

三向四次箱样条曲面的差分界

杨联强^{1,2)} 曾晓明¹⁾¹⁾ (厦门大学数学科学学院 厦门 361005)²⁾ (安徽大学数学科学学院 合肥 230039)

(ylqylq@yahoo.cn)

摘要 研究了三向四次箱样条曲面与控制网格中心三角平面片间的距离和该距离的界. 借助三向四次箱样条曲面的分片表示, 应用该曲面片控制顶点的一阶和二阶方向差分, 给出了该曲面片与控制网格中心三角平面片之间的逐点距离. 通过该距离的分片表达式, 给出了该距离的界.

关键词 箱样条; 界; 参数曲面; 基函数

中图法分类号 TP391.7

Difference Bounds of 3-Direction Quartic Box Spline Surfaces

Yang Lianqiang^{1,2)} Zeng Xiaoming¹⁾¹⁾ (Department of Mathematics, Xiamen University, Xiamen 361005)²⁾ (School of Mathematics, Anhui University, Hefei 230039)

Abstract The distance from 3-direction quartic box spline surface to the central triangular planar patch of its control net is investigated as well as its bound. Using piecewise expression of 3-direction quartic box spline surface, and the first and second directional differences of the control points, the point wise distance from the surface patch to the central triangular planar patch of its control net is obtained. The bound of the distance is also determined.

Key words box spline; bound; parametric surfaces; basis functions

箱样条(box spline)理论和应用首先由 de Boor 和 DeVore 开创,并于 20 世纪 80 年代得到了众多学者的研究,关于一般的箱样条理论,可参见文献 [1-3]. 三向四次箱样条正是由于其次数和连续阶之间良好的均衡(四次, C^2 连续),得到了人们广泛的重视和应用,著名的 Loop 细分曲面就是将三向四次箱样条曲面从正规三角控制网格推广到自由三角控制网格得到的.

一般的箱样条 $M: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ 可由如下递推关系定义

$$(n-s)M(x) = (tM_{\setminus j}(x) +$$

$$(1-t)M_{\setminus j}(x-t)),$$

其中 $x = t$ 是将 x 表示成方向集 $\{t_j\}$ 的列向量的线性组合, $\mathbb{R}^{s \times n}$, $n \geq s$. 递推的初始情形为:方向集矩阵 M 为方阵,

$$M(x) = \frac{1}{\det M},$$

表示定义在 n 次半开单位立方体的投影上的特征函数.

对三向四次箱样条,方向集 $\{t_j\} = [t_1, t_2, t_3]$,

$$\text{其中 } t_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, t_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

收稿日期:2008-07-04. 基金项目:国家自然科学基金(10571145). 杨联强,男,1975年生,博士研究生,讲师,主要研究方向为 CAD. 曾晓明,男,1955年生,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为逼近论、CAD.

由于样条曲线曲面的界在 CAD 和计算机图形学中有着多方面的应用,如图形的绘制、设计、求交等,从而引起了计算机图形学界的浓厚兴趣.开始时,样条曲线曲面的界是由其凸包性来确定的,即样条曲线和曲面总是位于其控制顶点集生成的凸包内.凸包提供了样条曲线曲面的一个非常大的界,是非常不精确的. Narin 等^[4] 开创性地给出了 Bézier 曲线的基于控制顶点的差分界. Reif^[5] 给出了 Bézier 和 B-样条曲线、张量积样条曲面,以及三角 Bézier 曲面的最佳界. Wu 等^[6] 研究了有理 Bézier 曲线和曲面的差分界. Huang 等^[7] 给出了有理 Bézier 曲线导数的界. Zhang 等^[8] 给出了 Bézier 曲线的基于“拟控制顶点”的更精确的差分界. 特别地, Huang 等^[9-10] 研究了三向四次箱样条曲面(即正规情况下的 Loop 细分曲面)与其极限控制网格和起始控制网格的距离,该距离使用了起始控制点的 15 个混合二阶差分. 本文通过三向四次箱样条曲面的分片表示,给出了一种不同的三向四次箱样条曲面与起始控制网格的中心三角平面片的逐点距离,该距离只使用了起始控制点的 9 个二阶方向差分;另外,还给出了该距离的一阶方向差分表示.

1 三向四次箱样条曲面与其控制顶点的逐点距离

研究样条曲面要经常用到其分片表示形式,如图 1,2 所示,一片三向四次箱样条曲面可以表示为

$$S(u, v) = \sum_{(i,j)} P_{ij} B_{ij}(u, v), \quad (1)$$

其中, $(u, v) \in D, D = \{(u, v) | 0 \leq u, v \leq 1, 0 \leq u+v \leq 1\}, (i, j) = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (2, 3), (3, 3)\}; P_{ij}$ 是该片曲面片的控制顶点; B_{ij} 是基函数,其表达式^[11]如下:

$$B_{00}(u, v) = \frac{1}{12}(2v^3w + v^4),$$

$$B_{10}(u, v) = \frac{1}{12}(2uw^3 + w^4 + 6uvw^2 + 6vw^3 + 6uv^2w + 12v^2w^2 + 2uv^3 + 6v^3w + v^4),$$

$$B_{20}(u, v) = \frac{1}{12}(w^4 + 2vw^3),$$

$$B_{01}(u, v) = \frac{1}{12}(2uv^3 + v^4),$$

$$B_{11}(u, v) = \frac{1}{12}(u^4 + 6u^3w + 12u^2w^2 + 6uw^3 + w^4 + 8u^3v + 36u^2vw + 36uvw^2 + 8vw^3 + 24u^2v^2 +$$

$$60uv^2w + 24v^2w^2 + 24uv^3 + 24v^3w + 6v^4),$$

$$B_{21}(u, v) = \frac{1}{12}(u^4 + 8u^3w + 24u^2w^2 + 24uw^3 + 6w^4 + 6u^3v + 36u^2vw + 60uvw^2 + 24vw^3 + 12u^2v^2 + 36uv^2w + 24v^2w^2 + 6uv^3 + 8v^3w + v^4),$$

$$B_{31}(u, v) = \frac{1}{12}(2uw^3 + w^4),$$

$$B_{12}(u, v) = \frac{1}{12}(u^4 + 2u^3w + 6u^3v + 6u^2vw + 12u^2v^2 + 6uv^2w + 6uv^3 + 2v^3w + v^4),$$

$$B_{22}(u, v) = \frac{1}{12}(6u^4 + 24u^3w + 24u^2w^2 + 8uw^3 + w^4 + 24u^3v + 60u^2vw + 36uvw^2 + 6vw^3 + 24u^2v^2 + 36uv^2w + 12v^2w^2 + 8uv^3 + 6v^3w + v^4),$$

$$B_{32}(u, v) = \frac{1}{12}(u^4 + 6u^3w + 12u^2w^2 + 6uw^3 + w^4 + 2u^3v + 6u^2vw + 6uvw^2 + 2vw^3),$$

$$B_{23}(u, v) = \frac{1}{12}(u^4 + 2u^3v),$$

$$B_{33}(u, v) = \frac{1}{12}(u^4 + 2u^3w),$$

其中 $w = 1 - u - v$.

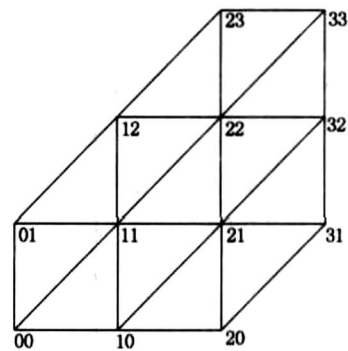


图 1 基函数及控制顶点的位置

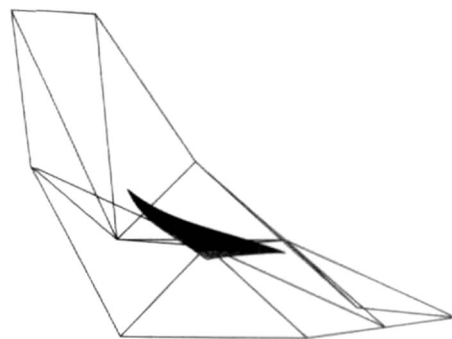


图 2 三向四次箱样条曲面片及其控制网

为了得到三向四次箱样条曲面的界,本文首先研究曲面片 $S(u, v)$ 与三角平面片 $P_{11} P_{22} P_{21}$ 之间

的逐点距离,将该三角平面片参数化为

$$T(u, v) = vP_{11} + uP_{22} + wP_{21}.$$

定理 1. 三向四次箱样条曲面 $S(u, v)$ 与三角平面片 $T(u, v)$ 之间的逐点距离为

$$S(u, v) - T(u, v) = (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)P_{11} + (f_4^2 + f_5^2 + f_6^2)P_{22} + (f_7^2 + f_8^2 + f_9^2)P_{21} \quad (2)$$

其中, $f_1 = B_{01}, f_2 = \frac{1}{2}(B_{12} + B_{10} - B_{32}), f_3 = B_{00}, f_4 = \frac{1}{2}(B_{12} + B_{32} - B_{10}), f_5 = B_{23}, f_6 = B_{33}, f_7 = B_{31}, f_8 = B_{20}, f_9 = \frac{1}{2}(B_{32} + B_{10} - B_{12})$; Δ^2 表示二阶中心方向差分算子, 即 $\Delta^2(\cdot) = (\Delta(\cdot + \cdot) - \Delta(\cdot)) - (\Delta(\cdot) - \Delta(\cdot - \cdot)) = (\Delta(\cdot + \cdot) - 2\Delta(\cdot) + \Delta(\cdot - \cdot))$.

证明. 只需比较式 (2) 等号两边每个控制顶点的系数即可. 左边, P_{11}, P_{22} 和 P_{21} 的系数是 $B_{11} - v, B_{22} - u$ 和 $B_{21} - w$, 其他控制顶点 P_{ij} 的系数就是 B_{ij} . 将右边的差分展开, 变为

$$f_3 P_{00} + (f_2 + f_9) P_{10} + f_8 P_{20} + f_1 P_{01} + f_7 P_{31} + (f_2 + f_4) P_{12} + (f_9 + f_4) P_{32} + f_5 P_{23} + f_6 P_{33} + (f_6 + f_7 - 2f_1 - 2f_2 - 2f_3) P_{11} + (f_3 + f_8 - 2f_4 - 2f_5 - 2f_6) P_{22} + (f_1 + f_5 - 2f_7 - 2f_8 - 2f_9) P_{21}.$$

显然, 除了 P_{11}, P_{22} 和 P_{21} 这 3 个控制顶点外, 其他控制顶点的系数和左边都是相等的. 对这 3 个控制顶点的系数, 我们直接计算并化简得

$$f_6 + f_7 - 2f_1 - 2f_2 - 2f_3 = B_{33} + B_{31} + B_{32} - B_{12} - B_{10} - 2B_{01} - 2B_{00} = \frac{1}{12}(1 + 2u - 4u^3 + 2u^4 - 8v + 6uv - 12u^2v + 4u^3v + 6v^2 - 6uv^2 - 4v^3 - 2uv^3 - v^4);$$

$$f_3 + f_8 - 2f_4 - 2f_5 - 2f_6 = B_{00} + B_{20} + B_{10} - B_{12} - B_{32} - 2B_{23} - 2B_{33} = \frac{1}{12}(1 - 8u + 6u^2 - 4u^3 - u^4 + 2v + 6uv - 6u^2v - 2u^3v - 12uv^2 - 4v^3 + 4uv^3 + 2v^4);$$

$$f_1 + f_5 - 2f_7 - 2f_8 - 2f_9 = B_{01} + B_{23} + B_{12} - B_{32} - B_{10} - 2B_{31} - 2B_{20} = \frac{1}{12}(-6 + 12u - 12u^2 + 8u^3 - u^4 + 12v - 12uv + 12u^2v - 2u^3v - 12v^2 + 12uv^2 + 8v^3 - 2uv^3 - v^4).$$

容易验证, 它们正好分别等于 $B_{11} - v, B_{22} - u$ 和 $B_{21} - w$. 证毕.

2 三向四次箱样条曲面的界

令

$$P = \max_{(i,j) \in \{(1,1), (2,2), (2,1)\}} \{ |f_i^2 P_{ij}|, |f_j^2 P_{ij}| \}, \quad (3)$$

即 3 个中心控制顶点的 9 个二阶中心方向差分的最大模. 由三向四次箱样条基函数的非负性知 $f_1, f_3, f_5, f_6, f_7, f_8 \geq 0$, 因此从式 (2) 可得

$$S(u, v) - T(u, v) = (f_1 + f_3 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 + |f_2| + |f_4| + |f_9|) P \quad (4)$$

又因为

$$f_2 + f_4 = B_{12} - 0, f_4 + f_9 = B_{32} - 0, f_9 + f_2 = B_{10} - 0,$$

所以对任意一固定点 (u, v) , 在 f_2, f_4 和 f_9 中最多只有一个小于 0, 或都为正. 因此, 参数域 D 被 3 条隐式曲线 $f_2 = 0, f_4 = 0$ 和 $f_9 = 0$ 分成如图 3 所示的 4 个部分.

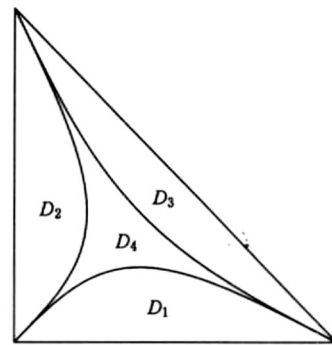


图 3 参数域 D 的划分

记 $D_1 = \{(u, v) | f_2 = 0\}, D_2 = \{(u, v) | f_4 = 0\}, D_3 = \{(u, v) | f_9 = 0\}, D_4 = \{(u, v) | f_2, f_4, f_9 > 0\}$, 并令

$$F(u, v) = f_1 + f_3 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 + |f_2| + |f_4| + |f_9|.$$

通过计算二元函数在有界闭区域上的最值, 可得到:

$$\text{当 } (u, v) \in D_1 \text{ 时, } F(u, v) = f_1 + f_3 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 - f_2 + f_4 + f_9 = \frac{1}{12}(3 - 2u + 6u^2 - 8u^3 + 4u^4 - 10v + 6uv - 12u^2v + 8u^3v + 6v^2 + 4v^3 - 4uv^3 - 2v^4);$$

此时 $\max_{(u,v) \in D_1} F(u, v) = F(0, 0) = F(1, 0) = \frac{1}{4}$.

当 $(u, v) \in D_2$ 时,

$$\begin{aligned} F(u, v) &= f_1 + f_3 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 + f_2 - f_4 + f_9 \\ &= \frac{1}{12}(3 - 10u + 6u^2 + 4u^3 - 2u^4 - 2v + 6uv - 4u^3v + \\ &6v^2 - 12uv^2 - 8v^3 + 8uv^3 + 4v^4); \end{aligned}$$

$$\text{此时 } \max_{(u,v) \in D_2} F(u, v) = F(0, 0) = F(0, 1) = \frac{1}{4}.$$

当 $(u, v) \in D_3$ 时,

$$\begin{aligned} F(u, v) &= f_1 + f_3 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 + f_2 + f_4 - f_9 \\ &= \frac{1}{12}(1 - 6u + 6u^2 + 4u^3 - 2u^4 - 6v + 18uv - 4u^3v + \\ &6v^2 + 4v^3 - 4uv^3 - 2v^4); \end{aligned}$$

$$\text{此时 } \max_{(u,v) \in D_3} F(u, v) = F(0, 1) = F(1, 0) = \frac{1}{4}.$$

当 $(u, v) \in D_4$ 时,

$$\begin{aligned} F(u, v) &= f_1 + f_3 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 + f_2 + f_4 + f_9 \\ &= \frac{1}{12}(3 - 6u + 6u^2 - 6v + 6uv + 6v^2); \end{aligned}$$

$$\text{此时 } \max_{(u,v) \in D_4} F(u, v) = F(0, 0) = F(0, 1) = F(1, 0) = \frac{1}{4}.$$

综合以上 4 种情况以及式(4), 可得到定理 2.

定理 2. 对三向四次箱样条曲面 $S(u, v)$ 和三角平面片 $T(u, v)$,

$$|S(u, v) - T(u, v)| \leq \frac{1}{4} \max_{(i,j)} |P_{ij}| \quad (5)$$

另一方面, 由于

$$\begin{aligned} |P_{ij}| &= |P_{(i,j)^+} - P_{(i,j)} - (P_{(i,j)} - \\ &P_{(i,j)^-})| = |P_{(i,j)^+} - P_{(i,j)} + \\ &P_{(i,j)} - P_{(i,j)^-}| \quad (6) \end{aligned}$$

令

$$P = \max_{(i,j) \in \{(1,1), (2,2), (2,1)\}} \{ |P_{(i,j)^+} - P_{(i,j)}|, |P_{(i,j)} - P_{(i,j)^-}| \},$$

即 3 个中心控制顶点的一阶方向差分最大模.

综合式(5), (6) 即得推论 1.

推论 1. 对三向四次箱样条曲面 $S(u, v)$ 和三角平面片 $T(u, v)$,

$$|S(u, v) - T(u, v)| \leq \frac{1}{2} P \quad (7)$$

3 结论与展望

根据三向四次箱样条曲面的分片表示, 本文首

先给出了曲面片到由中心 3 个控制顶点构成的三角平面片的逐点距离; 然后运用这 3 个中心控制顶点的一阶和二阶方向差分最大模, 进一步给出了该距离的界. 该数值界对三向四次箱样条曲面的应用具有实际意义, 如曲面绘制、求交测试、预先估计网格细分次数等.

然而, 本文仅仅给出了应用最广泛的三向四次箱样条曲面的界, 由于一般箱样条的复杂性, 其他箱样条的界还是个非常具有挑战性的工作. 另外, 著名的 Loop 细分曲面是基于自由三角网格的, 而不是正规三角网格, 该曲面更精确的界也是非常有意义的工作.

参 考 文 献

- [1] de Boor C, Hollig K, Rienschneider S. Box spline [M]. Heidelberg: Springer, 1993
- [2] Chui C K. Multivariate splines [M]. Philadelphia: SIAM, 1988
- [3] Lai M J, Schumaker L L. Spline functions on triangulations [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2007
- [4] Nairn D, Peters J, Lutterkort D. Sharp, quantitative bounds on the distance between a polynomial piece and its Bézier control polygon [J]. Computer Aided Geometric Design, 1999, 16(7): 613 - 631
- [5] Reif U. Best bounds on the approximation of polynomials and splines by their control structure [J]. Computer Aided Geometric Design, 2000, 17(6): 579 - 589
- [6] Wu Z, Lin F, Soon S H, et al. Evaluation of difference bounds for computing rational Bézier curves and surfaces [J]. Computers & Graphics, 2004, 28(4): 551 - 558
- [7] Huang Y D, Su H M. The bound on derivatives of rational Bézier curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 2006, 23(9): 698 - 702
- [8] Zhang R J, Wang G J. Sharp bounds on the approximation of a Bézier polynomial by its quasi-control polygon [J]. Computer Aided Geometric Design, 2006, 23(1): 1 - 16
- [9] Huang Z J, Wang G P. Bounding the distance between a Loop subdivision surface and its limit mesh [M]. Lecture Notes in Computer Science. Heidelberg: Springer, 2008, 4975: 47 - 61
- [10] Huang Z J. Estimating error bounds and subdivision depths for Loop subdivision surfaces [R]. Beijing: Peking University, 2007
- [11] Stam J. Evaluation of Loop subdivision surfaces [C] // Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Orlando, 1998: 395 - 404