

倾斜模唯一性的有效判定*

彭联刚 林亚南

(北京师范大学数学系, 北京 100875)

关键词 倾斜模、顶、底座、代数的通常箭图

本文总假设 k 为代数闭域, A 为 k 上基的 (basic) 连通的 (connect) 有限维代数 (结合的, 带单位元)。代数 A 上的模总指有限生成左 A -模。在同构的意义下, 记 $\{P_A(a) | a \in I\}$ 表示所有不可分解投射模的集合, $\{E_A(a) | a \in I\}$ 表示所有不可分解入射模的集合, $\{S_A(a) | a \in I\}$ 表示所有单模的集合, 这里 I 是固定的有限集合, $P(a)/\text{rad } P(a) = S(a) = \text{soc } E(a)$ 。在不引起混淆的情况下, 我们可以省略下标 A 。另外, 对于 $J \subseteq I$, 我们记

$$P(J) = \bigoplus_{b \in J} P(b).$$

在本文中, 态射的合成总是从左到右。

一个 A -模 T 称为倾斜模, 如果下面条件被满足:

- (1) $\text{proj. dim}_A T \leq 1$;
- (2) $\text{Ext}_A^1(T, T) = 0$;
- (3) 存在正合序列 $0 \rightarrow A \rightarrow T' \rightarrow T'' \rightarrow 0$, 其中 T', T'' 是 T 的直和项的直和。

我们知道, A 本身是倾斜模。什么时候仅存在这样唯一的倾斜模呢? 一个自入射代数显然仅有唯一倾斜模。Assem 给出一个非自入射代数但具有唯一倾斜模的例子 (见文献 [1], III. 2.14)。Happel 给出了代数仅有唯一倾斜模的充要条件 (见文献 [1], III. 2.14)。现在, 对这个问题, 我们得到一个有效判定。

定理 设 A 是一个代数, 则下面条件等价:

- (1) A 仅有唯一的倾斜模;
- (2) 对任意非投射 A -模 M , 有 $\text{proj. dim}_A M = \infty$;
- (3) 每个单模 $S(a)$ 都是某个不可分解入射模 $E(b)$ 的直和项。

证 (1) \Leftrightarrow (2) 见文献 [1], III. 2.14。

(2) \Rightarrow (3): 否则, 假设对任意入射模 $E(b)$, 单模 $S(a)$ 不是 $\text{top } E(b)$ 的直和项, 那么对任意 $b \in I$, $\text{Hom}_A(E(b), S(a)) = 0$ 。由文献 [2] 引理 2.2 知 $\text{proj. dim}_A \tau^{-1} S(a) \leq 1$ 。 $\tau^{-1} S(a)$ 显然不是投射模。矛盾。

(3) \Rightarrow (1): 否则, 假设存在一个倾斜模 T , 含非投射不可分解直和项 T_1 , 则 $\text{proj. dim}_A T_1 \leq 1$ 。由文献 [2] 引理 2.2, 我们得到对任意 $b \in I$, $\text{Hom}_A(E(b), \tau T_1) = 0$ 。因为

本文 1990 年 12 月 4 日收到, 1991 年 6 月 19 日收到修改稿。

* 国家自然科学基金和国家青年自然科学基金资助项目。

$\tau T_1 \cong 0$, 我们可以设 $S(a)$ 是 $\text{soc } \tau T_1$ 的一个直和项, 即 $S(a)$ 是 τT_1 的一个单子模. 根据题设, 存在某个不可分解入射模 $E(c)$ 使得 $S(a)$ 是 $\text{top } E(c)$ 的直和项, 即 $\text{Hom}_A(E(c), S(a)) \cong 0$, 从而 $\text{Hom}_A(E(c), \tau T_1) \cong 0$, 矛盾. 证毕.

因为局部代数只有一个单模, 我们显然有下面的

推论 1 局部代数仅有唯一倾斜模.

推论 2 设 A 是自入射代数, 则

(1) $B = A/\text{soc } P(I')$ 上的倾斜模只可能为 $(\sum_{b \in I'} \oplus P_A(b)) \oplus (\sum_{b \in I'} \oplus \tau_B^- S_A(b))$, 这里 $I' \subseteq I, I'' = I \setminus I', I''' \subseteq J \subseteq I$;

(2) 在 A 的通常箭图顶点 a 处有圈 (loop) 当且仅当 $B = A/\text{soc } P(a)$ 只有唯一倾斜模.

证 容易看到 $\text{soc } P(I')$ 是 A 的理想, 且 A -模 $(\sum_{b \in I'} \oplus P_A(b)) \oplus (\sum_{b \in I'} \oplus \tau_B^- S_A(b))$ 是 B -模. 如果 $b \notin I', P_A(b)$ 是投射入射 B -模; 如果 $b \in I', E_B(b) = \text{rad } P_A(b)$.

(1) 由文献 [2] 推论 2.1, $\bigoplus_{b \in I'} P(b)$ 必是倾斜 B -模的直和项. 我们只要证明: 若 M 是倾斜 B -模的非投射的不可分解直和项, 则存在 $c \in I'$, 使得 $M = \tau_B^- S_A(c)$. 设 M 是某个倾斜 B -模的直和项, 那么 $\text{proj. dim}_B M \leq 1$. 所以对于任意 $b \in I, \text{Hom}_B(E_B(b), \tau_B M) = 0$. 当 $b \notin I'$ 时, $E_B(b) = P_B(b)$, 所以 $\tau_B M$ 的支撑只能是 $\{P_B(b)\}_{b \in I'}$ 的子集, 因而存在 B -模满同态

$$\sum_{b \in I'} \oplus P_B^{m_b}(b) \rightarrow \tau_B M,$$

这里 m_b 是非负整数, 它导出 A -模满同态 $\sum_{b \in I'} \oplus P_A^{m_b}(b) \rightarrow \tau_B M$.

另一方面, 当 $b \in I'$ 时, $E_B(b) = \text{rad } P_A(b)$, 即对于任意 $b \in I', \text{Hom}_A(\text{rad } P_A(b), \tau_B M) = 0$, 所以有满同态 $\sum_{b \in I'} \oplus (P_A^{m_b}(b)/\text{rad } P_A^{m_b}(b)) \rightarrow \tau_B M$,

因为 $\tau_B M$ 不可分解, 所以存在 $a \in I'$, 使得 $\tau_B M = S_A(a)$, 即 $M = \tau_B^- S_A(a)$.

(2) 设在 A 的通常箭图的某顶点 a 处存在圈, 我们将证明 B 仅有唯一倾斜模. 由 (1), 我们只要证明如果 $\tau_B^- S(a) \cong 0$, 则 $\text{proj. dim}_B \tau_B^- S(a) > 1$. 根据代数的通常箭图的构造, 我们知道存在 $0 \cong f \in \text{Hom}_A(P_A(a), P_A(a))$, 满足 (a) f 既不可裂满也不可裂单; (b) 如果 f 可经过投射分解 $f = gh$, 这里 P 是投射模, $g \in \text{Hom}_A(P(a), P), h \in \text{Hom}_A(P, P(a))$, 则或 g 可裂单或 h 可裂满. 显然 $\text{Im } f \subseteq \text{rad } P(a)$. 设 $j: P \rightarrow \text{rad } P_A(a)$ 是 $\text{rad } P_A(a)$ 的投射盖, 那么存在 $l \in \text{Hom}_A(P(a), P)$, 使得 $f = lj$. 我们断言 j 非可裂满. 否则 $\text{rad } P(a)$ 为投射模, 从下面交换图

$$\begin{array}{ccc} P_A(a) & \xrightarrow{f} & P_A(a) \\ & \searrow j & \swarrow i \\ & \text{rad } P_A(a) & \end{array}$$

这里 i 为标准嵌入, 从条件 (a), (b) 知 $P_A(a) = \text{rad } P_A(a)$, 矛盾. 所以 j 为可裂单, 即 $P(a)$ 为 P 的直和项. 由于 $\text{rad } P(a)$ 与 $\text{top}(\text{rad } P(a))$ 的投射盖相同, 从而 $S(a)$ 是 $\text{top}(\text{rad } P(a))$ 的直和项, 故 $\text{Hom}_A(\text{rad } P(a), S(a)) \cong 0$, 即 $\text{Hom}_B(E_B(a), S(a)) \cong 0$. 由文献 [2] 引理 2.2, 我们有 $\text{proj. dim}_B \tau_B^- S(a) > 1$.

反过来, 假设 B 只有唯一倾斜模. 如果 $\tau_B^- S(a) \cong 0$, 由 (1) 知 $\text{proj. dim}_B \tau_B^- S(a) > 1$.

从而存在某个 $b \in I$, 使得 $\text{Hom}_B(E_B(b), S(a)) \cong 0$. 当 $b \notin I'$ 时, $P_B(b) = E_B(b) = P_A(b)$, 所以只可能是 $\text{Hom}_B(E_B(a), S(a)) \cong 0$, 即 $\text{Hom}_A(\text{rad}P_A(a), S(a)) \cong 0$. 设 $0 \neq f \in \text{Hom}_A(\text{rad}P_A(a), S(a))$, 则 f 必满射. 设 $j: P(a) \rightarrow S(a)$ 是投射盖, 那么存在 $g \in \text{Hom}_A(P(a), \text{rad}P(a))$ 使得 $j = gf$. 设 i 是标准嵌入 $i: \text{rad}P(a) \rightarrow P(a)$, 显然 gi 既非可裂单也非可裂满. 如果 gi 可通过投射模分解 $gi = st$, 这里 P 为投射模, $s \in \text{Hom}_A(P(a), P)$, $t \in \text{Hom}_A(P, P(a))$. 假设 t 非可裂满, 我们断言 s 必可裂单. 事实上, 因 t 非可裂满, 我们有 $\text{Im}t \subseteq \text{rad}P(a)$, 所以 t 诱导 $t' \in \text{Hom}_A(P, \text{rad}P(a))$ 使得 $t'i = t$, $g = st'$. 这样, 从 $j = st'f$ 可知 $t'f \cong 0$. 我们可以提升 $t'f$ 到 $h \in \text{Hom}_A(P, P_A(a))$, 使得 $hj = t'f$, 故 $j = st'f = shj$. 如果 sh 非满同态, 那么 $\text{Im}sh \subseteq \text{rad}P(a)$, 这意味着 $(P_A(a))shj = 0$, 故 $j = shj = 0$, 矛盾. 所以 sh 为满射, 因而是同构. 这样 s 可裂单. 我们已经证明了 gi 是相对不可约映射, 即 A 的通常箭图在顶点 a 处存在圈. 证毕.

我们知道, 当 A 的通常箭图存在 sink 时, A 的倾斜模不唯一. 这种情况至少有 A 与一个 APR-倾斜模. 一般的, 此结论的逆命题不成立. 例如, 我们取 $A = k\bar{Q}/I$, 其中

$$\bar{Q}: 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\gamma} \\ \xleftarrow{\delta} \end{array} 3, \quad I = \langle \gamma\beta, \alpha\delta \rangle,$$

易见 $S(2)$ 不是任意入射模的 top 的直和项. 从我们的定理知, A 的倾斜模不唯一.

但是我们有

推论 3 设 A 为根方为零的代数, 则 A 仅有唯一倾斜模当且仅当 A 的通常箭图不存在 sink .

证 假设在 A 的通常箭图中不存在 sink . 那么, 对于任意单模 $S(a)$, 存在箭向 $a \rightarrow b$, 因为 $\text{rad}^2 A = 0$, 容易看到 $S(a)$ 是 $\text{top} E(b)$ 的直和项. 所以定理保证 A 仅有唯一倾斜模. 另一方面是显然的. 证毕.

注 1 I. Assem 给出的非自入射但仅有唯一倾斜模的代数(见文献 [1], III. 2.14) 如下: $A = k\bar{Q}/I$, 这里



I 为所有长度为 2 的路生成的理想. 由推论 3 知 A 只有唯一倾斜模.

注 2 对偶于倾斜模, 有余倾斜模的概念(见文献 [3], 4.1). 在本文的定理与推论中, 把投射与入射, 顶与底座, sink 与 source 的概念互换, 容易得到相应的余倾斜模唯一性的有效判定和相应的推论. 另由推论 3 知, A 仅有唯一倾斜模并不等价于 A 仅有唯一余倾斜模.

致谢: 作者感谢导师刘绍学教授的指导, 感谢肖杰博士的有益建议.

参 考 文 献

- [1] Happel, D., Triangulated categories in representation theory of finite dimensional algebras, *London Math. Soc., LNS*, 119(1988), 1—206.
- [2] Bongartz, K., Tilted algebras, *Springer LNM*, 903(1988), 26—38.
- [3] Ringel, C. M., Tame algebras and integral quadratic forms, *Springer LNM*, 1088(1984), 1—376.