第 21 卷第 4 期　　大 学 数 学　　Vol. 21, №4
2005 年 8 月　　COLLEGE MATHEMATICS　　Aug. 2005

Cantor 三分集构造方法探微

伍火熊
(厦门大学 数学科学学院,厦门 361005)

[**摘　要**] 以 Cantor 三分集的构造为基础,揭示了该构造方法的本质特征,给出了它的一般化叙述和若干应用.

[**关键词**] Cantor 三分集;完备集;稀疏集;构造法
[**中图分类号**] O174.2　　[**文献标识码**] C　　[**文章编号**] 1672-1454(2005)04-0088-04

Cantor 三分集是德国数学家 Cantor 在研究三角级数问题时构造出来的一个特殊点集. 它具有若干重要特征,常常是数学工作者构造反例的重要基础. 它的巧妙构思也为我们解决某些数学问题提供了方法与思路. 本文旨在阐述其构造思想的本质特征,将其构造思想一般化,以便初学者更好地把握这一构造方法并运用它来解题.

1　Cantor 三分集的构造

设 $[0,1]\subset\mathbf{R}^1$. 将 $[0,1]$ 三等分,并移去中央三分开区间 $I_{1,1}=(1/3,2/3)$,记其留存部分为 F_1,即 $F_1=[0,1/3]\cup[2/3,1]$. 再将 F_1 中的区间 $[0,1/3]$ 和 $[2/3,1]$ 各三等分,并移去中央三分开区间 $I_{2,1}=(1/9,2/9)$ 及 $I_{2,2}=(7/9,8/9)$. 再记 F_1 中的留存部分为 F_2,即

$$F_2=\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right].$$

一般地,第 n 次移去中央三分区间

$$I_{n,1}=\left(\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n}\right),\quad I_{n,2}=\left(\frac{7}{3^n},\frac{8}{3^n}\right),\quad\cdots,\quad I_{n,2^{n-1}}=\left(\frac{3^n-2}{3^n},\frac{3^n-1}{3^n}\right).$$

设所得剩余部分为 F_n,再将 F_n 中每个(互不相交)区间三等分,并移去中央三分区间,记其留存部分为 F_{n+1},如此等等. 从而得到集列 $\{F_n\}$,其中

$$F_n=F_{n,1}\cup F_{n,2}\cup\cdots\cup F_{n,2^n},\quad n=1,2,\cdots.$$

作点集 $C=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$,称 C 为 Cantor 三分集.

众所周知,由此构造的 Cantor 三分集是测度为零的疏朗完全集,且具有连续点集的势. 其中疏朗性和完全性并存是其最本质的奇特性质. 正是这些奇特性质和它的巧妙构思为构造一些重要反例提供了启示.

2　Cantor 三分集构造法的本质特征和拓展

从 Cantor 三分集构造,我们可以看出其构作主要具有如下特点:

[**收稿日期**] 2004-08-31
[**基金项目**] 国家自然科学基金资助项目(G10271016)

(i) 将每一留存区间三等分,然后移去中央开区间;

(ii) 第 1 次移去 1 个长度为 1/3 的中央开区间,留存下两个等长的不交闭区间;第 n 次移去 2^{n-1} 个长度为 $1/3^n$(即 $1/3 \cdot 1/3^{n-1}$) 的中央开区间,留存下 2^n 个等长的互不相交闭区间;

(iii) 上述过程无限进行.

分析上述特点,我们不难发现:在无限构作过程中,移去中央开区间导致了 C 的疏朗性,留存闭区间保证了 C 的完全性,而移去的中央开区间的总长度为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}=1,$$

导致 C 的测度为 0.

由此,我们把上述构造方法做如下一些拓展,能得到一些有趣的结果.

(i) 对区间 $[0,1]$,类似于 Cantor 三分集构造过程,将每一个留存闭区间分成中心对称的三部分(不必是三等分),移去中央开区间. 第一步,移去长度为 $\alpha/3$ $(0<\alpha\leq 1)$ 的中央开区间;第二步,在留存的两个闭区间的每一个中,移去长度为 $\alpha/3^2$ 的中央开区间; …;第 n 步移去的是 2^{n-1} 个长度为 $\alpha/3^n$ 中间开区间,留存 2^n 个等长的不交闭区间; …: 如此继续下去,可得一列移去的开区间,记其并集为 G(开集),则 G_α 的总长度为 α. 而 $C_\alpha=[0,1]\setminus G$ 是一个测度为 $1-\alpha$ 的疏朗完全集. 当 $\alpha=1$ 时,即为 Cantor 三分集.

更一般地,对区间 $[a,b]$ 类似于上述构作,第 n 次移去的是 2^{n-1} 个长度为 $\alpha/3^n$ $(0<\alpha\leq b-a)$ 中间开区间,留存 2^n 个等长的不交闭区间. 由此,我们可以得到一个测度为 $b-a-\alpha$ 的疏朗完全集.

(ii) 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的方体 $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$,将每一 $[a_i,b_i]$ 类似于(1)中构作,得到长度为 $b_i-a_i-\alpha_i$ $(0<\alpha_i\leq b_i-a_i)$ 的疏朗完全集 C_{α_i} $(=1,2,\cdots,n)$. 则 $C_{\alpha_1}\times C_{\alpha_2}\times\cdots\times C_{\alpha_n}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的疏朗完全集,其测度为 $\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i-\alpha_i)$.

(iii) 在 Cantor 三分集构造中,为得到其奇特性质,每次进行三分不是本质的. 作为理论探讨,我们也可如下来构造:对于任意给定的正奇数 $2k+1$,第一步,将 $[0,1]$ 区间 $2k+1$ 等分,并移去中间的第 2,4, …,$2k$ 个开区间

$$I_1^1=\left(\frac{1}{2k+1},\frac{2}{2k+1}\right),\quad I_2^1=\left(\frac{3}{2k+1},\frac{4}{2k+1}\right),\quad \cdots,\quad I_k^1=\left(\frac{2k-1}{2k+1},\frac{2k}{2k+1}\right),$$

记其留存部分为 F_1,即

$$F_1=\left[0,\frac{1}{2k+1}\right]\cup\left[\frac{2}{2k+1},\frac{3}{2k+1}\right]\cup\cdots\cup\left[\frac{2k}{2k+1},1\right]=F_0^1\cup F_1^1\cup\cdots\cup F_k^1.$$

第二步,将 F_1 中的 $k+1$ 个闭区间 $\{F_{j_1}^1\}_{j_1=0}^{k}$ 各 $2k+1$ 等分,并移去每一等分闭区间中的第 2,4, …,$2k$ 个中间开区间

$$I_{0,1}^2=\left(\frac{1}{(2k+1)^2},\frac{2}{(2k+1)^2}\right),\quad I_{0,2}^2=\left(\frac{3}{(2k+1)^2},\frac{4}{(2k+1)^2}\right),\quad\cdots,\quad I_{0,k}^2=\left(\frac{2k-1}{(2k+1)^2},\frac{2k}{(2k+1)^2}\right);$$

$$I_{1,1}^2=\left(\frac{2(2k+1)+1}{(2k+1)^2},\frac{2(2k+1)+2}{(2k+1)^2}\right),\quad\cdots,\quad I_{1,k}^2=\left(\frac{2(2k+1)+2k-1}{(2k+1)^2},\frac{2(2k+1)+2k}{(2k+1)^2}\right);$$

$$\cdots,\ \cdots,\ \cdots$$

$$I_{k,1}^2=\left(\frac{2k(2k+1)+1}{(2k+1)^2},\frac{2k(2k+1)+2}{(2k+1)^2}\right),\quad\cdots,\quad I_{k,k}^2=\left(\frac{2k(2k+1)+2k-1}{(2k+1)^2},\frac{2k(2k+1)+2k}{(2k+1)^2}\right).$$

再记 F_1 中的留存部分为 F_2,即

$$F_2=\bigcup_{j_1=0}^{k}\bigcup_{j_2=0}^{k}F_{j_1,j_2}^2,\qquad F_{j_1,j_2}^2=\left[\frac{2j_1(2k+1)+2j_2}{(2k+1)^2},\frac{2j_1(2k+1)+2j_2+1}{(2k+1)^2}\right].$$

一般地,第 n 次移去 $k(k+1)^{n-1}$ 个长度为 $1/(2k+1)^n$ 的中间开区间,

$$I_{j_1,j_2,\cdots,j_{n-1},i}^n=\left(\frac{2j_1(2k+1)^{n-1}+2j_2(2k+1)^{n-2}+\cdots+2j_{n-1}(2k+1)+2i-1}{(2k+1)^n},\right.$$
$$\left.\frac{2j_1(2k+1)^{n-1}+2j_2(2k+1)^{n-2}+\cdots+2j_{n-1}(2k+1)+2i}{(2k+1)^n}\right),$$

其中 $i=1,\cdots,k$; $j_m=0,1,2,\cdots,k$ $(m=1,2,\cdots,n-1)$. 设所得剩余部分为 F_n,再将 F_n 中每个(互不相交)闭区间 $2k+1$ 等分,并移去中间的第 $2,4,\cdots,2k$ 个开区间,记其留存部分为 F_{n+1},如此等等. 从而得到集列$\{F_n\}$,其中

$$F_n=\bigcup_{j_1=0}^{k}\bigcup_{j_2=0}^{k}\cdots\bigcup_{j_n=0}^{k}F^n_{j_1,j_2,\cdots,j_n},$$

$$F^n_{j_1,j_2,\cdots,j_{n-1},j_n}=\left[\frac{2j_1(2k+1)^{n-1}+2j_2(2k+1)^{n-2}+\cdots+2j_{n-1}(2k+1)+2j_n}{(2k+1)^n},\right.$$
$$\left.\frac{2j_1(2k+1)^{n-1}+2j_2(2k+1)^{n-2}+\cdots+2j_{n-1}(2k+1)+2j_n+1}{(2k+1)^n}\right].$$

作点集 $C_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$,则 C_k 具有 Cantor 三分集 C 完全相同的奇特性质.

注 从理论上讲,(3)中构作过程也可如(1)和(2)中一样,不必等分;也可在更一般的区间或空间方体上进行. 但在实际构造中还是以(1)和(2)中的三分处理最为简便.

3 应用举例

例1 对任意正数 λ, $0<\lambda<b-a$,试作$[a,b]$的一个闭子集 E,使 E 内不含内点,且 $mE=\lambda$.

解 如上节(1)中所述:第一步,在$[a,b]$的中央移去长为$(b-a-\lambda)/3$ 的开区间

$$I_1=\left(\frac{2a+b}{3},\frac{a+2b}{3}\right);$$

第二步,在留存的两个闭区间$[a,(2a+b)/3]$和$[(a+2b)/3,b]$中分别移去中央处的长为$(b-a-\lambda)/3^2$ 的开区间,它们的并记为 I_2.

……

第 n 步,在留存的 2^{n-1} 个闭子区间中,分别移去其中央处长为$(b-a-\lambda)/3^n$ 的开区间,记这 2^{n-1} 个互不相交的开区间之并为 I_n.

将上述过程无限进行下去,得一列开集$\{I_n\}$. 令 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$,则 G 为开集,且

$$mG=\sum_{n=1}^{\infty}mI_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b-a-\lambda}{3}\cdot\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}=b-a-\lambda.$$

不难验证 $E=[a,b]\setminus G$ 是疏朗完全集,且 $mE=m[a,b]-mG=\lambda$.

例2 对任意正数 α, $0<\alpha<1$,在$[0,1]$中作开集 G,使 $\overline{G}=[0,1]$,而 $mG=\alpha$.

解 在上题中,取 $a=0,b=1,\lambda=1-\alpha$,则我们已作出$[0,1]$中开集 G,且 $mG=\alpha$,而 $E=[0,1]\setminus G$ 为闭集.

此外,不难验证:对于任意 $x_0\in E$,存在 G 中的点列$\{x_n\}$以 x_0 为聚点,即 $E\subseteq G'$. 从而 $\overline{G}=G\cup G'=[0,1]$.

例3 在闭区间$[a,b]$上作出可数个两两不相交的完备的无处稠密子集,使它们的测度之和为 $b-a$.

解 第一步,在例题1的构作中,取 $\lambda=(b-a)/2$,则我们得到一个测度为$(b-a)/2$ 的疏朗完全集 E_1.

第二步,记 E_1 的余集为 G_1,则 G_1 为开集,且 $mG_1=(b-a)/2$. 设 G_1 的构成区间为(a_{1i},b_{1i}),则在每一(a_{1i},b_{1i})内作一测度为$(b_{1i}-a_{1i})/2$ 的疏朗完全集 E_{1i},于是

$$m\left(\sum_{i=1}^{\infty}E_{1i}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}mE_{1i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_{1i}-a_{1i}}{2}=\frac{1}{2}mG_1=\frac{1}{2^2}(b-a).$$

记 $E_2=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{1i}$,则 $E_2\subset G_1$. 因此 $E_2\cap E_1=\varnothing$,且 $E_1\cup E_2$ 为疏朗完全集.

然后,记 $E_1\cup E_2$ 的余集为 G_2,并设 G_2 的构成区间为(a_{2i},b_{2i}),则 $E_1\cup E_2\cup G_2=[a,b]$, E_1, E_2, G_2

互不相交,从而 $m[a,b] = mE_1 + mE_2 + mG_2$,即有

$$mG_2 = (b-a) - \frac{1}{2}(b-a) - \frac{1}{4}(b-a) = \frac{1}{4}(b-a).$$

同样地,在每个(a_{2i}, b_{2i})内作一测度为$(b_{2i} - a_{2i})/2$的疏朗完全集 E_{2i},记 $E_3 = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{2i}$,则

$$mE_3 = \sum_{i=1}^{\infty} mE_{2i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2}(b_{2i} - a_{2i}) = \frac{1}{2} mG_2 = \frac{b-a}{2^3}.$$

……

将上述过程无限进行下去,得到一列两两互不相交的疏朗完全集:$E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$,其中

$$mE_n = (b-a)/2^n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

令 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$,易知 E 满足题给要求.

[参　考　文　献]

[1]　那汤松. 实变函数论[M]. 北京:高等教育出版社,1958.

[2]　江泽坚,吴智泉. 实变函数论[M]. 北京:人民教育出版社,1959.

[3]　周民强. 实变函数论[M]. 北京:北京大学出版社,2000.

[4]　张喜堂. 实变函数论的典型问题与方法[M]. 武汉:华中师范大学出版社,2000.