中国科学 A 辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 10 期: 1180～1186
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE IN CHINA PRESS

从三角范畴的 recollement到 Abel 范畴的 recollement

王敏雄 ①②*, 林亚南②,

① 华侨大学数学科学学院, 泉州 362021
② 厦门大学数学科学学院, 厦门 361005
E-mail: mxw@hqu.edu.cn

收稿日期: 2008-11-12; 接受日期: 2009-03-13; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 10671161)、教育部博士点基金 (批准号: 20060384002) 和华侨大学科研启动基金 (批准号: 08BS506) 资助项目

摘要 研究了三角范畴的 recollement 与 Abel 范畴的 recollement 的关系. 证明了: 若三角范畴 $\mathcal{D}$ 允许关于三角范畴 $\mathcal{D}'$ 和 $\mathcal{D}''$ 的 recollement, 则 Abel 范畴 $\mathcal{D}/\mathcal{T}$ 允许关于 Abel 范畴 $\mathcal{D}'/i^*(\mathcal{T})$ 和 $\mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T})$ 的 recollement, 其中 $\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{D}$ 的 cluster-倾斜子范畴, 且满足 $i_*i^*(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}, j_*j^*(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$.

关键词 三角范畴 Abel 范畴 recollement cluster-倾斜子范畴 商范畴

MSC(2000) 主题分类 16G20, 16G70, 19S99, 17B20

1 引言

Abel 范畴和三角范畴是两个基本的代数结构. 三角范畴的 recollement 和 Abel 范畴的 recollement 在奇异空间几何研究中起着重要的作用. 三角范畴的 recollement 由 Beilison 等 [1] 在研究几何问题时首先引入, 而 Cline 等 [2,3] 将 recollement 的概念用于代数的研究. MacPherson 和 Vilonen[4] 给出了 Abel 范畴的 recollement 的基本构造, 这种构造法用于递推的构造 perverse 层. 从 Abel 范畴可以构造三角范畴 [5]. 例如, 自入射代数 A 的有限生成模范畴 $\mathrm{mod}A$ 的稳定范畴 $\underline{\mathrm{mod}}A$ 是一个三角范畴, 有限维代数的导出范畴也是一个三角范畴. 另一方面, Koenig 和朱彬 [6] 证明了由一个三角范畴模去其 cluster-倾斜子范畴得到的商范畴是一个 Abel 范畴, 从而得到了由一个三角范畴构造 Abel 范畴的一般方法. 从一个已知的 recollement 构造一个新的 recollement 是一个有趣的问题 [7−9]. 本文的主要结论是:

定理 1.1 设 $\mathcal{D},\mathcal{D}',\mathcal{D}''$ 为三角范畴. $\mathcal{D}$ 允许关于 $\mathcal{D}'$ 和 $\mathcal{D}''$ 的 recollement, 即

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}' \arrow[r, "i_*"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^*"] & \mathcal{D}'' \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd}.$$

若 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{D}$ 的 cluster-倾斜子范畴, 且满足 $i_*i^*(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$, $j_*j^*(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$. 则 Abel 范畴 $\mathcal{D}/\mathcal{T}$ 允

引用格式: 王敏雄, 林亚南. 从三角范畴的 recollement 到 Abel 范畴的 recollement. 中国科学 A, 2009, 39(10): 1180–1186
Wang M X, Lin Y N. From recollement of triangulated categories to recollement of abelian categories. Sci China Ser A, 2010, 53, DOI: 10.1007/s11425-009-0189-1

许关于 Abel 范畴 $\mathcal{D}'/i^*(\mathcal{T})$ 和 $\mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T})$ 的 recollement, 即

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}'/i^*(\mathcal{T}) \arrow[r, "\widetilde{i}_*"] & \mathcal{D}/\mathcal{T} \arrow[l, bend right, "\widetilde{i}^*"'] \arrow[l, bend left, "\widetilde{i}^!"] \arrow[r, "\widetilde{j}^*"] & \mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T}) \arrow[l, bend right, "\widetilde{j}_!"'] \arrow[l, bend left, "\widetilde{j}_*"] \end{tikzcd} .$$

2 预备知识

本文总约定范畴 $\mathcal{H}$ 的子范畴 $\mathcal{T}$ 为同构闭的满子范畴.

定义 2.1[10] 设 $\mathcal{A},\mathcal{A}',\mathcal{A}''$ 为 Abel 范畴. 则 $\mathcal{A}$ 关于 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 的一个 recollement, 记作

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}' \arrow[r, "i_*"] & \mathcal{A} \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^*"] & \mathcal{A}'' \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd} ,$$

是指六个加法函子

$$i_* = i_! : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}; \quad j^* = j^! : \mathcal{A} \to \mathcal{A}''; \quad i^*, i^! : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'; \quad j_*, j_! : \mathcal{A}'' \to \mathcal{A},$$

满足如下三个条件:

(1) $(i^*, i_*), (i_!, i^!), (j_!, j^!)$ 和 (j^*, j_*) 是伴随对;

(2) $i_*, j_!$ 和 j_* 是满嵌入函子;

(3) $j^*i_* = 0$.

定义 2.2[1] 设 $\mathcal{D},\mathcal{D}',\mathcal{D}''$ 为三角范畴. 则 $\mathcal{D}$ 关于 $\mathcal{D}'$ 和 $\mathcal{D}''$ 的一个 recollement, 记作

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}' \arrow[r, "i_*"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^*"] & \mathcal{D}'' \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd} ,$$

是指六个正合函子

$$i_* = i_! : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}; \quad j^* = j^! : \mathcal{D} \to \mathcal{D}''; \quad i^*, i^! : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'; \quad j_*, j_! : \mathcal{D}'' \to \mathcal{D},$$

满足如下四个条件:

(1) $(i^*, i_*), (i_!, i^!), (j_!, j^!)$ 和 (j^*, j_*) 是伴随对;

(2) $i_*, j_!$ 和 j_* 是满嵌入函子;

(3) $j^*i_* = 0$;

(4) 对 $\mathcal{D}$ 中任一对象 X, 可以确定 $\mathcal{D}$ 中两个三角

$$i_*i^!X \to X \to j_*j^!X \to T(i_*i^!X) \qquad 和 \qquad j_!j^*X \to X \to i_!i^*X \to T(j_!j^*X).$$

下面的定义由 Iyama[11] 给出.

定义 2.3 设 $\mathcal{D}$ 为一个三角范畴, $\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{D}$ 的一个满子范畴. 如果 $\mathcal{T}$ 满足下列条件:

(1) $\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{D}$ 的反变有限和共变有限的子范畴;

(2) $X \in \mathcal{T}$ 当且仅当 $\mathrm{Ext}^1(X, \mathcal{T}) = 0$;

(3) $X \in \mathcal{T}$ 当且仅当 $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{T}, X) = 0$,

则称 $\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{D}$ 的一个 cluster-倾斜子范畴.

定义 2.3 是自对偶的, 事实上有如下引理:

引理 2.4[6] 设 $\mathcal{D}$ 为三角范畴, $\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{D}$ 的满子范畴. 若 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{D}$ 中反变有限且满足定义 2.3 中的条件 (3), 则 $\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{D}$ 的一个 cluster-倾斜子范畴, 即 $\mathcal{T}$ 满足定义 2.3 中所有条件.

设 $\mathcal{H}$ 为一个加法范畴, $\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{H}$ 的满子范畴, 且对于直和封闭, 直和项封闭, 则商范畴 $\mathcal{A} := \mathcal{H}/\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{H}$ 有相同的对象, 且 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(X,Y)/\mathcal{T}(X,Y)$, 其中 $\mathcal{T}(X,Y)$ 表

示 $\mathcal{H}$ 中所有可经过 $\mathcal{T}$ 中对象分解的 X 到 Y 的态射所构成的子群. 商范畴 $\mathcal{A}$ 为加法范畴. 设 f 为 $\mathcal{H}$ 中态射, 其在商范畴 $\mathcal{A}$ 中所对应的剩余类记为 $\overline{f}$.

显然我们有如下定理.

定理 2.5 设 $\mathcal{H}$ 为一个加法范畴和 $\mathcal{T}$ 为满子范畴. 则存在一个加法范畴 $\mathcal{H}/\mathcal{T}$ 和一个加法函子 $Q_{\mathcal{H}}:\mathcal{H}\to\mathcal{H}/\mathcal{T}$ 使得

(1) 对 $\mathcal{T}$ 中任意对象 T, $Q_{\mathcal{H}}(T)=O$;

(2) 对任意加法范畴 $\mathcal{B}$ 和加法函子 $F:\mathcal{H}\to\mathcal{B}$, 如果 F 满足对 $\mathcal{T}$ 中任意对象 T, 有 $F(T)=O$, 则有唯一的加法函子 $G:\mathcal{H}/\mathcal{T}\to\mathcal{B}$ 使得 $F=G\cdot Q_{\mathcal{H}}$, 即有如下交换图:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q_{\mathcal{H}}"'] & \mathcal{B} \\ \mathcal{H}/\mathcal{T} \arrow[ur, dotted, "G"'] & \end{tikzcd}$$

且范畴 $\mathcal{H}/\mathcal{T}$ 在同构的意义下唯一.

下面的定理由 Koenig 和朱彬 [6] 给出.

定理 2.6 设 $\mathcal{H}$ 为一个三角范畴, $\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{H}$ 的一个 cluster-倾斜子范畴. 则 $\mathcal{A}:=\mathcal{H}/\mathcal{T}$ 为一个 Abel 范畴.

下面回顾关于伴随对的一些性质, 这些性质可以参见文献 [12, 13].

引理 2.7 设 $(F,G):\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是伴随对, $\eta_{A,B}:\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A),B)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,G(B))$ 是自然等价, 则有

(1) 自然变换 $\varepsilon:\mathrm{id}_{\mathcal{A}}\Rightarrow GF$ (称作 (F,G) 的单位), 使得对任意 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A),B)$, $\eta_{A,B}(f)=G(f)\cdot\varepsilon_A$;

(2) 自然变换 $\delta:FG\Rightarrow\mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ (称作 (F,G) 的余单位), 使得对任意 $g\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,G(B))$, $\eta^{-1}_{A,B}(g)=\delta_B\cdot F(g)$.

进一步有下面的两个合成是恒等态射:

$$F(A)\xrightarrow{F(\varepsilon)}FGF(A)\xrightarrow{\delta_F}F(A)\quad 和 \quad G(B)\xrightarrow{\varepsilon_G}GFG(B)\xrightarrow{G(\delta)}G(B).$$

引理 2.8 若 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 为 G 的左 (或右) 伴随, 则 F 是满嵌入当且仅当 $GF\cong\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$.

3 主要结论的证明

引理 3.1 设 $\mathcal{D},\mathcal{D}''$ 为三角范畴, $j^*:\mathcal{D}\to\mathcal{D}''$, $j_*:\mathcal{D}''\to\mathcal{D}$ 为正合函子, 且 (j^*,j_*) 为伴随对. 若 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{D}$ 中反变有限, 则 $j^*(\mathcal{T})$ 在 $\mathcal{D}''$ 中反变有限.

证明 设 $Y\in\mathcal{D}''$, 则 $j_*(Y)\in\mathcal{D}$. 由 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{D}$ 中反变有限可知存在 $T\in\mathcal{T}$, 使得 $T\xrightarrow{f}j_*(Y)$ 为右 $\mathcal{T}$ 近似. 下证 $j^*(T)\xrightarrow{j^*(f)}j^*j_*(Y)\xrightarrow{\delta_Y}Y$ 为右 $j^*(\mathcal{T})$ 近似, 其中 δ_Y 为连接态射. 即证明对任意 $j^*(T')\in j^*(\mathcal{T})$ 及 $g\in\mathrm{Hom}(j^*(T'),Y)$, 存在 $\beta\in\mathrm{Hom}(j^*(T'),j^*(T))$ 使得下图可交换:

$$\begin{tikzcd} & j^*(T') \arrow[dl, dotted, "\beta"'] \arrow[d, "g"] \\ j^*(T) \arrow[r, "\delta_Y j^*(f)"'] & Y \end{tikzcd}$$

事实上, 由 $T \xrightarrow{f} j_*(Y)$ 为右 $\mathcal{T}$ 近似可知, 存在 $T' \xrightarrow{t} T$ 使下图可交换, 即 $ft = j_*(g)\varepsilon_{T'}$, 其中 $\varepsilon_{T'}$ 为连接态射.

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "\varepsilon_{T'}"] \arrow[d, dotted, "t"'] & j_*j^*(T') \arrow[d, "j_*(g)"] \\ T \arrow[r, "f"] & j_*(Y) \end{tikzcd}$$

由 $\delta : j^*j_* \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}'}$ 为自然变换, 对 $g : j^*(T') \to Y$ 有如下交换图, 即 $g \cdot \delta_{j^*(T')} = \delta_Y \cdot j^*j_*(g)$.

$$\begin{tikzcd} j^*j_*j^*(T') \arrow[r, "\delta_{j^*(T')}"] \arrow[d, "j^*j_*(g)"'] & j^*(T') \arrow[d, "g"] \\ j^*j_*(Y) \arrow[r, "\delta_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

又 (j^*, j_*) 为伴随对, 合成 $j^*(T') \xrightarrow{j^*(\varepsilon_{T'})} j^*j_*j^*(T') \xrightarrow{\delta_{j^*(T')}} j^*(T')$ 为恒等态射. 所以 $g = \delta_Y \cdot j^*j_*(g) \cdot j^*(\varepsilon_{T'})$. 即有 $\delta_Y \cdot j^*(f) \cdot j^*(t) = \delta_Y \cdot j^*j_*(g) \cdot j^*(\varepsilon_{T'}) = g$. 因此 $\delta_Y \cdot j^*(f)$ 为右 $j^*(\mathcal{T})$ 近似. 即 $j^*(\mathcal{T})$ 在 $\mathcal{D}''$ 中反变有限.

对偶地, 我们有如下引理:

引理 3.2 设 $\mathcal{D}, \mathcal{D}''$ 为三角范畴, $j^! : \mathcal{D} \to \mathcal{D}''$, $j_! : \mathcal{D}'' \to \mathcal{D}$ 为正合函子, 且 $(j_!, j^!)$ 为伴随对. 若 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{D}$ 中共变有限, 则 $j^!(\mathcal{T})$ 在 $\mathcal{D}''$ 共变有限.

引理 3.3 设 $\mathcal{D}, \mathcal{D}''$ 为三角范畴, $j^* : \mathcal{D} \to \mathcal{D}''$, $j_* : \mathcal{D}'' \to \mathcal{D}$ 为正合函子, 满足 (j^*, j_*) 为伴随对, j_* 为满嵌入. 若 $\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{D}$ 的 cluster-倾斜子范畴且 $j_*j^*(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$, 则 $j^*(\mathcal{T})$ 为 $\mathcal{D}''$ 的 cluster-倾斜子范畴.

证明 由引理 3.1 可知, $j^*(\mathcal{T})$ 在 $\mathcal{D}''$ 中反变有限. 设 X 为 $\mathcal{D}$ 中对象, 下证 $X \in j^*(\mathcal{T})$ 当且仅当 $\mathrm{Ext}^1(j^*(\mathcal{T}), X) = 0$.

首先, 设 $X = j^*(T') \in j^*(\mathcal{T})$. 任取 $j^*(T) \in j^*(\mathcal{T})$, 则有

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1(j^*(T), X) &= \mathrm{Ext}^1(j^*(T), j^*(T')) \cong \mathrm{Hom}(j^*(T), j^*(T')[1]) \\ &\cong \mathrm{Hom}(j^*(T), j^*(T'[1])) \cong \mathrm{Hom}(T, j_*j^*(T'[1])) \\ &\cong \mathrm{Ext}^1(T, j_*j^*(T')). \end{aligned}$$

又 $j_*j^*(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$, 所以 $\mathrm{Ext}^1(T, j_*j^*(T')) = 0$. 因此, $\mathrm{Ext}^1(j^*(T), X) = 0$.

反之, 由于

$$\mathrm{Ext}^1(j^*(T), X) \cong \mathrm{Hom}(j^*(T), X[1]) \cong \mathrm{Hom}(T, j_*(X)[1]) \cong \mathrm{Ext}^1(T, j_*(X)).$$

所以对任意 $T \in \mathcal{T}$, 若 $\mathrm{Ext}^1(j^*(T), X) = 0$, 则 $\mathrm{Ext}^1(T, j_*(X)) = 0$. 由 $\mathcal{T}$ 是 cluster-倾斜子范畴, 可知 $j_*(X) \in \mathcal{T}$. 因此, $X \cong j^*j_*(X) \in j^*(\mathcal{T})$.

从而由引理 2.4 可得 $j^*(\mathcal{T})$ 为 $\mathcal{D}''$ 的 cluster-倾斜子范畴.

引理 3.4 设 $\mathcal{D}, \mathcal{D}''$ 为三角范畴, $j^* : \mathcal{D} \to \mathcal{D}''$, $j_* : \mathcal{D}'' \to \mathcal{D}$ 为正合函子满足 (j^*, j_*) 为伴随对, j_* 为满嵌入. 若 $\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{D}$ 的 cluster-倾斜子范畴且 $j_*j^*(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$, 则

(1) $j^* : \mathcal{D} \to \mathcal{D}''$ 诱导 Abel 范畴间的加法函子 $\widetilde{j^*} : \mathcal{D}/\mathcal{T} \to \mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T})$;

(2) $j_* : \mathcal{D}'' \to \mathcal{D}$ 诱导 Abel 范畴间的加法函子 $\widetilde{j_*} : \mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T}) \to \mathcal{D}/\mathcal{T}$;

(3) $(\widetilde{j^*},\widetilde{j_*})$ 为伴随对.

证明 (1) 由引理 3.3 可知, $j^*(\mathcal{T})$ 为 $\mathcal{D}''$ 的 cluster-倾斜子范畴. 由定理 2.6 可知, $\mathcal{D}/\mathcal{T},\mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T})$ 为 Abel 范畴. 又对任意 $T\in\mathcal{T}$, 有 $Q_{\mathcal{D}''}j^*(T)=O$, 由定理 2.5 知, 存在唯一的加法函子 $\widetilde{j^*}:\mathcal{D}/\mathcal{T}\to\mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T})$ 使下图可交换:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "Q_{\mathcal{D}}"'] & \mathcal{D}'' \arrow[d, "Q_{\mathcal{D}''}"] \\
\mathcal{D}/\mathcal{T} \arrow[r, dotted, "\widetilde{j^*}"] & \mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T})
\end{tikzcd}$$

(2) 由 $j_*j^*(\mathcal{T})\subset\mathcal{T}$ 知, 对任意 $T\in\mathcal{T}$, $Q_{\mathcal{D}}j_*(j^*(T))=O$. 由定理 2.5, 存在唯一的加法函子 $\widetilde{j_*}:\mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T})\to\mathcal{D}/\mathcal{T}$ 使下图可交换:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}'' \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "Q_{\mathcal{D}''}"'] & \mathcal{D} \arrow[d, "Q_{\mathcal{D}}"] \\
\mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T}) \arrow[r, dotted, "\widetilde{j_*}"] & \mathcal{D}/\mathcal{T}
\end{tikzcd}$$

(3) 由 (j^*,j_*) 为伴随对, 则对任意 $A\in\mathcal{D},A'\in\mathcal{D}''$, 存在两个自然同构:

$$\eta_{A,A'}:\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}''}(j^*(A),A')\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A,j_*(A')),$$

$$\tau_{A,A'}:\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A,j_*(A'))\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}''}(j^*(A),A').$$

下证 $\eta_{A,A'}$ 可诱导自然同构

$$\widetilde{\eta}_{A,A'}:\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T})}(\widetilde{j^*}(A),A')\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{T}}(A,\widetilde{j_*}(A')).$$

首先, 定义映射 $\widetilde{\eta}_{A,A'}:\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T})}(\widetilde{j^*}(A),A')\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{T}}(A,\widetilde{j_*}(A'))$. 对任意 $\overline{f}\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T})}(\widetilde{j^*}(A),A')$, 定义 $\widetilde{\eta}_{A,A'}(\overline{f}):=\overline{\eta_{A,A'}(f)}$. 为证明定义的合理性, 只须证明 $\overline{\eta_{A,A'}(f)}$ 与代表元 f 的选取无关. 事实上, 设 $\overline{f_1}=\overline{f_2}\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T})}(\widetilde{j^*}(A),A')$, 即存在 s,t 使得下图可交换:

$$\begin{tikzcd}
j^*(A) \arrow[rr, "f_1-f_2"] \arrow[dr, "s"'] & & A' \\
& j^*(T) \arrow[ur, "t"'] &
\end{tikzcd}$$

其中 $T\in\mathcal{T}$.

从而 $\eta_{A,A'}(f_1)-\eta_{A,A'}(f_2)=\eta_{A,A'}(f_1-f_2)=j_*(f_1-f_2)\varepsilon_A=j_*(ts)\varepsilon_A=j_*(t)j_*(s)\varepsilon_A$, 因此有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\eta_{A,A'}(f_1)-\eta_{A,A'}(f_2)"] \arrow[dr, "j_*(s)\varepsilon_A"'] & & j_*(A') \\
& j_*j^*(T) \arrow[ur, "j_*(t)"'] &
\end{tikzcd}$$

又因为 $j_*j^*(\mathcal{T})\subset\mathcal{T}$, 所以我们有 $j_*j^*(T)\in\mathcal{T}$, 即 $\overline{\eta_{A,A'}(f_1)}=\overline{\eta_{A,A'}(f_2)}$. 因此, $\widetilde{\eta}_{A,A'}$ 为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T})}(\widetilde{j^*}(A),A')$ 到 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{T}}(A,\widetilde{j_*}(A'))$ 的态射. 同样地, 可以定义从 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{T}}(A,\widetilde{j_*}(A'))$ 到 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T})}(\widetilde{j^*}(A),A')$ 的映射 $\widetilde{\tau}_{A,A'}:\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{T}}(A,\widetilde{j_*}(A'))\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T})}$

$(\widetilde{j^*}(A), A')$. 对任意 $\overline{g} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{T}}(A, \widetilde{j_*}(A'))$, 定义 $\widetilde{\tau}_{A,A'}(\overline{g}) := \overline{\tau_{A,A'}(g)}$. 由于 $\eta\tau = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}, \tau\eta = \mathrm{id}_{\mathcal{D}''}$, 从而 $\tilde{\eta}\tilde{\tau} = \mathrm{id}_{\mathcal{D}/\mathcal{T}}, \tilde{\tau}\tilde{\eta} = \mathrm{id}_{\mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T})}$. 因此 $\tilde{\eta}_{A,A'}$ 为双射.

设 $A' \in \mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T}), \overline{h} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{T}}(B, A)$. 则有如下交换图:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T})}(\widetilde{j^*}(A), A') & \xrightarrow{\widetilde{\eta}_{A,A'}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{T}}(A, \widetilde{j_*}(A')) \\
{\scriptstyle (\widetilde{j^*}\bar{h})^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{h}^*} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T})}(\widetilde{j^*}(B), A') & \xrightarrow{\widetilde{\eta}_{B,A'}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{T}}(B, \widetilde{j_*}(A'))
\end{array}$$

事实上, 任意 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}''}(j^*(A), A')$, 由 η 为自然变换, 可得 $\eta(f) \cdot h = \eta(f \cdot j^*h)$. 因此, 对任意 $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T})}(\widetilde{j^*}(A), A')$,

$$\tilde{\eta}(\bar{f}) \cdot \overline{h} = \overline{\eta(f)} \cdot \overline{h} = \overline{\eta(f) \cdot h} = \overline{\eta(f \cdot j^*(h))} = \tilde{\eta}(\overline{f \cdot j^*(h)}) = \tilde{\eta}(\bar{f} \cdot \overline{j^*(h)}) = \tilde{\eta}(\bar{f} \cdot \widetilde{j^*}(\overline{h})),$$

即 $\widetilde{\eta} \cdot (\widetilde{j^*}\overline{h})^* = \overline{h}^* \cdot \widetilde{\eta}$. 从而 $\widetilde{\eta}$ 在第 1 变元是自然的.

类似地可证明 $\widetilde{\eta}$ 在第 2 变元也是自然的.

所以 $\widetilde{\eta}$ 为自然变换, 从而 $(\widetilde{j^*}, \widetilde{j_*})$ 为伴随对.

定理 1.1 的证明 由引理 3.3 知, $i^*(\mathcal{T})$ 和 $j^*(\mathcal{T})$ 分别为 $\mathcal{D}'$ 和 $\mathcal{D}''$ 的 cluster-倾斜子范畴. 由定理 2.6 可得, $\mathcal{D}'/i^*(\mathcal{T}), \mathcal{D}/\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T})$ 为 Abel 范畴. 再由引理 3.4, i^*, i_*, j^*, j_* 可分别诱导 Abel 范畴的加法函子 $\tilde{i^*}, \tilde{i_*}, \tilde{j^*}, \tilde{j_*}$, 且 $(\tilde{i^*}, \tilde{i_*}), (\tilde{j^*}, \tilde{j_*})$ 为伴随对.

下证 $i^!, j_!$ 分别诱导加法函子 $\tilde{i^!}, \tilde{j_!}$. 设 $T \in \mathcal{T}$. 则对任意 $T' \in \mathcal{T}$, 由 $i_*i^*(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{D}$ 的 cluster-倾斜子范畴知,

$$\mathrm{Ext}^1(T', i_*i^!(T)) \cong \mathrm{Ext}^1(i^*(T'), i^!(T)) \cong \mathrm{Ext}^1(i_*i^*(T'), T) = 0.$$

因此, $i_*i^!(T) \in \mathcal{T}$. 从而 $i^!(T) \cong i^*i_*i^!(T) \in i^*(\mathcal{T})$. 由定理 2.5, $i^!$ 可诱导加法函子 $\tilde{i^!}$. 设 $T \in \mathcal{T}$. 则对任意 $T' \in \mathcal{T}$,

$$\mathrm{Ext}^1(j_!j^*(T), T') \cong \mathrm{Hom}(j_!j^*(T), T'[1]) \cong \mathrm{Hom}(j^*(T), j^*(T'[1])) \cong \mathrm{Ext}^1(j^*(T), j^*(T')) = 0,$$

因此, $j_!j^*(T) \in \mathcal{T}$. 即 $j_!j^*(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$. 由定理 2.5, $j_!$ 诱导加法函子 $\tilde{j_!}$. 类似引理 3.4(3) 的证明, $(\tilde{i_*}, \tilde{i^!}), (\tilde{j_!}, \tilde{j^*})$ 为伴随对.

由 i_* 为满嵌入, $i^!i_* \cong \mathrm{id}_{\mathcal{D}'}$. 可知 $\tilde{i^!}\tilde{i_*} \cong \mathrm{id}_{\mathcal{D}'/i^*(\mathcal{T})}$. 从而 $\tilde{i_*}$ 为满嵌入. 同样地, $\tilde{j_!}, \tilde{j_*}$ 为满嵌入.

又 $\tilde{j^*}\tilde{i_*} = 0$ 显然成立.

这样由 Abel 范畴的 recollement 的定义可知, $\mathcal{D}/\mathcal{T}$ 允许有关于 $\mathcal{D}'/i^*(\mathcal{T})$ 和 $\mathcal{D}''/j^*(\mathcal{T})$ 的 recollement.

致谢 作者感谢朱彬教授及审稿人的有益建议.

参考文献

1 Beilinson A, Bernstein J, Deligne P. Faisceaux pervers. In: Analyse et topologie sur les espaces singuliers. Asterisque, 100. Paris: Soc Math France, 1982, 5–17

2 Cline E, Parshall B, Scott L. Algebraic stratification in representation in representation categories. *J Algebra*, **117**: 504–521 (1988)

3 Cline E, Parshall B, Scott L. Finite dimensional algebras and highest weight categories. *J Reine Angew Math*, **391**: 85–99 (1988)

4 MacPherson R, Vilonen K. Elementary construction of perverse sheaves. *Invent Math*, **84**: 403–436 (1986)

5 Happel D. Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras. In: London Math Soc Lecture Notes Ser. 119. Cambridge: Cambridge University Press, 1988

6 Koenig S, Zhu B. From triangulated categories to abelian categories: cluster tilting in a general framework. *Math Z*, **258**(1): 143–160 (2008)

7 Chen Q, Tang L. Recollements, idempotent completions and t-structures of triangulated categories. *J Algebra,* **319**: 3053–3061 (2008)

8 陈清华, 林亚南. 扩张代数的 recollement. 中国科学 A, **33**(4): 354–360 (2003)

9 林增强, 林亚南. 单点扩张代数与 recollement. 中国科学 A, **38**(3): 241–248 (2008)

10 Franjou V, Pirashvili T. Comparison of abelian categories recollement. *Doc Math*, **9**: 41–56 (2004)

11 Iyama O. Higher dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories. *Adv Math*, **210**(1): 22–50 (2007)

12 Hilton P J, Stammbach U. A Course in Homological Algebra. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2003

13 Weibel C A. An Introduction to Homological Algebra. Cambridge: Cambridge University Press, 1994