第34卷第4期 数学进展 Vol.34, No.4
2005年 8月 ADVANCES IN MATHEMATICS Aug., 2005

量子环面上斜导子李代数的表示

林卫强[1,2] 谭绍滨[1]

(1. 厦门大学数学系，厦门，福建， 361005; 2. 漳州师范学院数学系，漳州，福建， 363000)

摘要：记 L 为量子环面上的斜导子李代数，本文构造了一族从 sl_2- 模到 L- 模的函子 F_g^α, 并对 L- 模 $F_g^\alpha(V)$ 的结构进行了完全刻画．最后给出了 L- 模 $F_{g_1}^\alpha(V)$ 与 $F_{g_2}^\beta(W)$ 同构的充分必要条件．

关键词：李代数；斜导子；表示理论；量子环面
MR(1991) 主题分类：17B10; 17B68 / **中图分类号**：O152.5
文献标识码：A **文章编号**：1000-0917(2005)04-0477-11

0 引言

对每个线性李代数的表示，文 [S] 具体地构造出交换结合代数上导子李代数的子代数全形的一类表示．文 [E2] 研究了 Larsson 函子的像的结构，所谓 Larsson 函子的像，事实上是 [S] 中构造的与一般线性李代数 gl_n 的表示相对应的交换结合代数的全体导子构成的李代数的一类表示．受到他们工作的启发，本文先回顾量子环面上斜导子李代数 L 的定义，接着构造一族从特殊线性李代数 sl_2 的模 V 到 L- 模的函子 F_g^α, 然后刻画了 $F_g^\alpha(V)$ 的结构，最后给出 L- 模 $F_{g_1}^\alpha(V)$ 与 $F_{g_2}^\beta(W)$ 同构的充分必要条件．本文所得结果包含了文 [E2] 中的结果．

第 1 节回顾量子环面 $\mathbb{C}_q$ 的定义及其斜导子李代数 L 的定义，并构造一族从 sl_2- 模到 L- 模的函子 F_g^α. 第 2 节定义了格 Γ 上的一个等价关系，并研究了 Γ 在该等价关系下的等价类的结构及 $F_g^\alpha(V)$ 的子模在 L 中内导子的作用下的性质．第 3 节研究了当 q 是 p 次本原单位根时，$F_g^\alpha(V)$ 的子模在 L 中外导子的作用下的性质．第 4 节我们利用第 2,3 节中的结论来刻画 L- 模 $F_g^\alpha(V)$ 的结构，并证明了下述定理．

定理 A 若 q 为 p 次本原单位根， V 为有限维不可约 sl_2- 模，且 $\dim V \geq 3$, 则

(1) 存在 $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$, 使 $g(s) = q^{\lambda s_1 + \mu s_2}$.

(2) $F_g^\alpha(V)$ 为完全可约模，且 $F_g^\alpha(V) = \mathcal{U}' \oplus \mathcal{U}''$, 其中 $\mathcal{U}', \mathcal{U}''$ 为不可约 L- 模.

定理 B 若 q 为 p 次本原单位根， V 为 2 维不可约 sl_2- 模，则

(1) 存在 $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$, 使 $g(s) = q^{\lambda s_1 + \mu s_2}$.

(2) $F_g^\alpha(V)$ 不是完全可约模，但 $F_g^\alpha(V) = \mathcal{U}' \oplus \mathcal{U}''$, 其中 $\mathcal{U}''$ 为不可约 L- 模， $\mathcal{U}'$ 有不可约子模 $\mathcal{W}$, 同时

(a) 若 $\alpha + \theta \notin \mathrm{rad}(f)$, 则 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{U}'$ 的唯一非零真子模，其中 $\theta = -\mu e_1 + \lambda e_2 \in \Gamma$;

(b) 若 $\alpha + \theta \in \mathrm{rad}(f)$, 则 $\mathcal{U}'$ 有唯一极大子模 $\widetilde{\mathcal{W}}$, 且 $\widetilde{\mathcal{W}}/\mathcal{W}$ 为平凡模.

定理 C 若 q 为 p 次本原单位根， V 为一维 sl_2- 模，则

(1) 存在 $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ 使 $g(s) = q^{\lambda s_1 + \mu s_2}$.

(2) $F_g^\alpha(V)$ 为完全可约的，且 $F_g^\alpha(V) = \mathcal{U}' \oplus \mathcal{U}''$, 其中 $\mathcal{U}''$ 为不可约 L- 模，而

收稿日期：2003-07-21.
基金项目：国家自然科学基金 (No. 10071061), 漳州师范学院科研基金.

(a) 若 $\alpha+\theta\notin \mathrm{rad}(f)$, 则 $\mathcal{U}'$ 是不可约 L- 模;

(b) 若 $\alpha+\theta\in \mathrm{rad}(f)$, 则 $\mathcal{U}'=V(-\alpha)\oplus\mathcal{W}$, 其中 $V(-\alpha),\mathcal{W}$ 都为不可约 L- 模.

定理 D 若 $q\neq 0$ 不是单位根, $v_0,v_1,\cdots,v_k$ 为有限维不可约 sl_2- 模 V 的一组基, 则有

(1) 若 $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{Z}$, 都有 $g(s)\neq q^{\lambda s_1+\mu s_2}$, 则 $F_g^{\alpha}(V)=\oplus_{i=0}^{k}\mathcal{U}_i$, 其中 $\mathcal{U}_i=\oplus_{r\in\Gamma}\mathbb{C}v_i(r)$ 为不可约 L- 模.

(2) 若 $\exists\lambda,\mu\in\mathbb{Z}$, 使 $g(s)=q^{\lambda s_1+\mu s_2}$, 则 $F_g^{\alpha}(V)=\mathcal{U}'\oplus\mathcal{U}''$, 其中 $\mathcal{U}'=\oplus_{i=1}^{k}\mathcal{U}_i'$, $\mathcal{U}''=\oplus_{i=1}^{k}\mathcal{U}_i''$, $\mathcal{U}_i'=\oplus_{r\in\mathrm{rad}(f)}\mathbb{C}v_i(\theta+r)$, $\mathcal{U}_i''\ \oplus_{r\notin\mathrm{rad}(f)}\mathbb{C}v_i(\theta+r)$, 且 $\mathcal{U}_i',\mathcal{U}_i''$ 为不可约 L- 模.

最后在第 5 节, 我们证明了下述定理.

定理 E 若 q 为 p 次本原单位根, 则对任意有限维 sl_2- 模 V 与 W, L- 模 $F_{g_1}^{\alpha}(V)$ 与 $F_{g_2}^{\beta}(W)$ 同构的充分必要条件是 $\alpha-\beta\in\Gamma$, $g_2(s)=f(\alpha-\beta,s)g_1(s)$, 且 sl_2- 模 V 与 W 同构.

1 斜导子李代数及其表示

取定复数域 $\mathbb{C}$ 上以 e_1,e_2 为基的向量空间 $\mathcal{U}$, 在 $\mathcal{U}$ 上定义对称双线性型 $(\cdot,\cdot)$ 使 $(e_i,e_j)=\delta_{ij}(1\leq i\leq j\leq 2)$. 令格 $\Gamma=\mathbb{Z}e_1+\mathbb{Z}e_2$.

首先让我们回顾量子环面的定义和一些结论 [MP]. 取定非零复数 q, 量子环面 $\mathbb{C}_q$ 是 $\mathbb{C}$ 上的结合非交换代数, 其生成元为 $x_1^{\pm1},x_2^{\pm1}$, 生成关系为

$$x_2x_1=qx_1x_2, x_ix_i^{-1}=x_i^{-1}x_i=1,\quad 1\leq i\leq 2.$$

对 $n=n_1e_1+n_2e_2\in\Gamma$, 记 $x^n=x_1^{n_1}x_2^{n_2}$. 定义 $\Gamma\times\Gamma$ 到 $\mathbb{C}$ 的两个映射 σ,f 如下: $\forall n=n_1e_1+n_2e_2, m=m_1e_1+m_2e_2\in\Gamma$, $\sigma(n,m)=q^{n_2m_1}$, $f(n,m)=q^{n_2m_1-n_1m_2}$. 定义 f 的根基为 $\mathrm{rad}(f)=\{n\in\Gamma|f(n,m)=1,\forall m\in\Gamma\}$, 则有

$$\sigma(n,m)=\sigma(m,n)=1,\quad \forall n\in\mathrm{rad}(f), m\in\Gamma,$$

且当 q 为 p 次本原单位根时, $\mathrm{rad}(f)=\{k_1pe_1+k_2pe_2|k_1,k_2\in\mathbb{Z}\}$. $\mathbb{C}_q$ 上有度导子 d_1,d_2 满足 $\forall n=n_1e_1+n_2e_2\in\Gamma, d_i(x^n)=n_ix^n(1\leq i\leq 2)$. $\mathbb{C}_q$ 上的内导子 $adx^n(n\in\Gamma)$, 在 $\mathbb{C}_q$ 上的作用为 $adx^n(x^m)=(\sigma(n,m)-\sigma(m,n))x^{n+m}$, 显然当 $n\in\mathrm{rad}(f)$ 时, $adx^n=0$. 事实上关于 $\mathbb{C}_q$ 的导子集 $\mathrm{Der}(\mathbb{C}_q)$ 有如下结论 [BGK],

$$\mathrm{Der}(\mathbb{C}_q)=\oplus_{n\in\Gamma}\mathrm{Der}(\mathbb{C}_q)_n,$$

其中, 当 $n\notin\mathrm{rad}(f)$ 时, $\mathrm{Der}(\mathbb{C}_q)_n=\mathbb{C}adx^n$; 当 $n\in\mathrm{rad}(f)$ 时, $\mathrm{Der}(\mathbb{C}_q)_n=\oplus_{i=1}^{2}\mathbb{C}x^nd_i$.

对任一向量空间中的向量组 $u_1,\cdots,u_k$, 用 $\langle u_1,\cdots,u_k\rangle$ 表示它们在 $\mathbb{C}$ 上张成的线性子空间. $\forall r\in\mathrm{rad}(f)$, $u\in\mathcal{U}$, 记 $D(u,r)=x^r(u_1d_1+u_2d_2)$. 记 $L=\langle D(u,r)|(u,r)=0,r\in\mathrm{rad}(f),u\in\mathcal{U}\rangle\oplus\langle adx^n|n\in\Gamma\rangle$, 称其为量子环面 $\mathbb{C}_q$ 的斜导子集合. 事实上我们容易验证下述两个结论.

引理 1.1 令 $L=\langle D(u,r)|(u,r)=0,r\in\mathrm{rad}(f),u\in\mathcal{U}\rangle\oplus\langle adx^n|n\in\Gamma\rangle$, 则 L 为 $\mathrm{Der}(\mathbb{C}_q)$ 的李子代数.

设 x_+,x_-,h 为单李代数 sl_2 的 Chevalley 基, 即, $[h,x_+]=2x_+,[h,x_-]=-2x_-,[x_+,x_-]=h$. 记

$$A(u,r)=r_1u_2x_++r_2u_1x_-+r_1u_1h,$$

其中 $u=u_1e_1+u_2e_2\in\mathcal{U}, r=r_1e_1+r_2e_2\in\mathrm{rad}(f)$.

引理 1.2 设 g 为从 Γ 到 $\mathbb{C}$ 的函数, 满足 $g(n)g(m)=g(n+m)(\forall n,m\in\Gamma)$, 且 $g(s)=1(\forall s\in\mathrm{rad}(f))$, 则

(1) 若 $q\neq 0$ 不是单位根, 则存在 $a,b\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 使 $g(n)=a^{n_1}b^{n_2}$;

(2) 若 q 是 p 次本原单位根, 则存在 $\lambda,\mu\in\mathbb{Z}$, 使 $g(n)=q^{\lambda n_1+\mu n_2}$.

从现在起我们取定一个具有引理 1.2 所述性质的函数 g, 以及 $\alpha\in\mathcal{U}$. 下面我们构造一个从 sl_2- 模到 L- 模的函子 F_g^α.

定义 1.3 对任意 sl_2- 模 V, $\forall n\in\Gamma$, 令 $V(n)=\{v(n)|v\in V,n\in\Gamma\}$ 为向量空间 V 的线性同构. 定义映射 $F_g^\alpha: sl_2$- 模 $\to L$- 模, $V\mapsto F_g^\alpha(V)=\oplus_{n\in\Gamma}V(n)$. 规定 L 中元素在 $F_g^\alpha(V)$ 上的作用如下:

(1) $\forall s\notin \mathrm{rad}(f)$, $v\in V$, $adx^s v(n)=\sigma(s,n)(g(s)-f(n,s))v(s+n)$;

(2) $\forall r\in\mathrm{rad}(f)$, $u\in\mathcal{U}$, $D(u,r)v(n)=(u,n+\alpha)v(n+r)+A(u,r)v(n+r)$.

根据上述定义容易验证 $F_g^\alpha(V)$ 为 $L-$ 模, 且 F_g^α 是一个从 sl_2- 模到 L- 模的函子, 并有下述结论:

引理 1.4 (1) 设 V 为有限维 sl_2- 模, 则 $F_g^\alpha(V)$ 是关于 Cartan 子代数 $\{D(u,0)|u\in\mathcal{U}\}$ 的 L 权模, 且它的每个权子空间的维数都等于 V 的维数.

(2) 若 V_1,V_2 为 sl_2- 模, 则 $F_g^\alpha(V_1\oplus V_2)=F_g^\alpha(V_1)\oplus F_g^\alpha(V_2)$.

由于每一个有限维 sl_2- 模都是完全可约的, 故研究 L- 模 $F_g^\alpha(V)$ 的结构只须考虑 V 为不可约模的情形. 此外, 由于权模的子模仍是权模, 故若 W 为 L 模 $F_g^\alpha(V)$ 的子模, 则可记 $W=\oplus_{n\in\Gamma}W(n)$, 其中 $W(n)$ 为 W 的权子空间.

2 Γ 上的等价关系

本节给出了 Γ 上的一个等价关系, 并且详细研究了该等价关系下的等价类. 在第 3,4 节中我们将用这些结果来证明 $F_g^\alpha(V)$ 的结构定理. 对任意 $n\in\Gamma$, 令

$\Gamma_n^1=\{s\notin\mathrm{rad}(f)|f(n,s)\neq g(s)\}$,

$\Gamma_n^2=\{s\notin\mathrm{rad}(f)|f(n,s)=g(s)$ 且存在 $r\notin\mathrm{rad}(f)$, 使 $f(n,r)\neq g(r)$, $f(n+s,r)\neq g(r)\}$,

$\Gamma_n^3=\{s\notin\mathrm{rad}(f)|f(n,s)=g(s)$ 且 $\forall r\notin\mathrm{rad}(f)$ 有 $f(n,r)=g(r)$ 或 $f(n+s,r)=g(r)\}$,

$\Gamma_n=\Gamma_n^1\cup\Gamma_n^2\cup\mathrm{rad}(f)$,

则 $\Gamma=\mathrm{rad}(f)\uplus\Gamma_n^1\uplus\Gamma_n^2\uplus\Gamma_n^3$, $\mathrm{rad}(f)+\Gamma_n=\Gamma_n$.

由此及定义 1.3, 容易验证如下两个引理.

引理 2.1 设 W 为 L- 模 $F_g^\alpha(V)$ 的子模, 对 $n\in\Gamma$, $v\in V$, 则

(1) 若 $v(n)\in W(n)$ 且 $s\in\Gamma_n^1\cup\Gamma_n^2$, 则 $v(n+s)\in W(n+s)$.

(2) 若 $m+s\in\Gamma_n^3$, 则 $adx^s v(n+m)=0$, 其中 $m\in\Gamma_n$.

引理 2.2 任给 $n,m\in\Gamma$, 则有

$$m-n\in\Gamma_n\Leftrightarrow n+\Gamma_n=m+\Gamma_m,$$

$$(n+\Gamma_n)\cap(m+\Gamma_m)\neq\emptyset\Leftrightarrow n+\Gamma_n=m+\Gamma_m,$$

$$m\in\Gamma_n^1\Leftrightarrow -m\in\Gamma_{m+n}^1,$$

$$m\in\Gamma_n^2\Leftrightarrow -m\in\Gamma_{m+n}^2,$$

且 $\forall s\in\mathrm{rad}(f)$, 有 $\Gamma_n^1=\Gamma_{n+s}^1$, $\Gamma_n^2=\Gamma_{n+s}^2$.

根据引理 2.2 的结论我们可以在 Γ 上定义一个等价关系.

定义 2.3 任给 $n,m\in\Gamma$, 定义 $n\sim m$ 当且仅当 $n+\Gamma_n=m+\Gamma_m$, 则 $\sim$ 是 Γ 上的一个等价关系. 记 $\Gamma^*=\Gamma/\sim$, s 的等价类记为 $\bar{s}$, 则有 $\bar{s}=s+\Gamma_s$ 且 $\Gamma=\uplus_{s\in\Gamma^*}\bar{s}$.

引理 2.4 (1) 若 $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{Z}$, 都有 $g(s)\neq q^{\lambda s_1+\mu s_2}$, 则 $\Gamma=\bar{0}$;

(2) 若存在 $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$, 使 $g(s) = q^{\lambda s_1 + \mu s_2}$, 记 $\theta = -\mu e_1 + \lambda e_2$, 则有

(i) 当 $q = 1$ 时, $\Gamma = \mathrm{rad}(f) = \bar{\theta}$;

(ii) 当 $q \neq 1$ 且 $g(s) \equiv 1$ 时, 则 $\Gamma = \bar{\theta} \uplus \bar{e}_1$, 其中 $\bar{\theta} = \theta + \mathrm{rad}(f)$, $\Gamma^1_{e_1} \neq \emptyset$ 且 $\bar{e}_1 = \{r \mid r \notin \mathrm{rad}(f)\}$;

(iii) 当 $q \neq 1$ 且 $g(s) \not\equiv 1$ 时, 则 $\Gamma = \bar{0} \uplus \bar{\theta}$, 其中 $\bar{\theta} = \theta + \mathrm{rad}(f)$, $\Gamma^1_0 \neq \emptyset$, 且 $\bar{0} = \{\theta + r \mid r \notin \mathrm{rad}(f)\}$.

证明 (1) 若 $\Gamma \neq \bar{0}$, 则存在 $s \in \Gamma^3_0$, 即 $g(s) = 1$ 且 $\forall r \notin \mathrm{rad}(f)$, 有 $g(r) = 1$ 或 $f(s,r) = g(r)$, 亦即 $a^{s_1} b^{s_2} = 1$ 且 $a^{r_1} b^{r_2} = 1$ 或 $q^{s_2 r_1 - s_1 r_2} = a^{r_1} b^{r_2}$.

又 $e_1, e_2 \notin \mathrm{rad}(f)$, (由引理 1.2 可知 $q \neq 1$) 故 $a = 1$ 或 $q^{s_2} = a$ 且 $b = 1$ 或 $q^{-s_1} = b$, 于是存在 $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ 使 $a = q^{\lambda}$, $b = q^{\mu}$. 矛盾产生.

(2) (i) 显然成立.

(ii) 因为 $g(s) \equiv 1$, 故 $\lambda = \mu = 0$, $\theta = 0$, 且显然有 $\Gamma^1_{\theta} = \Gamma^2_{\theta} = \emptyset$, 故 $\bar{\theta} = \mathrm{rad}(f)$.

因为 $e_1 \notin \mathrm{rad}(f)$, 故存在 $s \notin \mathrm{rad}(f)$, 使 $f(e_1, s) \neq 1 = g(s)$, 于是 $\Gamma^1_{e_1} \neq \emptyset$. 现在要证明 $\bar{e}_1 = \{r \mid r \notin \mathrm{rad}(f)\}$, 只须证 $\forall r \notin \mathrm{rad}(f)$, 有 $r - e_1 \in \Gamma_{e_1}$. 否则存在 $m \notin \mathrm{rad}(f)$, 使 $m - e_1 \in \Gamma^3_{e_1}$, 则有 $q^{-m_2} = 1$, 且 $\forall n \notin \mathrm{rad}(f)$, 有 $q^{-n_2} = 1$ 或 $q^{m_2 n_1 - m_1 n_2} = 1$. 于是 $f(m,n) = 1$, 矛盾.

(iii) 因为 $g(s) \not\equiv 1$, 故存在 $s \notin \mathrm{rad}(f)$, 使 $g(s) \neq 1 = f(0,s)$, 于是 $\Gamma^1_0 \neq \emptyset$. 下证 $\theta \notin \bar{0}$, 即证 $\theta \in \Gamma^3_0$. 因为 $g(s) \not\equiv 1$, 故 $\theta \notin \mathrm{rad}(f)$. 此外 $f(0,\theta) = 1 = g(\theta)$, 且 $\forall r \notin \mathrm{rad}(f)$ 有 $f(\theta, r) = q^{\lambda r_1 + \mu r_2} = g(r)$, 故 $\theta \in \Gamma^3_0$.

最后证明 $\bar{\theta} = \theta + \mathrm{rad}(f)$ 且 $\bar{0} = \{\theta + r \mid r \notin \mathrm{rad}(f)\}$. 因为 $\bar{0} = \mathrm{rad}(f) \cup \Gamma^1_0 \cup \Gamma^2_0$, $\Gamma = \mathrm{rad}(f) \cup \Gamma^1_0 \cup \Gamma^2_0 \cup \Gamma^3_0$, $\bar{0} \cup \bar{\theta} \subset \Gamma$ 且 $\bar{0} \cap \bar{\theta} = \emptyset$, 故若 $\forall m \in \Gamma^3_0$ 有 $m - \theta \in \mathrm{rad}(f)$, 则 $\bar{\theta} \subset \Gamma^3_0 \subset \theta + \mathrm{rad}(f) \subset \bar{\theta}$, 于是 $\bar{\theta} = \theta + \mathrm{rad}(f)$ 且 $\Gamma = \bar{0} \cup \bar{\theta}$, 故 $\bar{0} = \Gamma \setminus \bar{\theta} = \{\theta + r \mid r \notin \mathrm{rad}(f)\}$. 所以我们只须证 $\forall m \in \Gamma^3_0$ 有 $m - \theta \in \mathrm{rad}(f)$.

因为 $m \in \Gamma^3_0$, 故 $1 = f(0,m) = g(m) = q^{\lambda m_1 + \mu m_2}$, 且 $\forall r \notin \mathrm{rad}(f)$ 有 $1 = f(0,r) = g(r) = q^{\lambda r_1 + \mu r_2}$ 或 $q^{m_2 r_1 - m_1 r_2} = f(m,r) = g(r) = q^{\lambda r_1 + \mu r_2}$. 由于 $q \neq 1$, 则有 e_1, e_2, $e_1 + e_2 \notin \mathrm{rad}(f)$, 于是由上述结论可得 $q^{\lambda} = 1$ 或 $q^{m_2} = q^{\lambda}$, $q^{\mu} = 1$ 或 $q^{-m_1} = q^{\mu}$, 且 $q^{\lambda+\mu} = 1$ 或 $q^{\lambda+\mu} = q^{m_2 - m_1}$.

情形 1 当 $q^{\lambda} = 1$ 时, 则由 $g(s) \not\equiv 1$ 可得 $q^{\mu} \neq 1$, 故 $q^{\lambda+\mu} \neq 1$, 于是有 $q^{-m_1} = q^{\mu}$, 且 $q^{m_2 - m_1} = q^{\lambda+\mu}$, 故 $q^{m_2} = q^{\lambda} = 1$, 因而 $\forall r \in \Gamma$, 有 $f(m - \theta, r) = q^{(m_2 - \lambda) r_1 - (m_1 + \mu) r_2} = 1$, 故 $m - \theta \in \mathrm{rad}(f)$.

情形 2 当 $q^{\lambda} \neq 1$ 时, 则有 $q^{m_2} = q^{\lambda}$.

子情形 1 当 $q^{\mu} = 1$ 时, 有 $q^{\lambda+\mu} \neq 1$, 故 $q^{m_2 - m_1} = q^{\lambda+\mu}$, 于是 $q^{-m_1} = q^{\mu} = 1$. 因而 $\forall r \in \Gamma$, 有 $f(m - \theta, r) = q^{(m_2 - \lambda) r_1 - (m_1 + \mu) r_2} = 1$, 故 $m - \theta \in \mathrm{rad}(f)$.

子情形 2 当 $q^{\mu} \neq 1$ 时, 有 $q^{-m_1} = q^{\mu}$, 故 $\forall r \in \Gamma$, 有 $f(m - \theta, r) = 1$, 于是 $m - \theta \in \mathrm{rad}(f)$.

推论 2.5 若存在 $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$, 使 $g(s) = q^{\lambda s_1 + \mu s_2}$, 记 $\theta = -\mu e_1 + \lambda e_2$, 则

(1) 当 $q \neq 1$ 时 $\exists n \in \Gamma$; 使 $\Gamma = \bar{\theta} \uplus \bar{n}$, 其中 $\bar{\theta} = \theta + \mathrm{rad(f)}$, $\Gamma^1_n \neq \emptyset$, 且 $\bar{n} = \{\theta + r \mid r \notin \mathrm{rad}(f)\}$;

(2) 当 $q = 1$ 时, $\Gamma = \bar{\theta} = \mathrm{rad}(f)$.

3 $F^{\alpha}_g(V)$ 的子模的性质

当 V 为不可约 sl_2- 模时, 本节研究 L- 模 $F^{\alpha}_g(V)$ 在 L 中外导子作用下的性质. 因为当 q 不是单位根时, $\mathrm{rad}(f) = 0$, L 中外导子的作用并不影响 $F^{\alpha}_g(V)$ 的子模的性质, 故在本节中总设 q 是 p 次本原单位根, 于是 $\mathrm{rad}(f) = \{k_1 p e_1 + k_2 p e_2 \mid k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}$. 我们首先研究 $\dim V > 2$ 时 $F^{\alpha}_g(V)$ 的子模的性质. 为此要利用不可约 sl_2- 模的下述性质.

引理 3.1[H]　若 V 为 $k+1$ 维不可约 sl_2- 模，则 V 中存在一个最高权向量 v_0 和一组基 $\{v_j=\frac{1}{j!}x_-^j.v_0|0\le j\le k\}$ 满足下列条件：

(1) $x_+v_0=0$, $x_+v_j=(k-j+1)v_{j-1}$, $0<j\le k$;

(2) $x_-v_k=0$, $x_-v_j=(j+1)v_{j+1}$, $0\le j<k$;

(3) $hv_j=(k-2j)v_j$, $0\le j\le k$.

引理 3.2　若 W 为 L- 模 $F_g^\alpha(V)$ 的子模，$v(n)\in W(n)$, 则 $W(n)$ 中含有下列向量：

$$x_+^2v(n),\qquad x_-^2v(n); \tag{3.3}$$

$$(hx_++x_+h)v(n),\qquad (hx_-+x_-h)v(n); \tag{3.4}$$

$$(h^2-x_+x_--x_-x_+)v(n). \tag{3.5}$$

证明　任取 $\lambda,\mu\in\mathbb{Z}$, 令 $r=\lambda pe_1+\mu pe_2$, $u=\mu e_1-\lambda e_2$, 则有 $D(u,r)\in L$. 于是由定义 1.3 可得

$$D(u,-r)D(u,r)v(n)=((u,n+\alpha)^2-A(u,r)A(u,r))v(n)\in W(n).$$

故

$$\begin{aligned}&\lambda^2\mu^2p^2(h^2-x_+x_--x_-x_+)v(n)+\lambda^4p^2x_+^2v(n)+\mu^4p^2x_-^2v(n)\\&\quad+\lambda\mu^3p^2(hx_-+x_-h)v(n)-\lambda^3\mu p^2(hx_++x_+h)v(n)\in W(n).\end{aligned} \tag{3.6}$$

在 (3.6) 中分别令 $\lambda=0,\mu=1$ 和 $\lambda=1,\mu=0$, 则得 (3.3). 在 (3.6) 中分别令 $\lambda=\mu=1$ 和 $\lambda=1$, $\mu=-1$, 再结合 (3.3) 可得

$$(h^2-x_+x_--x_-x_+)v(n)+(hx_-+x_-h)v(n)-(hx_++x_+h)v(n)\in W(n), \tag{3.7}$$

$$(h^2-x_+x_--x_-x_+)v(n)-(hx_-+x_-h)v(n)+(hx_++x_+h)v(n)\in W(n). \tag{3.8}$$

由 (3.7) 加上 (3.8) 得 (3.5). 最后在 (3.6) 中分别令 $\lambda=\mu=1$ 和 $\lambda=1$, $\mu=2$, 再利用 (3.3), (3.5) 可得 (3.4).

引理 3.9　若 V 为有限维不可约 sl_2- 模，$\dim V=k+1\ge 3$, W 为 L- 模 $F_g^\alpha(V)$ 的子模，且 $W(n)\ne 0$, 则 $\forall r\in \mathrm{rad}(f)$, 有 $W(n+r)=V(n+r)$.

证明　把证明过程分成三步，首先证明 $v_0(n)\in W(n)$ (其中 v_0 为 V 的最高权向量), 然后证 $W(n)=V(n)$, 最后证 $\forall r\in\mathrm{rad}(f)$, 有 $W(n+r)=V(n+r)$.

(1) 设 $v(n)=\Sigma_{i=1}^l a_{r_i}v_{r_i}(n)\in W(n)$, 其中 $0\le r_i<r_j\le k$, $a_{r_i}\ne 0(\forall 1\le i<j\le l)$.

情形 1　当 r_l 为偶数时，令 $\mu=\frac{r_l}{2}$, 则由 (3.3) 及引理 3.1 可得

$$x_+^{2\mu}v(n)=(k-r_l+1)(k-r_l+2)\cdots(k-r_l+2\mu)a_{r_l}v_0(n)\in W(n),$$

故 $v_0(n)\in W(n)$.

情形 2　当 r_l 为奇数时，令 $\mu=\frac{r_l-1}{2}$, 则由 (3.3), (3.4) 及引理 3.1 可得

$$(hx_++x_+h)x_+^{2\mu}v(n)=(k-r_l+1)\cdots(k-r_l+2\mu)a_{r_l}2k(k-1)v_0(n)\in W(n),$$

故 $v_0(n)\in W(n)$.

(2) 只须证 $\forall 0\le j\le k$, 有 $v_j(n)\in W(n)$. 由于 $v_0(n)\in W(n)$, 故由归纳法只须证 $\forall 0\le j<k$, 若 $\forall 0\le i\le j$ 都有 $v_i(n)\in W(n)$, 则 $v_{j+1}(n)\in W(n)$.

情形 1　当 $j\ne\frac{k-1}{2}$ 时，由 (3.4) 可得 $(hx_-+x_-h)v_j(n)=2(k-2j-1)(j+1)v_{j+1}(n)\in W(n)$. 故 $v_{j+1}(n)\in W(n)$.

情形 2 当 $j=\frac{k-1}{2}$ 时，由 $k\geq 2$ 可得 $j\geq 1$，于是 $v_{j-1}(n)\in W(n)$，根据 (3.3) 有

$$x_-^2 v_{j-1}(n)=j(j+1)v_{j+1}(n)\in W(n),$$

故 $v_{j+1}(n)\in W(n)$.

(3) 由于 $\mathrm{rad}(f)=\{k_1pe_1+k_2pe_2|k_1,k_2\in\mathbb{Z}\}$，故只须证 $\forall k_1\in\mathbb{Z}$ 有 $W(n+k_1pe_1)\neq 0$ 且 $W(n+k_1pe_2)\neq 0$. 事实上，当 $k_1=0$ 时，命题显然成立. 当 $k_1\neq 0$ 时，由第二步结论有 $\forall v\in V$，$v(n)\in W(n)$，于是有

$$D(e_2,k_1pe_1)v(n)=(e_2,n+\alpha)v(k_1pe_1+n)+k_1px_+v(n+k_1pe_1)\in W(n+k_1pe_1).$$

当 $(e_2,n+\alpha)=0$ 时，在上式中取 $v=v_0$；当 $(e_2,n+\alpha)\neq 0$ 时，在上式中取 $v=v_1$，可得 $v_0(n+k_1pe_1)\in W(n+k_1pe_1)$. 同理 $W(n+k_1pe_2)\neq 0$.

下面要研究 V 为 2 维不可约 sl_2- 模时，L- 模 $F_g^\alpha(V)$ 的子模 W 在 L 中外导子作用下的性质. 设 V 为 2 维不可约 sl_2- 模，在向量空间 $\mathcal{U}$ 上定义 sl_2 的自然表示：$x_+e_l=\delta_{2,l}e_1$，$x_-e_l=\delta_{1,l}e_2$，$he_l=\delta_{1,l}e_1-\delta_{2,l}e_2$，则有模同构 $\mathcal{U}\simeq V$. 于是由定义 1.3 可知 L 中外导子在 $F_g^\alpha(V)$ 上的作用如下：

$$D(u,r)v(n)=(u,n+\alpha)v(n+r)+(u,v)r(n+r),\quad \forall D(u,r)\in L,\ n\in\Gamma,\ v\in V. \tag{3.10}$$

为了表述方便我们引进如下记号：$\forall n\in\Gamma$，$\mathcal{W}(n)=\langle(n+\alpha)(n)\rangle$，$\mathcal{W}_n=\oplus_{r\in\Gamma_n}\mathcal{W}(n+r)=\oplus_{r\in\bar n}\mathcal{W}(r)$，$\mathcal{U}_n=\oplus_{r\in\Gamma_n}V(n+r)=\oplus_{r\in\bar n}V(r)$，若 $\alpha\in\Gamma$，$\widetilde{\mathcal{W}}_{-\alpha}=\mathcal{W}_{-\alpha}\oplus V(-\alpha)$.

引理 3.11 若 V 为 2 维不可约 sl_2- 模，W 为 $F_g^\alpha(V)$ 的子模，且 $\mathcal{W}(n)\cap W(n)\neq 0$，则有

(1) $\mathcal{W}(n)\subset W(n)$;

(2) $\forall r\in\mathrm{rad}(f)$，$\mathcal{W}(n+r)\subset W(n+r)$.

证明 (1) 因为 $\mathcal{W}(n)\cap W(n)\neq 0$，故 $n\neq-\alpha$ 且 $\dim\mathcal{W}(n)=1$，故 $\mathcal{W}(n)\subset W(n)$.

(2) 只须证 $\forall k_1\in\mathbb{Z}$ 有 $(n+k_1pe_1+\alpha)(n+k_1pe_1)\in W(n+k_1pe_1)$ 且 $(n+k_1pe_2+\alpha)(n+k_1pe_2)\in W(n+k_1pe_2)$. 下面分三种情形证明 $(n+k_1pe_1+\alpha)(n+k_1pe_1)\in W(n+k_1pe_1)$.

情形 1 当 $n+k_1pe_1+\alpha=0$ 时，结论显然成立.

情形 2 当 $n+k_1pe_1+\alpha\neq 0$ 且 $n+\alpha$ 与 k_1pe_1 线性无关时，可选取 $u\in V$，使 $(u,n+\alpha)=1$ 且 $(u,k_1pe_1)=0$. 于是 $D(u,k_1pe_1)\in L$，故由 (3.10) 有

$$D(u,k_1pe_1)(n+\alpha)(n)=(n+\alpha+k_1pe_1)(n+k_1pe_1)\in W(n+k_1pe_1),$$

命题得证.

情形 3 当 $n+k_1pe_1+\alpha\neq 0$ 且 $n+\alpha$ 与 k_1pe_1 线性相关时，令 $r=k_1pe_1+pe_2$，则 $n+\alpha$ 与 r 线性无关，且 $n+\alpha+r$ 与 $-pe_2$ 线性无关，故可选取 $u,u'\in V$，使得 $(u,n+\alpha)=1$，$(u,r)=0$，$(u',n+\alpha+r)=1$，$(u',-pe_2)=0$，于是 $D(u,r)\in L$，$D(u',-pe_2)\in L$，故有

$$D(u',-pe_2)D(u,r)(n+\alpha)(n)=(n+\alpha+k_1pe_1)(n+k_1pe_1)\in W(n+k_1pe_1).$$

同理可证 $(n+k_1pe_2+\alpha)(n+k_1pe_2)\in W(n+k_1pe_2)$.

引理 3.12 若 V 为 2 维不可约 sl_2- 模，W 为 $F_g^\alpha(V)$ 的子模，且 $W(n)\setminus\mathcal{W}(n)\neq\emptyset$，则有

(1) 当 $n+\alpha=0$ 时，$\forall r\in\mathrm{rad}(f),\mathcal{W}(n+r)\subset W(n+r)$;

(2) 当 $n+\alpha\neq 0$ 时，$\forall r\in\mathrm{rad}(f),V(n+r)=W(n+r)$.

证明 (1) 任取 $0\neq v(n)\in W(n)\setminus\mathcal{W}(n)$，则存在 $i\in\{1,2\}$，使 pe_i 与 v 线性无关，故可选取 $u\in V$，使得 $(u,pe_i)=0$ 且 $(u,v)=1$，于是 $D(u,pe_i)\in L$，因而有 $D(u,pe_i)v(n)=pe_i(n+pe_i)\in$

$\mathcal{W}(n+pe_i)$. 又 $n+\alpha=0$, 故 $pe_i(n+pe_i)\in\mathcal{W}(n+pe_i)$, 于是由引理 3.11 可得 $\forall r\in \mathrm{rad}(f)$, $\mathcal{W}(n+pe_i+r)\subset W(n+pe_i+r)$ 即 $\mathcal{W}(n+r)\subset W(n+r)$ $(\forall r\in\mathrm{rad}(f))$.

(2) 先证 $W(n)=V(n)$. 因为 $n+\alpha\neq 0$ 且 $W(n)\setminus\mathcal{W}(n)\neq\emptyset$, 故存在 $v=a_1e_1+a_2e_2\in V$, 使 $v(n)\in W(n)$ 且 v 与 $n+\alpha$ 线性无关. 记 $n+\alpha=b_1e_1+b_2e_2$, 则由 (3.10) 可得

$$\begin{aligned}&D(e_1-e_2,-pe_1-pe_2)D(e_1,pe_2)D(e_2,pe_1)v(n)\\&\quad=b_2(b_1+p)(b_1-b_2)v(n)+(b_1a_2-b_2a_1)p(b_1e_1+b_2e_2)(n)\in W(n).\end{aligned}$$

又因为 v 与 $n+\alpha$ 线性无关，故 $b_1a_2-b_2a_1\neq 0$, 于是 $(n+\alpha)(n)\in W(n)$. 由于 $\dim V=2$, v 与 $n+\alpha$ 线性无关，且 $v(n)\in W(n)$, $(n+\alpha)(n)\in W(n)$, 因而有 $V(n)=W(n)$.

再证若 $m+\alpha\neq 0$ 且 $W(m)=V(m)$, 则 $\forall k_1\in\mathbb{Z}$ 有 $W(m+k_1pe_1)=V(m+k_1pe_1)$ 且 $W(m+k_1pe_2)=V(m+k_1pe_2)$. 令 $m+\alpha=c_1e_1+c_2e_2$, 任取 $v=a_1e_1+a_2e_2$, 则

$$D(e_2,k_1pe_1v(m)=((c_2a_1+a_2k_1p)e_1+c_2a_2e_2)(m+k_1pe_1)\in W(m+k_1pe_1).\tag{3.13}$$

情形 1 当 $c_2\neq 0$ 时，在 (3.13) 中分别取 $a_2=0$, $a_1=c_2^{-1}$ 和 $a_1=0$, $a_2=c_2^{-1}$, 可得 $e_i(m+k_1pe_1)\in W(m+k_1pe_1)(i=1,2)$, 故 $W(m+k_1pe_1)=V(m+k_1pe_1)$.

情形 2 当 $c_1\neq 0, c_2=0$ 时，在 (3.13) 中取 $a_1=0$, $a_2=k_1^{-1}p^{-1}$, 则有 $e_1(m+k_1pe_1)\in W(m+k_1pe_1)$ 又

$$\begin{aligned}&D(e_1,-k_1pe_2)D(e_1-e_2,k_1pe_1+k_1pe_2)e_2(m)\\&\quad=(-k_1p(c_1+k_1p)e_1+c_1^2e_2)(m+k_1pe_1)\in W(m+k_1pe_1),\end{aligned}$$

故 $e_2(m+k_1pe_1)\in W(m+k_1pe_1)$，于是 $W(m+k_1pe_1)=V(m+k_1pe_1)$.

最后证 $\forall r\in\mathrm{rad}(f)$, $W(n+r)=V(n+r)$. 设 $r=k_1pe_1+k_2pe_2$, 若 $k_1k_2=0$, 则由上述结论可得 $W(n+r)=V(n+r)$. 若 $k_1k_2\neq 0$, 则有 $n+\alpha+k_1pe_1\neq 0$ 或 $n+\alpha+k_2pe_2\neq 0$, 从而可得到 $W(n+r)=V(n+r)$.

此外，由 (3.10) 可以直接验证下述结论.

引理 3.14 若 V 为 2 维不可约 sl_2- 模，则有 $\forall D(u,r)\in L$, $D(u,r)\mathcal{W}_n\subset\mathcal{W}_n$, 且有当 $\alpha\in\Gamma$ 时，$D(u,r)\widetilde{\mathcal{W}}_{-\alpha}\subset\mathcal{W}_{-\alpha}$.

最后，我们研究 V 为一维不可约 sl_2- 模时，L- 模 $F_g^\alpha(V)$ 的子模 W 在 L 中外导子作用下的性质. 由定义 1.3 可知 L 中外导子在 $F_g^\alpha(V)$ 上的作用如下：

$$D(u,r)v(n)=(u,n+\alpha)v(n+r),\quad\forall D(u,r)\in L,n\in\Gamma,v\in v.\tag{3.15}$$

引理 3.16 若 V 为一维不可约 sl_2- 模，W 为 $F_g^\alpha(V)$ 的子模，且 $W(n)\neq 0$, 则有 $\forall r\in\mathrm{rad}(f)$,

(1) 当 $n+\alpha=0$ 或 $n+\alpha+r=0$ 时，$\forall D(u,r)\in L$, $D(u,r)W(n)=0$.

(2) 当 $n+\alpha\neq 0$ 且 $n+\alpha+r\neq 0$ 时，$W(n+r)=V(n+r)$.

证明 (1) 显然成立.

(2) 因为 $\dim V=1$, 又 $W(n)\neq 0$, 故 $W(n)=V(n)$. 若 $n+\alpha$ 与 r 线性无关，则可选取 $u\in\mathcal{U}$, 使 $(u,r)=0$ 且 $(u,n+\alpha)=1$, 因而 $D(u,r)\in L$ 且有 $D(u,r)v(n)=v(n+r)\in W(n+r)(\forall v\in V)$. 若 $n+\alpha$ 与 r 线性相关，则可选取 pe_i 使 $n+\alpha$ 与 pe_i 线性无关，于是 $n+\alpha$ 与 $r+pe_i$ 线性无关，且 $n+\alpha+r+pe_i$ 与 $-pe_i$ 线性无关，故可选取 $u,u'\in\mathcal{U}$, 使 $(u,n+\alpha)=(u',n+\alpha+pe_i+r)=1$ 且 $(u,r+pe_i)=(u',-pe_i)=0$，因而有 $\forall v\in V$ $D(u',-pe_i)D(u,pe_i+r)v(n)=v(n+r)\in W(n+r)$.

4 L- 模 $F_g^\alpha(V)$ 的结构

我们首先回顾在第 2,3 节定义的一些概念，然后证明一些引理，最后证明在引言中给出的本文主要结论：定理 A 至定理 D. $\forall n\in\Gamma$, $\bar{n}=n+\Gamma_n$, $\Gamma^*=\Gamma/\sim$, $\mathcal{W}(n)=\langle(n+\alpha)(n)\rangle$, $\mathcal{W}_n=\oplus_{r\in\Gamma_n}\mathcal{W}(n+r)$, $\mathcal{U}_n=\oplus_{r\in\Gamma_n}V(n+r)$. 对 $\alpha\in\Gamma$, $\tilde{\mathcal{W}}_{-\alpha}=\mathcal{W}_{-\alpha}\oplus V(-\alpha)$.

引理 4.1 若 V 为有限维不可约 sl_2- 模，则 $F_g^\alpha(V)=\oplus_{\bar{n}\in\Gamma^*}\mathcal{U}_n$, 其中 $\mathcal{U}_n$ 为 L- 模 $F_g^\alpha(V)$ 的子模.

证明 由定义 1.3, 引理 2.1, 定义 2.3 及 $\mathrm{rad}(f)+\Gamma_n=\Gamma_n$ 直接得到.

引理 4.2 若 q 为 p 次本原单位根，V 为有限维不可约 sl_2- 模，且 $\dim V\geq 3$, 则有 $\forall n\in\Gamma$, $\mathcal{U}_n$ 是不可约 L- 模.

证明 由引理 4.1 我们只须证 $\mathcal{U}_n$ 是不可约的. 假设 T 为 $\mathcal{U}_n$ 的一个非零子模，则存在 $r\in\Gamma_n$ 使 $T(n+r)\neq 0$，于是由引理 3.9 可得 $\forall m\in\mathrm{rad}(f)$, 有 $T(n+r+m)=V(n+r+m)$. 因而 $\forall v\in V$ 有 $v(n+r)\in T(n+r)$, 由引理 2.1 可得 $\forall s\in\Gamma_{n+r}^1\cup\Gamma_{n+r}^2$, 有 $v(n+r+s)\in T(n+r+s)$. 于是 $T(n+r+s)=V(n+r+s)$. 因而 $T\supset\mathcal{U}_{n+r}$. 又 $r\in\Gamma_n$, 则由引理 2.2 可知 $\overline{n+r}=\bar{n}$, 于是 $\mathcal{U}_{n+r}=\mathcal{U}_n$, 所以 $T=\mathcal{U}_n$.

引理 4.3 若 q 为 p 次本原单位根，V 为 2 维不可约 sl_2- 模，则有 $\forall n\in\Gamma$,

(1) 当 $\Gamma_n^1\cup\Gamma_n^2\neq\emptyset$ 时，$\mathcal{U}_n$ 是不可约 L- 模.

(2) 当 $\Gamma_n^1\cup\Gamma_n^2=\emptyset$ 时，$\mathcal{W}_n$ 是 $\mathcal{U}_n$ 的不可约子模，且有

(i) 若 $-\alpha\notin\bar{n}$, 则 $\mathcal{W}_n$ 是 $\mathcal{U}_n$ 的唯一非零真子模,

(ii) 若 $-\alpha\in\bar{n}$, 则 $\mathcal{U}_{-\alpha}=\mathcal{U}_n$, $\tilde{\mathcal{W}}_{-\alpha}/\mathcal{W}_{-\alpha}$ 是平凡模，且 $\tilde{\mathcal{W}}_{-\alpha}$ 是 $\mathcal{U}_{-\alpha}$ 的唯一极大真子模.

证明 (1) 设 T 为 $\mathcal{U}_n$ 的任一非零子模，则存在 $r\in\Gamma_n$ 使 $T(n+r)\neq 0$. 于是由引理 3.11, 3.12 可得 $\forall s\in\mathrm{rad(f)}$, $\mathcal{W}(n+r+s)\subset T(n+r+s)$.

由于 $\Gamma_n^1\cup\Gamma_n^2\neq\emptyset$ 且 $r\in\Gamma_n$, 故由引理 2.2 可知 $\Gamma_{n+r}^1\cup\Gamma_{n+r}^2\neq\emptyset$ 且 $\forall s\in\mathrm{rad}(f)$, 有 $\Gamma_{n+r+s}^1\cup\Gamma_{n+r+s}^2=\Gamma_{n+r}^1\cup\Gamma_{n+r}^2\neq\emptyset$. 取定 $m\in\Gamma_{n+r}^1\cup\Gamma_{n+r}^2$，则可选取 $s\in\mathrm{rad}(f)$ 使 $n+r+s+\alpha$ 与 $n+r+s+m+\alpha$ 线性无关. 由引理 2.1 得

$$(n+r+s+\alpha)(n+r+s+m)\in T(n+r+s+m).$$

且有

$$(n+r+s+\alpha)(n+r+s+m)\notin\mathcal{W}(n+r+s+m),\ n+r+s+m+\alpha\neq 0.$$

于是由引理 3.12 可知 $\forall\beta\in\mathrm{rad}(f)$ 有 $T(n+r+s+m+\beta)=V(n+r+s+m+\beta)$. 利用引理 2.1 则可推出 $\forall\beta\in\Gamma_{n+r+s+m}$ 有 $T(n+r+s+m+\beta)=V(n+r+s+m+\beta)$. 最后由引理 2.2 有 $n+r+s+m+\Gamma_{n+r+s+m}=n+\Gamma_n$, 于是 $T=\mathcal{U}_n$.

(2) 因为 $\Gamma_n^1\cup\Gamma_n^2=\emptyset$, 故由引理 2.1, 3.14 可知 $\mathcal{W}_n$ 为 $\mathcal{U}_n$ 的子模. 任取 $\mathcal{W}_n$ 的非零子模 T, 因 $\Gamma_n^1\cup\Gamma_n^2=\emptyset$, 故存在 $r\in\mathrm{rad(f)}$ 使 $T(n+r)\neq 0$, 于是由引理 3.11 可得 $\mathcal{W}_n=T$.

(i) 因为 $-\alpha\notin\bar{n}$ 且 $\Gamma_n^1\cup\Gamma_n^2=\emptyset$, 故 $\forall r\in\mathrm{rad}(f)$ 有 $n+r\neq-\alpha$ 且 $\mathcal{U}_n=\oplus_{r\in\mathrm{rad(f)}}V(n+r)$. 设 T 为 $\mathcal{U}_n$ 中异于 $\mathcal{W}_n$ 的非零真子模, 则存在 $r\in\mathrm{rad}(f)$, $v\in V$, 使 $0\neq v(n+r)\in T(n+r)\backslash\mathcal{W}(n+r)$. 于是由引理 3.12 可得 $T=\mathcal{U}_n$, 故 $\mathcal{W}_n$ 是 $\mathcal{U}_n$ 的唯一非零真子模.

(ii) 因为 $-\alpha\in\bar{n}$, 故由定义 2.3 得 $\overline{-\alpha}=\bar{n}$, 所以 $\mathcal{U}_{-\alpha}=\mathcal{U}_n$. 由引理 3.14 可知 $\widetilde{\mathcal{W}}_{-\alpha}/\mathcal{W}_{-\alpha}$ 是平凡模，根据引理 3.12 可知 $\widetilde{\mathcal{W}}_{-\alpha}$ 是 $\mathcal{U}_{-\alpha}$ 的唯一极大真子模.

引理 4.4 若 q 为 p 次本原单位根，V 为一维不可约 sl_2- 模，则有 $\forall n\in\Gamma$,

(1) 当 $-\alpha\notin\bar{n}$ 或 $\Gamma_n^1\cup\Gamma_n^2\neq\emptyset$ 时，$\mathcal{U}_n$ 是不可约 L- 模;

(2) 当 $-\alpha\in\bar{n}$ 且 $\Gamma_n^1\cup\Gamma_n^2=\emptyset$ 时，$\mathcal{U}_n=V(-\alpha)\oplus\mathcal{W}_{-\alpha}$, 其中 $V(-\alpha)$ 和 $\mathcal{W}_{-\alpha}$ 都是不可约 L- 模.

证明　(1) 设 T 为 $\mathcal{U}_n$ 的任意非零子模，则存在 $r\in\Gamma_n$ 使 $T(n+r)=V(n+r)$. 由引理 2.2 可得 $\overline{n+r}=\bar{n}$. 且若 $\Gamma_n^1\cup\Gamma_n^2\neq\emptyset$, 则 $\Gamma_{n+r}^1\cup\Gamma_{n+r}^2\neq\emptyset$.

若 $-\alpha\notin\bar{n}$, 则 $\forall s\in\mathrm{rad}(f)$ 有 $n+r+s\neq-\alpha$, 于是由引理 3.16, 引理 2.1 可得 $\forall m\in\Gamma_{n+r}$ 有 $T(n+r+m)=V(n+r+m)$, 故 $T=\mathcal{U}_n$.

若 $-\alpha\in\bar{n}$ 且 $\Gamma_n^1\cup\Gamma_n^2\neq\emptyset$, 如果 $\forall s\in\mathrm{rad}(f)$ 有 $n+r+s\neq-\alpha$, 那么与上同理可得 $T=\mathcal{U}_n$. 如果存在 $s\in\mathrm{rad}(f)$ 使 $n+r+s=-\alpha$, 任意选取 $m\in\Gamma_{n+r}^1\cup\Gamma_{n+r}^2$, 由引理 2.1 可得 $T(n+r+m)=V(n+r+m)$ 且有 $\forall s'\in\mathrm{rad}(f)$, $n+r+m+s'\neq-\alpha$, 同理可得 $T=\mathcal{U}_n$.

(2) 因为 $\Gamma_n^1\cup\Gamma_n^2=\emptyset$, 所以 $\Gamma_n=\mathrm{rad}(f)$. 由定义 2.3 有 $\bar{n}=\overline{-\alpha}$, 由引理 2.1, 引理 3.16 可知结论成立.

记 $\theta=-\mu e_1+\lambda e_2$, $\mathcal{U}'=\oplus_{r\in\mathrm{rad}(f)}V(\theta+r)$, $\mathcal{W}=\oplus_{r\in\mathrm{rad}(f)}\langle(\theta+r+\alpha)(\theta+r)\rangle$. 当 $\alpha\in\Gamma$ 时，$\tilde{\mathcal{W}}=V(-\alpha)\oplus\mathcal{W}$, 并且当 $q\neq1$ 时，$\mathcal{U}''=\oplus_{r\notin\mathrm{rad}(f)}V(\theta+r)$, 当 $q=1$ 时，$\mathcal{U}''=0$. 最后，由引理 1.2, 4.1, 4.2 及推论 2.5, 定理 A 得证. 由引理 1.2, 4.1, 4.3 及推论 2.5, 定理 B 得证. 由引理 1.2, 4.1, 4.4 及推论 2.5 定理 C 得证. 由引理 4.1, 2.4, 及推论 2.5 和定义 1.3 定理 D 得证.

5 L- 模 $F_g^\alpha(V)$ 的同构

当 q 为 p 次本原单位根时，本节我们给出 L- 模 $F_{g_1}^\alpha(V)$ 与 $F_{g_2}^\beta(W)$ 同构的一个充分必要条件.

引理 5.1　对任意 sl_2- 模 V 与 W, 若存在 L- 模 $F_{g_1}^\alpha(V)$ 到 $F_{g_2}^\beta(W)$ 的同构映射 φ, 则 $\alpha-\beta\in\Gamma$ 且存在 $V\times\Gamma$ 到 W 的映射 ψ 满足如下条件：$\forall v\in V, n\in\Gamma$ 有 $\psi|_{V\times\{n\}}$ 是线性空间 $V(n)$ 到 W 的同构映射且 $\varphi(v(n))=\psi(v,n)(n+\alpha-\beta)$.

证明　$\forall v\in V, n\in\Gamma$, 假设 $\varphi(v(n))=w^1(n^1)+w^2(n^2)+\cdots+w^l(n^l)$, 其中 $w^1,\cdots,w^l\in W$; $n^1,\cdots,n^l\in\Gamma$ 且 $n^i\neq n^j(i\neq j)$.

因为 $\forall u\in\mathcal{U}$, 有 $D(u,0)\in L$, 故 $D(u,0)\varphi(v(n))=\varphi(D(u,0)v(n))$, 即 $(u,n^1+\beta)w^1(n^1)+\cdots+(u,n^l+\beta)w^l(n^l)=(u,n+\alpha)(w^1(n^1)+\cdots+w^l(n^l))$. 故 $(u,n^i+\beta)=(u,n+\alpha)(1\leq i\leq l)$, 所以 $n^i-n=\alpha-\beta$, 因此有 $l=1$, $\alpha-\beta\in\Gamma$ 且 $\varphi(v(n))=w^1(n+\alpha-\beta)$. 由于 φ 是 L 模 $F_{g_1}^\alpha(V)$ 到 $F_{g_2}^\beta(W)$ 的同构映射，故存在 $V\times\Gamma$ 到 W 的映射 ψ 满足所要条件.

引理 5.2　若 $q=1$, W 为 sl_2- 模且 V 为不可约 sl_2- 模，则 L- 模 $F_{g_1}^\alpha(V)$ 与 $F_{g_2}^\beta(W)$ 同构的充要条件是 $\alpha-\beta\in\Gamma$, $g_2(s)=f(\alpha-\beta,s)g_1(s)$, 且 V 与 W 同构.

证明　充分性　令 φ 为 $F_{g_1}^\alpha(V)$ 到 $F_{g_2}^\beta(W)$ 的线性映射，使 $\varphi(v(n))=v(n+\alpha-\beta)$, 则可直接验证它是 L- 模同构.

必要性　由引理 5.1 可知 $\alpha-\beta\in\Gamma$ 且 $\dim V=\dim W$. 而由定义 1.3 可知 $g_2(s)=1=f(\alpha-\beta,s)g_1(s)$, 又由 L- 模的结构定理 A, B 可知 W 是不可约 sl_2- 模，故 V 与 W 同构.

引理 5.3　若 q 为 p 次本原单位根，且 $q\neq1$, V,W 为 sl_2- 模，且 V 为有限维不可约的，则 L- 模 $F_{g_1}^\alpha(V)$ 与 $F_{g_2}^\beta(W)$ 同构的充要条件是 $\alpha-\beta\in\Gamma$, $g_2(s)=f(\alpha-\beta,s)g_1(s)$, 且 V 与 W 同构.

证明　充分性　取 V 与 W 的同构映射 $\bar{\varphi}$, 定义 $F_{g_1}^\alpha(V)$ 到 $F_{g_2}^\beta(W)$ 的线性映射 φ: $\forall v\in V$, $n\in\Gamma$, $\varphi(v(n))=\sigma(n,\alpha-\beta)f(\alpha-\beta,n)\bar{\varphi}(v)(n+\alpha-\beta)$. 容易验证 φ 为 $F_{g_1}^\alpha(V)$ 到 $F_{g_2}^\beta(W)$ 的 L- 模同构.

必要性　设 φ 为 L- 模 $F_{g_1}^\alpha(V)$ 到 $F_{g_2}^\beta(W)$ 的同构映射，则由引理 5.1 可知存在 $V\times\Gamma$

到 W 的映射 ψ, 满足, $\forall v\in V, n\in\Gamma$, 有 $\psi|_{V\times\{n\}}$ 是线性空间 $V(n)$ 到 W 的同构映射, 且 $\varphi(v(n))=\psi(v,n)(n+\alpha-\beta)$, 并且 $\alpha-\beta\in\Gamma$.

记 $K=\{n\in\Gamma|\forall s\notin \mathrm{rad}(f), g_1(s)=f(n,s), g_2(s)=f(n-\beta+\alpha,s)\}$. 因为 $q\neq 1$, 故 $K\neq\Gamma$.

下证 V 与 W 同构, 为此只须证 $\forall n\notin K$ 有 $\psi|_{V\times\{n\}}$ 为 $V(n)$ 到 W 的 sl_2- 模同态. 将证明分成两步. 第一步证明 $\forall r\in\mathrm{rad}(f)$, $v\in V$ 有 $\psi(v,n+r)=\psi(v,n)$, 第二步证明 $\psi|_{V\times\{n\}}$ 是 sl_2- 模同态.

第一步　因为 $q\neq 1$ 且 $n\notin K$, 故可选取 $s\notin\mathrm{rad}(f)$ 使 $g_1(s)\neq f(n,s)$ 或 $g_2(s)\neq f(n-\beta+\alpha,s)$, 于是 $s+r\notin\mathrm{rad}(f)$, 考虑

$$\begin{aligned}&adx^{r+s}(\varphi(v(n-s)))\\&\quad=\sigma(r+s,n-s+\alpha-\beta)(g_2(r+s)-f(n-s+\alpha-\beta,r+s))\psi(v,n-s)(n+\alpha-\beta+r),\end{aligned}$$

$$\varphi(adx^{r+s}(v(n-s)))=\sigma(r+s,n-s)(g_1(r+s)-f(n-s,r+s))\psi(v,r+n)(n+\alpha-\beta+r),$$

由于 φ 为 L- 模同构, $r\in\mathrm{rad}(f)$, 故由 s 的取法可得

$$\psi(v,r+n)=\frac{\sigma(s,\alpha-\beta)(g_2(s)-f(n+\alpha-\beta,s))\psi(v,n-s)}{g_1(s)-f(n,s)}.$$

注意到上式右边与 r 无关, 故 $\forall v\in V, r\in\mathrm{rad}(f)$, 有 $\psi(v,r+n)=\psi(v,n)$.

第二步　$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{Z}$. 令 $u=\mu e_1-\lambda e_2, r=\lambda pe_1+\mu pe_2$, 则 $D(u,r)\in L$. 由于

$$D(u,r)(\varphi(v(n)))=(u,n+\alpha)\psi(v,n)(n+\alpha-\beta+r)+A(u,r)\psi(v,n)(n+\alpha-\beta+r),$$

$$\varphi(D(u,r)v(n))=(u,n+\alpha)\psi(v,n+r)(n+r+\alpha-\beta)+\psi(A(u,r)v,n+r)(n+\alpha-\beta+r),$$

可得 $A(u,r)\psi(v,n)=\psi(A(u,r)v,n)$. 分别取 $\lambda=0$, $\mu=1$; $\lambda=1$, $\mu=0$ 和 $\lambda=\mu=1$, 则有 $x_-(\psi(v,n))=\psi(x_-v,n)$, $x_+(\psi(v,n))=\psi(x_+v,n)$, $(h-x_++x_-)(\psi(v,n))=\psi((h-x_++x_-)v,n)$, 故 $\psi|_{V\times\{n\}}$ 为 sl_2- 模同态.

最后证明 $\forall s\in\Gamma, g_2(s)=f(\alpha-\beta,s)g_1(s)$. 当 $K\neq\phi$ 时, 命题显然成立. 当 $K=\emptyset$ 时, 由上述结论可知 $\forall n\in\Gamma$ 有 $\psi|_{V\times\{n\}}$ 为 sl_2- 模 $V(n)$ 到 W 的同构映射. 令 $\bar\varphi$ 为 sl_2- 模 V 到 W 的一个同构映射, 因为 V 是不可约 sl_2- 模, 故由 Schur 引理可设 $\psi|_{V\times\{n\}}=\rho(n)\bar\varphi$, 其中 ρ 为 Γ 到 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 的函数. $\forall s\notin\mathrm{rad}(f)$, $v\in V$, $n\in\Gamma$, 考虑

$$adx^{s}(\varphi(v(n)))=\rho(n)\sigma(s,n+\alpha-\beta)(g_2(s)-f(n+\alpha-\beta,s)\bar\varphi(v)(s+n+\alpha-\beta),$$

$$\varphi(adx^{s}(v(n)))=\sigma(s,n)(g_1(s)-f(n,s))\rho(n+s)\bar\varphi(v)(n+s+\alpha-\beta),$$

因此有

$$\rho(n)\sigma(s,\alpha-\beta)(g_2(s)-f(n+\alpha-\beta,s))=(g_1(s)-f(n,s))\rho(n+s).\tag{5.4}$$

在上式中分别令 $n=0$ 和 $n=-s$ 可得

$$\rho(0)\sigma(s,\alpha-\beta)(g_2(s)-f(\alpha-\beta,s))=(g_1(s)-1)\rho(s),\tag{5.5}$$

$$\rho(-s)\sigma(s,\alpha-\beta)(g_2(s)-f(\alpha-\beta,s))=(g_1(s)-1)\rho(0).\tag{5.6}$$

因为 $s\notin\mathrm{rad}(f)$, 故 $-s\notin\mathrm{rad}(f)$. 于是在 (5.5) 中可用 $-s$ 替换 s 得

$$\rho(0)\sigma(-s,\alpha-\beta)(g_2(-s)-f(\alpha-\beta,-s))=(g_1(-s)-1)\rho(-s).\tag{5.7}$$

情形 1 若 $g_1(s)=1$, 则得 $g_2(s)=f(\alpha-\beta,s)$, 于是 $g_2(s)=f(\alpha-\beta,s)g_1(s)$.

情形 2 若 $g_1(s)\neq 1$, 则由 (5.5), (5.6) 可得 $\rho(-s)\rho(s)=\rho(0)^2$, 于是由 (5.5), (5.7) 可得 $(g_2(s)-f(\alpha-\beta,s))(g_2(-s)-f(\alpha-\beta,-s))=(g_1(s)-1)(g_1(-s)-1)$. 由此得 $g_2(s)=f(\alpha-\beta,s)g_1(s)$ 或 $g_2(s)=f(\alpha-\beta,s)(g_1(-s))$.

子情形 1 若 $g_2(s)=f(\alpha-\beta,s)g_1(s)$, 则由 (5.5) 可得 $\rho(s)=\rho(0)\sigma(s,\alpha-\beta)f(\alpha-\beta,s)$.

子情形 2 若 $g_2(s)=f(\alpha-\beta,s)g_1(-s)$, 则由 (5.5) 可得 $\rho(s)=-\rho(0)\sigma(s,\alpha-\beta)f(\alpha-\beta,s)g_1(-s)$.

代入 (5.4) 可得 $\forall n\in\Gamma$, 有

$$\rho(n)\sigma(s,\alpha-\beta)f(\alpha-\beta,s)(g_1(-s)-f(n,s))=(g_1(s)-f(n,s))\rho(n+s).$$

在上式中取 $n=s$, 则 $-\rho(0)\sigma(2s,\alpha-\beta)f(\alpha-\beta,2s)g_1(-2s)(1-g_1(s))=(g_1(s)-1)\rho(2s)$. 故 $\rho(2s)=\rho(0)\sigma(2s,\alpha-\beta)f(\alpha-\beta,2s)g_1(-2s)$. 若 $g_1(2s)\neq 1$ 则 $2s\notin \mathrm{rad}(f)$, 且 $\rho(2s)$ 的表达式既非子情形 1 的形式亦非子情形 2 的形式，矛盾. 故 $g_1(2s)=1$, 于是 $g_1(s)=-1=g_1(-s)$, 因而有 $g_2(s)=f(\alpha-\beta,s)g_1(-s)=f(\alpha-\beta,s)g_1(s)$.

最后，由引理 1.4, 引理 5.2 及引理 5.3, 定理 E 得证.

参考文献

[BGK] Berman S, Gao Y, Krylyuk Y S. Quantum tori and the structure of elliptic quasi-simple Lie algebras [J]. *J. Funct. Anal.*, 1996, 135: 339-389.

[E1] Eswara Rao S. Representations of Witt algebras, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 30(1994), 191-201.

[E2] Eswara Rao S. Irreducible representations of the Lie algebra of the diffeomorphisms of a d-dimensional torus [J]. *J. Algebra*, 1996, 182: 401-421.

[EM] Eswara Rao S, Moody R V. Vertex representations for N-toroidal Lie algebras and a generalization of the Virasoro algebra [J]. *Commun. Math. Phys.*, 1994, 159: 239-264.

[EZ] Eswara Rao S, K. Zhao. Highest weight irreducible representations of quantum tori [C]. Preprint, 2002.

[H] Humphreys J E. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory [M]. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1972.

[LT] Lin W, Tan S. Representations of the Lie algebra of derivations for quantum torus [C]. Preprint, 2002.

[MP] McConnell J C, Pettit J J. Crossed products and multiplicative analogues of Weyl algebras [J]. *J. London Math. Soc.*, 1988, 38: 47-55.

[S] Shen G. Gradraded modules of graded Lie algebras of Cartan type(I) [J]. *Scientia Sinica, Series A*, 1986, 29: 570-581.

[Z] Zhao K. Weyl type algebra from quantum tori [C]. Preprint, 2001.

Representations of the Lie Algebra of Skew Derivations on Quantum Torus

LIN Wei-qiang[1,2], TAN Shao-bin[1]

(1. Dept. of Math., Xiamen University, Xiamen, Fujian, 361005, P. R. China; 2. Dept. of Math., Zhangzhou Teachers College, Zhangzhou, Fujian, 363000, P. R. China)

Abstract: In this paper, we first recall the definition of the Lie algebra L of skew derivations on quantum torus, then construct a class of functors F_g^α from sl_2-modules to L-modules. We study the structure of L-modules $F_g^\alpha(V)$, and give a necessary and sufficient condition of isomorphism between the L-modules $F_{g_1}^\alpha(V)$ and $F_{g_2}^\beta(W)$.

Key words: Lie algebra; skew derivation; representation; quantum torus