2004 年 1 月 Journal of Xiamen University (Natural Science) Jan. 2004

·快 讯·

文章编号: 0438-0479(2004)01-0001-03

Catmull-Clark 细分曲面的误差分析

曾晓明, 杨 军
(厦门大学数学系, 福建 厦门 361005)

摘要: 运用引入相邻点的方法和计算控制点的一阶差分的新的技术, 研究 Catmull-Clark 曲面细分过程的误差估计问题. 证明了 Catmull-Clark 曲面的控制网格按指数速率收敛于极限曲面; 并给出关于 Catmull-Clark 曲面误差估计的一个计算公式. 本文的技术亦可适用于 Doo-Sabin 曲面等细分曲面.

关键词: Catmull-Clark 曲面; 控制网格; 细分曲面; 误差分析
中图分类号: O 174.41; TP 391.72 文献标识码: A

细分曲面方法是自由曲面造型的强有力工具. 比较 B-样条曲面和非均匀有理 B-样条曲面只能定义在矩形拓扑网格上的局限性, 细分曲面的一个显著的优越性在于可定义在任意的拓扑网格上, 因而具有广泛的应用性.

Catmull-Clark 曲面是设计用于把双三次 B-样条曲面拓展到任意拓扑结构的曲面片上. 它在每次细分时, 按一定规则(Catmull-Clark 规则[1]), 由原来的控制网格产生一组新的控制顶点(称为面点, 边点, 顶点), 由这些点构成新的控制网格, 按此规则不断细分得到的控制网格的极限曲面就是 Catmull-Clark 曲面.

Catmull-Clark 细分过程可由一个细分矩阵不断迭代得到[2]. 自然要问, 在细分过程中, 控制网格与极限曲面的近似程度如何呢? 需要进行多少次细分步骤才能达到满足一定精度的误差要求呢? 本文的目的就是解决此误差估计问题, 本文中将证明 Catmull-Clark 曲面的控制网格按指数速率收敛于极限曲面; 并给出关于 Catmull-Clark 曲面误差估计的一个计算公式.

1 定义和记号

设给定一个 Catmull-Clark 曲面片的控制网格 Π_0, 不失一般性, 假设此初始的控制网格已至少被细分两次, 因而奇异点(Extraordinary points)是孤立的. 我们使用 Stam[2] 的关于控制顶点 $V_i(1\leqslant i\leqslant 2N+8)$ 的排列顺序(见图 1), 其中 V_1 是连接 N 条棱的奇异点. 经过一次细分, 得到一组新的控制顶点 $V_i^{(1)}(1\leqslant i\leqslant 2N+17)$, 称它们为 1-水平控制顶点. 这些顶点构成一个新的控制网格 Π_1(参见文献[2], 图 5). (这个细分可用一个细分矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示出来. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的具体定义可参见文献[2].) 继续细分, 第 n 次细分得到的所有控制顶点称之为 n-水平控制顶点, 记为 $V_i^{(n)}$. 所有这些 n-水平控制顶点组成一个控制网格, 记为 Π_n, $n=0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$. 注意到 Π_n 是由若干个小空间四边形所组成.

下面引入相邻点的概念.

定义 1 在控制网格 $\Pi_n(n=0, 1, 2, 3, \ldots\ldots)$ 内, 若某个小空间四边形以 $V_i^{(n)}$ 为其一个顶点, 则此四边形的所有其它顶点称为 $V_i^{(n)}$ 的相邻点.

2 定理及证明

本节给出本文主要结果及其证明. 注意到按 stam[2] 规定的关于控制顶点的排列顺序, 每次细分后, 图示中最左上角的控制子网格(即由点 $V_i^{(n)}$, $i=1, 2, 3, \ldots, 2N+8$; $n=0, 1, 2, \ldots$, 组成的子网格)具有相同的拓扑结构(参见文献[2], P397). 关于这些子网格之间的关系, 首先建立如下引理:

引理 1 在控制网格 Π_n 中($n=0, 1, 2, 3, \ldots$), 记

$M_n=\max\{\|V_i^{(n)}-V_j^{(n)}\|$; 这里 $V_i^{(n)}$ 是

收稿日期: 2003-11-12
基金项目: 福建省自然科学基金(A0210004)资助
作者简介: 曾晓明(1955-), 男, 教授, 博士生导师.

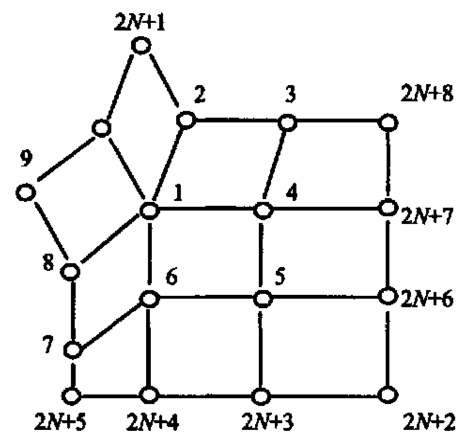

图1 控制顶点的顺序

Fig. 1 The order of control points

$V_i^{(n)}$ 的所有相邻点; $i = 1, 2, 3, \cdots, 2N+8$; $\|\cdot\|$ 为三维欧氏空间 R^3 中的距离范数}, 有如下估计:

$$M_n \leqslant G^n(N) M_0,$$

其中

$$G(N) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & N = 3 \\ \frac{3N^2+7N-40}{4N^2}, & N \geqslant 4 \end{cases}$$

本文的主要结果如下:

定理1 对 n-水平的控制网格 $\Pi_n (n = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots)$, 记

$M_n = \max\{\|V_i^{(n)} - V_{i_j}^{(n)}\|$; 这里 $V_i^{(n)} \in \Pi_n$, $V_{i_j}^{(n)}$ 是相应的 $V_i^{(n)}$ 的相邻点}, 有如下估计:

$$M_n \leqslant D^n(N) M_0,$$

其中

$$D(N) = \begin{cases} \frac{9}{16}, & N = 3 \\ \frac{3N^2+7N-40}{4N^2}, & N \geqslant 4 \end{cases}$$

证 对给定的控制网格 Π_0, 记相应的极限曲面片为 $S(u, v)$, u, v 为参数, $0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 1$(参见文献[2]) 对 Π_0 应用一次Catmull-Clark 细分规则得到1-水平的控制网格 $\Pi_1\{V_i^{(1)}, 1 \leqslant i \leqslant 2N+17\}$(参见文献[2]). 把曲面片 $S(u, v), 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 1$ 分为4块子面片 $S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}$. 子面片 $S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}$ 分别定义在如下参数区域上:

$$\Omega_1^1: [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}];$$

$$\Omega_1^2: [0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1];$$

$$\Omega_1^3: [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}];$$

$$\Omega_1^4: [\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1].$$

相应于 $S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}$ 的控制网格记为:

$$\Pi_{11}, \Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{14}.$$

记

$M_{1k} = \max\{\|V_i^{(1)} - V_{i_j}^{(1)}\|$; $V_i^{(1)} \in \Pi_{1k}$, $V_{i_j}^{(1)}$ 是 $V_i^{(1)}$ 的相邻点, $k = 1, 2, 3, 4.\}$.

则由引理1得到

$$M_{11} \leqslant G(N) M_0 = G(N) M_0, \quad N \geqslant 3.$$

又 $\Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{14}$ 是标准的双-三次 B-样条曲面片的控制网格, 适应 $N = 4$ 的情况, 所以

$$M_{1k} \leqslant G(4) M_0, \quad k = 2, 3, 4.$$

于是

$$M_1 = \max\{M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{14}\} \leqslant D(N) M_0; \quad N \geqslant 3.$$

继续细分, 可得到2-水平的控制网格 Π_2. Π_2 可分成 4^2 个控制子网格:

$$\Pi_1^{(2)}, \Pi_2^{(2)}, \Pi_3^{(2)}, \cdots, \Pi_{16}^{(2)},$$

其中 $\Pi_1^{(2)}$ 是具有与 $\Pi_1^{(1)}$ 相同拓扑结构的控制网格, 而 $\Pi_2^{(2)}, \Pi_3^{(2)}, \cdots, \Pi_{16}^{(2)}$ 是标准的双-三次 B-样条曲面片的控制网格, 适应 $N = 4$ 的情况, 应用上面的分析, 即得

$$M_2 \leqslant D(N) M_1 \leqslant D^2(N) M_0; \quad N \geqslant 3.$$

递推得到,

$$M_n \leqslant D^n(N) M_0; \quad N \geqslant 3.$$

定理1证毕.

利用定理1和细分曲面的凸包性质, 可证得如下定理:

定理2 设 n 为细分(subdivision) 次数, $\forall \varepsilon > 0$, 要使得 n-水平的控制网格 Π_n 与极限曲面 $S(u, v)$ 的距离 $d_n \leqslant \varepsilon$. 只要

$$n \geqslant \log_{D^{-1}(N)} \frac{7M_0}{2\varepsilon}.$$

下面是应用定理2的一个实例:

下面3幅图依次为物体原始网格, 细分两次后的网格, 极限曲面. 设对细分两次后的网格取 $M_0 = 1$, 要求的最大误差不超过0.01. 则由定理2的计算公式得到 $n = 11$. 这时控制网格到极限曲面的距离的最大误差不超过0.006 24.

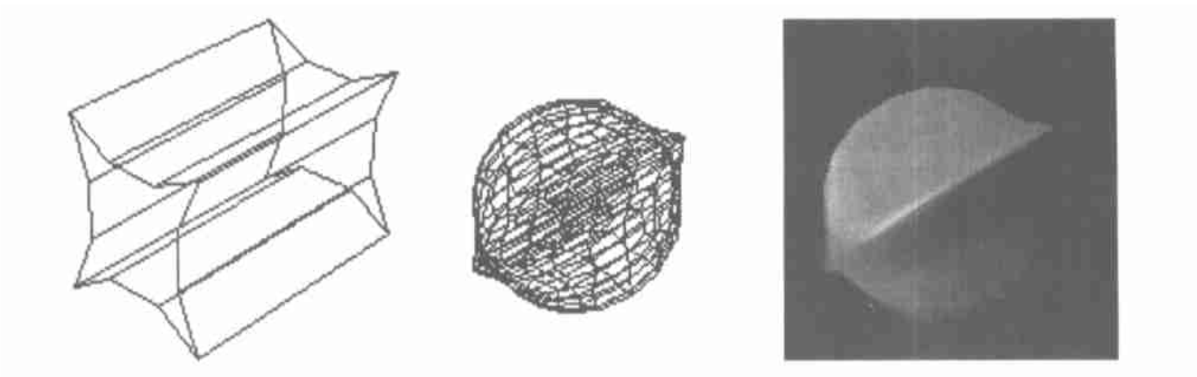

图 2　杨桃形状的曲面($N = 3$)

Fig. 2　Subdivision for surface of carambola shape

致谢: 作者感谢美国 Kentucky 大学图形学与几何造型实验室 Frank Chéng 教授对此项研究提供了有关研究资料.

参考文献:

[1] Catmull E, Clark J. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes [J]. Computer Aided Design, 1978, 10(6): 350-355.

[2] Jos stam. Exact evaluation of Catmull-Clark subdivision surfaces at arbitrary parameter values[A]. Proceedings of SIGGRAPH 98[C]. USA: Addison-Wesley, 1998. 395-400.

[3] Halstead M, Kass M, DeRose T. Efficient, fair interpolation using Catmull-Clark surfaces[A]. Proceedings of SIGGRAPH 93[C]. USA: Addison-Wesley, 1993. 35-44.

Error Analysis for Catmull-Clark Subdivision Surfaces

ZENG Xiao-ming, YANG Jun

(Depatment of Mathematics, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: This paper studies error estimate of Catmull-Clark subdivision surfaces. The authors prove that the control polyhedron of Catmull-Clark surface converge to its limit surface in an exponential rate, and give a computing formula for error estimate of Catmull-Clark surfaces by using new methods of neighbor points of control points and first order difference of control points. The technique of this paper can be generalized to Doo-Sabin surfaces and other free form surfaces.

Key words: Catmull-Clark surfaces; control point; subdivision surfaces; error analysis