

Catmull-Clark 曲面控制网格的收敛性质*

陈 旭¹ 曾晓明¹ 连博勇¹ 古达·维²

(1. 厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005; 2. 内达吉技术学院应用科学所, 印度 新德里 110075)

摘 要 文献[4]给出 Catmull-Clark 细分曲面控制网格的收敛速率和一个误差计算公式. 本文在此基础上提出一个新的算法, 并借助此新算法得到关于 Catmull-Clark 细分曲面控制网格的收敛速率的更精确的估计和给出更好的误差计算公式.

关键词 Catmull-Clark 曲面; 控制网格; 细分曲面; 收敛速度

中图分类号 O TP 391 **文献标识码** A

1 引 言

从 1978 年 Catmull-Clark 细分曲面产生至今, 经历了二十多年的发展, 细分曲面方法在理论研究方面已取得不少成果. Catmull-Clark 曲面是一种逼近形式的细分曲面框架, 因此一个重要的问题是研究其控制网格的收敛速率以及极限曲面产生过程的误差估计. 文献[4]利用相邻点的概念和一阶差分给出了这方面研究的初步结果. 本文在文献[4]基础上提出新的算法, 并借助此算法得到关于 Catmull-Clark 细分曲面控制网格的收敛速率的更精确的估计和给出更好的误差计算公式.

2 定义和记号

假设控制网格已经过至少两次细分, 其奇异点是孤立的. 记 $\{P_i^{(0)} \mid 1 \leq i \leq 2N + 8\}$ 为 Catmull-Clark 曲面片 $S(u, v)$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$ 的初始控制网格(假定曲面片按 Stam[2] 的方法参数化), 如图 1 所示, 其中 P_1 是一个度数为 N 的奇异点. 经过一次细分后, 得到一组新的控制顶点, 它们构成一个新的控制网格, 记为 $\{P_i^{(1)} \mid 1 \leq i \leq 2N + 17\}$, 如图 2 所示. 记细分 n 次后形成的控制网格为 $\{P_i^{(n)} \mid 1 \leq i \leq 2N + 17\}$.

下面引入相邻点的概念.

定义 1 在控制网格 $\{P_i^{(n)}\}$ 内, 若某个小空间四边形以 $P_i^{(n)}$ 为其一个顶点, 则此四边形其它顶点称为 $P_i^{(n)}$ 的相邻点.

如图 1, $P_1^{(0)}$ 的相邻点为 $P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, \dots, P_{2N+1}^{(0)}$.

* 收稿日期: 2006-10-31

定义 2 在第 n 层控制网格 (n) 中, 令

$$(n) = \max\{ P_i^{(n)} - P_{ij}^{(n)} \}, \text{ 其中 } P_{ij}^{(n)} \text{ 是 } P_i^{(n)} \text{ 的相邻点},$$

其中 \cdot 是三维欧氏空间 R^3 中的距离范数.

在下文中, 为方便起见, 将 $P_i^{(0)}$ 简写为 P_i , 并将 (0) 简写为 \cdot .

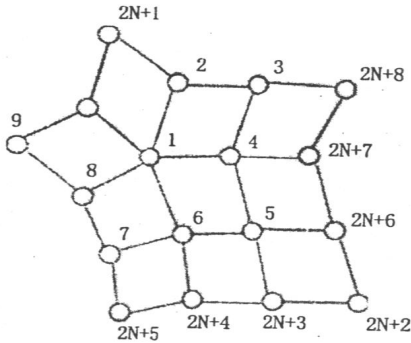


图 1 细分前的控制网格

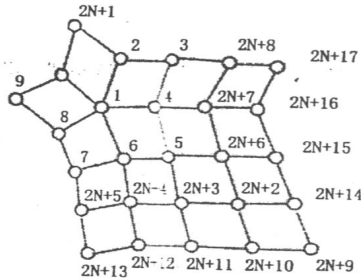


图 2 细分后的控制网格

3 定理及证明

本节给出本文主要结果及其证明. 注意到按 Stam [2] 关于控制顶点的排列顺序, 每次细分后, 图 2 中左上角的控制子网格(即由点 $P_i, 1 \leq i \leq 2N + 1$ 组成的控制子网格) 具有相同的拓扑结构(参见文献[2], P397). 关于这些子网格的关系, 本文证得如下结论:

定理 1 对于第 $2n$ 层控制网格 $(2n)$, 有如下估计:

$$(2n) \leq M(N)^n,$$

这里

$$M(N) = \begin{cases} \frac{65}{256}, & N = 3 \\ \frac{69}{256}, & N = 4 \\ \frac{8N^3 + 39N^2 - 280N + 220}{16N^3}, & N \geq 5 \end{cases}$$

证明 含奇异点的子控制网格 $(C_1 = \{P_i^{(1)} \mid 1 \leq i \leq 2N + 8\})$ 的顶点组成的向量 C_1 可以由细分矩阵 A 乘以细分前控制网格 (C_0) 的顶点组成的向量 C_0 得到. 而初始网格 (C_0) 细分后得到的控制网格 (C_1) 的顶点组成的向量(参见图[2]) C_1 则可以由增广细分矩阵 \bar{A} 乘以 (C_0) 的顶点组成的向量 C_0 得到:

$$C_1 = A C_0, \quad \bar{C}_1 = \bar{A} C_0,$$

$$C_0 = (P_1, P_2, \dots, P_{2N+8},$$

$$C_1^T = (P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, \dots, P_{2N+8}^{(1)}),$$

$$\bar{C}_1^T = (P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, \dots, P_{2N+17}^{(1)}).$$

关于细分矩阵 A 和它的增广矩阵 \bar{A} 的具体形式, 参见 Stam [2].
要证明定理, 显然只需证有

$$(2) \quad M(N)$$

根据 $C_1 = AC_0$, 显然有 $C_2 = A^2C_0$.

直接计算得, 当 $N = 3$ 时, $(2) \quad \frac{65}{256}$;

当 $N = 4$ 时, $(2) \quad \frac{69}{256}$;

下面详细考虑当 $N = 5$ 时, 如图 1 所示, 计算可得:

$$P_1^{(2)} = \frac{16N^2 - 46N + 49}{16N^2}P_1 + \frac{19N - 21}{8N^3}P_2 + \frac{8N - 7}{16N^3}P_3 + \dots + \frac{19N - 21}{8N^3}P_{2N}$$

$$+ \frac{8N - 7}{16N^3}P_{2N+1};$$

$$P_2^{(2)} = \frac{19N - 21}{32N}P_1 + \frac{23N^2 + 72}{128N^2}P_2 + \frac{11N^2 + 24}{256N^2}P_3 + \frac{N^2 + 9}{16N^2}P_4 + \frac{N^2 + 24}{256N^2}P_5$$

$$+ \frac{N^2 + 144}{256N^2}P_6 + \frac{3}{32N^2}P_7 + \frac{9}{16N^2}P_8 + \dots + \frac{9N}{16N^2}P_{2N-4} + \frac{3}{32N^2}P_{2N-3}$$

$$+ \frac{N^2 + 144}{256N^2}P_{2N-2} + \frac{N^2 + 24}{64N^2}P_{2N-1} + \frac{N^2 + 9}{16N^2}P_{2N} + \frac{11N^2 + 24}{256N^2}P_{2N+1};$$

$$P_3^{(2)} = \frac{8N - 7}{16N}P_1 + \frac{11N^2 + 24}{64N^2}P_2 + \frac{3N^2 + 2}{32N^2}P_3 + \frac{11N^2 + 24}{64N^2}P_4 + \frac{N^2 + 4}{64N^2}P_5$$

$$+ \frac{N^2 + 24}{64N^2}P_6 + \frac{1}{16N^2}P_7 + \frac{3}{8N^2}P_8 + \dots + \frac{3}{8N^2}P_{2N-2} + \frac{1}{16N^2}P_{2N-1}$$

$$+ \frac{N^2 + 24}{62N^2}P_{2N} + \frac{N^2 + 4}{64N^2}P_{2N+1}.$$

则有:

$$64N^3(P_1^{(2)} - P_3^{(2)}) = (32N^3 - Na_N - Nb_N)P_1 - (11N^3 - a_N)P_2$$

$$- (6N^3 - b_N)P_3 - (11N^3 - a_N)P_4 - (N^3 - b_N)P_5$$

$$- (N^3 - a_N)P_6 + b_NP_7 + a_NP_8 \dots + a_NP_{2N-2}$$

$$+ b_NP_{2N-1} - (N^3 - a_N)P_{2N} - (N^3 - b_N)P_{2N+1},$$

其中 $a_N = 128N - 168$, $b_N = 26N - 28$.

令 $64N^3(P_1^{(2)} - P_3^{(2)}) = H_1 + H_2$, 其中:

$$H_1 = [8N^3 - (N - 6)a_N - (N - 2)b_N]P_1 - (6N^3 - b_N)P_3 - (N^3 - b_N)P_5$$

$$- (N^3 - b_N)P_{2N+1} + b_NP_9 + a_NP_{10} + \dots + a_NP_{2N-4} + b_NP_{2N-3};$$

$$H_2 = (24N^3 - 6a_N - 2b_N)P_1 - (11N^3 - a_N)P_2 - (11N^3 - a_N)P_4$$

$$- (N^3 - a_N)P_6 + b_NP_7 + a_NP_8 + a_NP_{2N-2} + b_NP_{2N-1}$$

$$- (N^3 - a_N)P_{2N}.$$

$$\begin{aligned}
 H_1 = & (6N^3 - b_N)(P_1 - P_3) + (N^3 - b_N)(P_1 - P_5) \\
 & + (N^3 - b_N)(P_1 - P_{2N+1}) + b_N(P_9 - P_1) + a_N(P_{10} - P_1) \\
 & + \dots + a_N(P_{2N-4} - P_1) + b_N(P_{2N-3} - P_1) \\
 & [8N^3 + (N - 6)a_N + (N - 8)b_N] .
 \end{aligned}$$

当 $5 \leq N \leq 10$ 时, P_6 和 P_{2N} 的系数 $-(N^3 - a_N)$ 是正数, 则有:

$$\begin{aligned}
 H_2 = & -(N^3 - a_N)(P_6 - P_4) - (N^3 - a_N)(P_{2N} - P_2) \\
 & + (12N^3 - 2a_N)(P_1 - P_2) + (12N^3 - 2a_N)(P_1 - P_4) \\
 & + b_N(P_7 - P_1) + a_N(P_8 - P_1) + a_N(P_{2N-2} - P_1) \\
 & + b_N(P_{2N-1} - P_1) \\
 & (22N^3 + 2b_N) ;
 \end{aligned}$$

当 $N \geq 11$ 时, P_6 和 P_{2N} 的系数 $-(N^3 - a_N)$ 是负数, 则有:

$$H_2 = (11N^3 - a_N)(P_1 - P_2) + (11N^3 - a_N)(P_1 - P_4) + K,$$

其中

$$\begin{aligned}
 K = & (2N^3 - 4a_N - 2b_N)P_1 - (N^3 - a_N)P_6 - (N^3 - a_N)P_{2N} \\
 & + b_N P_7 + a_N P_8 + a_N P_{2N-2} + b_N P_{2N-1} \\
 & \begin{cases} (2a_N + 2b_N) , & 11 \leq N \leq 16, \\ (2N^3 - 2a_N) , & N \geq 17. \end{cases}
 \end{aligned}$$

则有:

$$H_2 \begin{cases} (22N^3 + 2b_N) , & 11 \leq N \leq 16, \\ (22N^3 - 4a_N) , & N \geq 17. \end{cases}$$

于是就有:

$$\begin{aligned}
 P_1^{(2)} - P_3^{(2)} &= \frac{1}{64N^3} (H_1 + H_2) \\
 &= \frac{8N^3 + 39N^2 - 280N + 220}{16N^3} , \quad N \geq 5.
 \end{aligned}$$

直接计算可得,

$$P_1^{(2)} - P_2^{(2)} = P_1^{(2)} - P_3^{(2)}$$

同理可得,

$$P_1^{(2)} - P_i^{(2)} = \frac{8N^3 + 39N^2 - 280N + 220}{16N^3} , \quad N \geq 5,$$

这里 $3 \leq i \leq 2N + 1$.

下面再考虑 $P_i^{(2)} - P_{ij}^{(2)}$, 这里 $2 \leq i \leq 2N + 8$, $P_{ij}^{(2)}$ 是 $P_i^{(2)}$ 的所有相邻点.

若 $P_{ij}^{(2)} = P_1^{(2)}$, 那么同以上的结论一样.

若 $P_{ij}^{(2)} \neq P_1^{(2)}$, 则结合文章[4]中的结论, 显然有:

$$P_i^{(2)} - P_{ij}^{(2)} \geq \frac{9}{16} (P_i^{(1)} - P_{ij}^{(1)}) \geq \frac{9}{16} \frac{3N^2 + 7N - 40}{4N^2} .$$

即证明了当 $N \geq 5$ 时,

$$(2) \quad \frac{8N^3 + 39N^2 - 280N + 220}{16N}$$

至此, 定理证毕.

利用定理 1 和细分曲面的凸包性质, 我们有如下定理:

定理 2 设 n 为细分次数, $\forall \epsilon > 0$, 要使得第 n 层控制网格 (n) 与极限曲面 $S(u, v)$ 的距离 $d_n < \epsilon$, 只要:

$$n \geq 2 \log_{M(N)^{-1}} \frac{7}{2\epsilon}.$$

证明 对于第 $2n$ 层控制网格, 以 $P_0^{(n)} = \frac{1}{4}(P_1^{(n)} + P_4^{(n)} + P_5^{(n)} + P_6^{(n)})$ 为球心, 以 $\frac{7}{4}M(N)^n$ 为半径作一个球, 则第 $2n$ 层控制网格完全被包含在这个球内. 根据细分曲面的凸包性质, 显然极限曲面也在这个球内. 则第 $2n$ 层控制网格到极限曲面的距离不会超过球的直径 $\frac{7}{2}M(N)^n$. 要使得第 n 层控制网格 (n) 与极限曲面 $S(u, v)$ 的距离 $d_n < \epsilon$, 只要 $\frac{7}{2}M(N)^{\left(\frac{n}{2}\right)} < \epsilon$, 就有:

$$n \geq 2 \log_{M(N)^{-1}} \frac{7}{2\epsilon}.$$

下面是应用定理 2 的一个实例. 图 3 至图 6 分别是 $N = 3$ 时的初始网格, 细分一次的网格, 细分四次的网格以及极限曲面. 设对细分两次后的网格取 $\epsilon = 1$, 要求最大误差不超过 0.01. 则由定理 2 的计算公式得到 $n = 9$, 这时控制网格到极限曲面距离的最大误差不超过 0.00733.

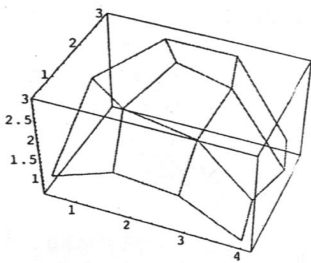


图 3 原始的控制网格

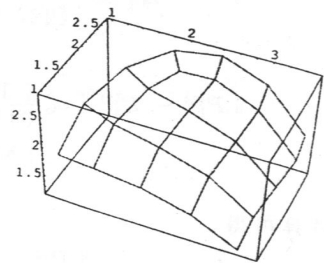


图 4 细分一次后的控制网格

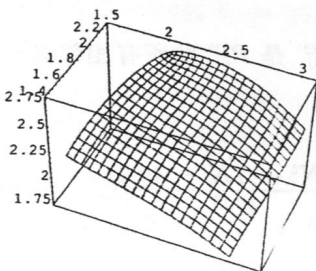


图 5 细分四次后的控制网格

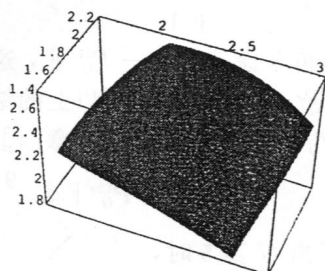


图 6 极限曲面

参 考 文 献

- [1] Catmull E, Clark J. Recursively generated B -spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer Aided Design*. 1978, 10(6): 350– 355.
- [2] Jos Stam. Exact evaluation of Catmull-Clark subdivision surfaces at arbitrary parameter values. In *Proceedings of SIGGRAPH 98[C]*, 1998, 395– 400.
- [3] Halstead M, Kass M, DeRose Efficient T. Fair Interpolation Using Catmull-Clark surfaces. In *Proceedings of SIGGRAPH 93[C]*, 1993, 35– 44. Addison-Wesley Publishing company, August 1993.
- [4] 杨军, 曾晓明. Catmull-Clark 细分曲面的误差分析. *厦门大学学报(自然科学版)*, 2004, 43(1): 1– 3.

Convergence Property of Control Meshes of Catmull-Clark Surfaces

*Chen Xu*¹ *Zeng Xiaoming*¹ *Lian Boyong*¹ *Vijay Gupta*²

(1. Department of Mathematics, Xiamen University, Xiamen 361005

2. School of Applied Sciences, Netaji Subhas Institute of Technology, New Delhi 110075, India)

Abstract Article [4] gave the convergence rate of control meshes of Catmull-Clark subdivision surfaces and a computational formula for error estimate. In this paper, we present a new algorithm. By means of this new algorithm we obtain a more precise estimate of convergence rate of control meshes of Catmull-Clark subdivision surfaces and a better computational formula for error estimate.

Key words Catmull-Clark surfaces; control meshes; subdivision surfaces; convergence rate