k$- 线性映射: $V_i \to U_i$,且满足 $f_{t(a)} V_a = U_a f_{s(a)}$. 态射的合成定义为 $(g_i)_{i \in Q_0} \cdot (f_i)_{i \in Q_0} = (g_i f_i)_{i \in Q_0}$ 则得到带关系的表示范畴,记为 $\mathrm{rep}(Q, I)$. 因为 $\mathrm{rep}(Q, I) \cong kQ/I$-mod,本文不区分代数 $kQ/I$ 上的模与 $(Q, I)$ 的表示. 总设 $Q_0$ 被赋予良序" $\leq$ ",记为 $Q_0 = \{1 < 2 < \cdots < n\}$,记带序和关系的箭图为 $(Q, \leq, I)$,对应的代数 $A \cong kQ/I$ 的单模赋予相同的序,记全体单模的集合为 $\{E(i), 1 \leq i \leq n\}$,用 $P(i)$ 和 $I(i)$ 分别表示 $E(i)$ 的投射盖和入射包. 记 $\Delta(i)$ 为 $P(i)$ 的合成因子形如 $E(j)(j \leq i)$ 的极大商模,并称它为标准模. $\nabla(i)$ 为 $I(i)$ 的合成因子形如 $E(j)(j \leq i)$ 的极大子模,称它为余标准模. $\Delta = \{\Delta(1), \cdots, \Delta(n)\}$, $\nabla = \{\nabla(1), \cdots, \nabla(n)\}$. $[M : E(i)]$ 表示 $E(i)$ 作为模 M 的合成因子的次数. 对任一模类 $\theta$,用 $\mathbf{F}(\theta)$ 记 $A$-mod 的满子范畴,其中每个对象具有一个子模滤链使得每个因子同构于 $\theta$ 中的某个对象. 代数 $(A, \trianglelefteq)$ 被称为拟遗传代数,如果: (i) 对所有 $i \in Q_0$, $\Delta(i)$ 是 schurian,即 $\mathrm{End}(\Delta(i)) \cong k$; (ii) $P(i) \in \mathbf{F}(\Delta)$, $i \in Q_0$. 当 A 是拟遗传代数时,称 $\mathbf{F}(\Delta)$ 为好

收稿日期:2001-06-20
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10071062),福建省教育厅科研基金资助项目(JB00201)
作者简介:林卫强(1966 - )男,硕士.

模范畴,称 $\mathbf{F}(\nabla)$ 为余好模范畴. Ringel 在[4]证明了 $\mathbf{F}(\Delta)\cap\mathbf{F}(\nabla)=\operatorname{add}T$,这里 $T$ 是倾斜余倾斜模,称为特征模. $\operatorname{add}T$ 为 $T$ 的所有直和项的直和所构成的满子范畴, $T=T(1)\oplus T(2)\oplus\cdots\oplus T(n)$, $T(i)$ 是不可分解的,且当 $i\neq j$ 时 $T(i)\neq T(j)$.

下面回顾[3]引进图表示的两个子范畴的定义. 对任意 $i\in Q_0$,记

$$W=\{w\in W \mid w\notin I, w=a_l\cdots a_2a_1, s(w)>t(\alpha_a), 1\leq a\leq l\}$$

$$W=\{w\in W \mid w\notin I, w=a_l\cdots a_2a_1, 1\leq a\leq l, t(w)>s(\alpha_a)\}$$

$$\dot{i}=\{w\in W\cap_i W \mid w=a_l\cdots a_2a_1, s(\alpha_a)\leq i, 2\leq a\leq l\}$$

$$i=\{w\in W\cap W_i \mid w=a_l\cdots a_2a_1, s(\alpha_a)\leq i, 2\leq a\leq l\}$$

范畴 $\operatorname{rep}(Q,I)$ 中的一个表示 $(V_i,V_a)_{\substack{i\in Q_0\\ i\in Q_1}}$,称为 $(Q,\leq,I)$ 的第一类表示,如果满足:

(1)对任意 $w\in W$, $V_w$ 是单射;

(2)对任意 $i\in Q_0$, $\bigoplus_{w\in\dot{i}}\operatorname{Im}V_w=\sum_{w\in\dot{i}}\operatorname{Im}V_w$.

范畴 $\operatorname{rep}(Q,I)$ 中的一个表示 $(V_i,V_a)_{\substack{i\in Q_0\\ \alpha\in Q_1}}$ 称为 $(Q,\leq,I)$ 的第二类表示,如果满足:

(1)对任意 $w\in W$, $V_w$ 是满射;

(2)对任意 $i\in Q_0$, $\bigoplus_{w\in i}\operatorname{Im}DV_w=\sum_{w\in i}\operatorname{Im}DV_w$.

$(Q,\leq,I)$ 的全体第一、二类表示,分别记为 $\operatorname{rep}_1^{\leq}(Q,I)$ 和 $\operatorname{rep}_2^{\leq}(Q,I)$,它们具有如下性质.

定理[3]　(1) $\operatorname{rep}_1^{\leq}(Q,I)$ 对子表示、扩张、直和、直和项、封闭;

(2) $\operatorname{rep}_2^{\leq}(Q,I)$ 对同态象、扩张、直和、直和项封闭.

(3) $\operatorname{rep}_1^{\leq}(Q,I)=\bigcap_{i\in Q_0}\ker\operatorname{Hom}(\operatorname{coker}P(\dot{i}),-)$,

(4) $\operatorname{rep}_2^{\leq}(Q,I)=\bigcap_{i\in Q_0}\ker\operatorname{Hom}(-,\ker I(i))$

## 2　结论和证明

引理 1　(1) 若对任意的 $i,j\in Q_0$,有 $\bigoplus_{w\in\dot{i}}\operatorname{Im}P(j)_w=\sum_{w\in\dot{i}}\operatorname{Im}P(j)_w$;则 $\operatorname{coker}P(\dot{i})\cong\tau^{-}\nabla(i)$;

(2) 若对任意的 $i,j\in Q_0$,有 $\bigoplus_{w\in i}\operatorname{Im}DI(j)_w=\sum_{w\in i}\operatorname{Im}DI(j)_w$;则 $\ker I(i)\cong\tau\Delta(i)$;

证 (2)　i) 先证对满射 $f:P(i)\to\Delta(i)$,有 $\operatorname{topker}f=\bigoplus_{w\in i}E(t(w))$.

根据 $i$ 的定义对任意的 $w\in i$,有 $[\Delta(i):E(t(w))]=0$, $[P(i):E(t(w))]\neq 0$,且 $\operatorname{topker}f\subset\bigoplus_{w\in i}E(t(w))$.

故若存在 $w\in i$,使得 $E(t(w))\not\subset\operatorname{topker}f$,则存在 $w_t\in i$, $0\neq\lambda_t\in k$, $w_t'\in_{t(w)}W$,其中 $1\leq t\leq a$, $w_t\neq w$;使得 $\sum_{t=1}^{a}\lambda_t\overline{w_t'\cdot w_t}=\overrightarrow{w}$.

于是对入射表示 $I(t(w))$ 存在 $w_t\in i(1\leq t\leq a)$, $w\in i$,使得 $\sum_{t=1}^{a}\operatorname{Im}DI(t(w))_{w_t}+\operatorname{Im}DI(t(w))_w\neq\bigoplus_{t=1}^{a}\operatorname{Im}DI(t(w))_{w_t}\oplus\operatorname{Im}DI(t(w))_w$,

故 $\sum_{w_t\in i}\operatorname{Im}DI(t(w))w_{w_t}\neq\bigoplus_{t=1}^{a}\operatorname{Im}DI(t(w))_{w_t}$. 这就与已知矛盾.

综上所述, $\operatorname{topker}f=\bigoplus_{w\in i}E(t(w))$.

ii) 再证 $\ker I(\mathrm{i})\cong\tau\Delta(i)$

首先,对满射 $f:P(i)\to\Delta(i)$ 有 $\operatorname{topker}f=\bigoplus_{w\in i}E(t(w))$,所以有 $\Delta(i)$ 的极小投射予解式为 $\cdots\to\bigoplus_{w\in i}P(t(w))\xrightarrow{g}P(i)\xrightarrow{f}\Delta(i)\to 0$. 故有正合列

$$\operatorname{Hom}(P(i),A)\xrightarrow{\operatorname{Hom}(g,A)}\bigoplus_{w\in i}\operatorname{Hom}P(t(w)),A)\to Tr\Delta(i)\to 0,$$

于是得正合列

$$0\to\tau\Delta(i)\to\bigoplus_{w\in i}\operatorname{DHom}P(t(w)),A)\xrightarrow{\operatorname{DHom}(g,A)}\operatorname{DHom}(P(i),A).$$

又 $\bigoplus_{w\in i}\operatorname{DHom}(P(t(w)),A)\cong\bigoplus_{w\in i}I(t(w))$, $\operatorname{DHom}(P(i),A)\cong I(i)$, $\operatorname{DHom}(g,A)\cong I(i)$,所以 $\tau\Delta(i)\cong\ker I(i)$.

对偶地可证(1)成立.

注: 一般情况下, $\tau\Delta(i)\cong\ker I(i)$ 和 $\operatorname{coker}p(\dot{i})\cong\tau^{-}\nabla(i)$ 未必成立.

例　对 $Q$:
$$\begin{tikzcd} & 4 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\lambda"] & \\ 1 \arrow[dr, "\beta"'] & & 3 \arrow[dl, "\mu"] \\ & 2 & \end{tikzcd}$$
, $I=<\beta\alpha-\mu\lambda>$,

有 $\tau^{-1}\nabla(2) = 3$, $P(2): P(2) \to P(3) \oplus P(4)$, $\operatorname{coker} P(2) = \begin{smallmatrix} & 4 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \oplus 3 \neq \tau^{-1}\nabla(2)$.

**引理 2**　对 $(Q, \leq, I)$, 下列命题等价:

(1) $A \in \operatorname{rep}_1^{\leq}(Q, I)$;

(2) $P(i) \in \operatorname{rep}_1^{\leq}(Q, I)$, $1 \leq i \leq n$;

(3) $\operatorname{rep}_1^{\leq}(Q, I) = \ker\operatorname{Ext}_A^1(-, \nabla)$.

**证**　因 $\operatorname{rep}_1^{\leq}(Q, I)$ 对直和、直和项封闭, 故 (1)⇔(2).

(2)⇒(3) 根据定理[3]及引理 1 有 $\operatorname{rep}_1^{\leq}(Q, I) = \bigcap_{i \in Q_0} \ker\operatorname{Hom}_A(\tau^{-1}\nabla(i), -)$, 又 $\ker\operatorname{Ext}_A^1(-, \nabla) = \bigcap_{i \in Q_0} \ker \underline{\operatorname{Hom}}_A(\tau^{-1}\nabla(i), -)$, 故 $\operatorname{rep}_1^{\leq}(Q, I) \subset \ker\operatorname{Ext}_A^1(-, \nabla)$.

反之, 设 $M \in \ker\operatorname{Ext}_A^1(-, \nabla)$ 则对任意 $i \in Q_0$, 有 $\underline{\operatorname{Hom}}_A(\tau^{-1}\nabla(i), M) = 0$. 于是对任意的 $f \in \operatorname{Hom}_A(\tau^{-1}\nabla(i), M)$, $f$ 可通过某个投射模 $P$ 分解, 即 $f = gh$, $h \in \operatorname{Hom}_A(\tau^{-1}\nabla(i), P)$, $g \in \operatorname{Hom}_A(P, M)$. 又 $P \in \operatorname{rep}_1^{\leq}(Q, I)$ 故对任意的 $i \in Q_0$, $\operatorname{Hom}_A(\tau^{-1}\nabla(i), P) = 0$, 即 $h = 0$, 所以 $f = 0$, 故 $\operatorname{Hom}_A(\tau^{-1}\nabla(i), M) = 0$. 因而 $\ker\operatorname{Ext}_A^1(-, \nabla) \subset \operatorname{rep}_1^{\leq}(Q, I)$.

(3)⇒(1) 因 $A \in \ker\operatorname{Ext}_A^1(-, \nabla)$, 故 $A \in \operatorname{rep}_1^{\leq}(Q, I)$.

同理可得下列对偶结论.

**引理 2'** 对 $(Q, \leq, I)$, 下列命题等价:

(1) $DA_A \in \operatorname{rep}_2^{\leq}(Q, I)$;

(2) $I(i) \in \operatorname{rep}_2^{\leq}(Q, I)$, $1 \leq i \leq n$;

(3) $\operatorname{rep}_2^{\leq}(Q, I) = \ker\operatorname{Ext}_A^1(\Delta, -)$.

**定理 1**　若由 $(Q, \leq, I)$ 给出的代数 $(A, \trianglelefteq)$ 是拟遗传代数, 则下列命题等价:

(1) $\mathbf{F}(\Delta) = \operatorname{rep}_1^{\leq}(Q, I)$;

(2) $A \in \operatorname{rep}_1^{\leq}(Q, I)$;

(3) $T \in \operatorname{rep}_1^{\leq}(Q, I)$, 其中 $T$ 为特征模;

(4) $\Delta(i) \in \operatorname{rep}_1^{\leq}(Q, I)$, $1 \leq i \leq n$.

**证**　(1)⇒(2) 因 $A$ 是拟遗传代数, $\mathbf{F}(\Delta) = \ker\operatorname{Ext}_A^1(-, \nabla)$, 由引理 2 得结论.

(1)⇒(3) 因 $\operatorname{add} T = \mathbf{F}(\Delta) \cap \mathbf{F}(\nabla) \subset \mathbf{F}(\Delta) = \operatorname{rep}_1^{\leq}(Q, I)$.

(3)⇒(4) 因 $\Delta(i)$ 是 $T(i)$ 的子模, $T(i)$ 是 $T$ 的直和项, 于是有 $\Delta(i) \in \operatorname{rep}_1^{\leq}(Q, I)$.

(4)⇒(2) 因 $A$ 是拟遗传的, 故 $A \in \mathbf{F}(\Delta)$, 又 $\Delta \in \operatorname{rep}_1^{\leq}(Q, I)$, 由于 $\operatorname{rep}_1^{\leq}(Q, I)$ 对扩张闭, 对直和闭, 故有 $A \in \operatorname{rep}_1^{\leq}(Q, I)$.

对偶地有下列结论.

**定理 1**　若由 $(Q, \leq, I)$ 给出的代数 $(A, \trianglelefteq)$ 是拟遗传代数, 则下列命题等价:

(1) $\mathbf{F}(\nabla) = \operatorname{rep}_2^{\leq}(Q, I)$

(2) $DA_A \in \operatorname{rep}_2^{\leq}(Q, I)$

(3) $T \in \operatorname{rep}_2^{\leq}(Q, I)$, 其中 $T$ 为特征模;

(4) $\nabla(i) \in \operatorname{rep}_2^{\leq}(Q, I)$, $1 \leq i \leq n$.

## 参考文献:


[1] Cline E, Parshall B, Scott L. Finite dimensional algebras and highest weight categories [J]. J. Reine Angew. Math., 1988, 391: 85 - 99.

[2] Dlab V, Ringel C M. The module theoretical approach to quasi-hereditary algebras [J]. LMS Lecture Notes Series, 1992, 168: 200 - 224.

[3] 林卫强. 图表示范畴的两个子范畴[J]. 数学研究, 2001, 4.

[4] Ringel C M. The category of modules with good filtrations over quasi-hereditary algebras has almost split sequences [J]. Math. Zeit, 1991, 208: 209 - 223.


# The Category of Good Modules over Quasi-hereditary Algebra


LIN Wei-qiang[1], LIN Ya-nan[2]

(1. Dept. of Math. Zhangzhou Teacher's College, Zhangzhou 363000, China;
2. Dept. of Math., Xiamen Univ., Xiamen 361005, China)



**Abstract:** Using two kinds of subcategories of the categories of representation of quivers, $\operatorname{rep}_1^{\leq}(Q, I)$ and $\operatorname{rep}_2^{\leq}(Q, I)$, and their properties, we discuss some properties of the category of good modules, the category of cogood modules, and the characteristic module of $A \in \operatorname{rep}_1^{\leq}(Q, I)$ quasi-hereditary algebra. As the main result, we give the characterization of $A \in \operatorname{rep}_1^{\leq}(Q, I)$ and $\mathbf{F}(\Delta) = \operatorname{rep}_1^{\leq}(Q, I)$ and their dual results.



**Key words:** quasi-hereditary algebra; category of the representation of quivers; category of good modules