第 47 卷　第 1 期　　厦门大学学报(自然科学版)　　Vol. 47　No. 1
2008 年 1 月　　Journal of Xiamen University (Natural Science)　　Jan. 2008

Riesz 空间分数阶对流扩散方程的一种计算有效求解方法

沈淑君[1] ,刘发旺[2 *]

(1. 厦门大学数学科学学院,福建 厦门 361005 ;
2. 昆士兰理工大学数学科学学院,布里斯本,昆士兰 4001 ,澳大利亚)

摘要: Riesz 空间分数阶对流扩散方程是从混沌动力系统导出的. 继续 Ilic ,Liu 等的工作,我们提出在有界区域内求解 Riesz 空间分数阶对流-扩散方程的一种新的计算有效方法. 即基于这两个 Riesz 空间分数阶导数的矩阵表示. 这个方法的创新在于这个算子的标准离散得到包含具有相同分数次幂的矩阵的一个常微分方程组,并利用计算有效的分数阶行方法求解. 同时借助于分数阶导数的谱表示和拉普拉斯变换,导出这个 Riesz 空间分数阶对流扩散方程的解析解. 最后给出了数值例子来证实数值方法的有效性.

关键词: Riesz 空间分数阶导数;矩阵转换技巧;拉普拉斯变换;对流-扩散方程;行方法

中图分类号:O 241.82　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:0438-0479(2008)01-0020-05

近几十年来,分数阶微积分在各个领域得到了广泛的应用,同时分数阶微积分理论也得到了快速的发展[1-3]. 关于分数阶微积分方程的解析解,当前的文献中主要有两种求解方法. 第一种是对方程进行积分变换和逆变换得到基本解[4-5];另一种是用分离变量法[6]. 目前,对于分数阶微积分方程的数值方法的讨论,多数作者还是采用有限差分方法[6-11],有限元方法[12],分解方法[13]. 但是,大部分方法很难推广到高维问题. Ilic ,Liu 等[1]提出了在有界区域内求解 Riesz 空间分数阶对流-扩散方程的一种新的计算有效的方法. 这个方法容易推广应用到高维问题.

Riesz 空间分数阶对流-扩散方程最初是从混沌动力系统导出的[14-15],它描述的是被反常扩散和非指数松弛模型控制的系统中的传输动力过程. 形式上,它是由标准的对流-扩散方程的一阶和二阶导数项分别替换成 $\alpha(0<\alpha<1)$ 阶和 $\beta(1<\beta\leq 2)$ 阶 Riesz 空间分数阶导数得来的. Riesz 空间分数阶导数也称为 Riesz 位势算子,它含有双侧的 Riemann-Liouville (R-L) 分数阶导数,而且 Riesz 空间分数阶导数可用拉普拉斯算子的幂次方来表示[16-17]. 本文基于 Riesz 空间分数阶导数的这一特点,继续 Ilic ,Liu 等[1]的工作,利用一种新的技巧-矩阵转换方法[1],将有限区域中的 Riesz 空间分数阶对流-扩散方程化为半离散的代数系统,这个代数系统包含具有与 Riesz 分数阶导数相同的分数次幂的矩阵的一个常微分方程组. 这个半离散的代数系统可以用解决微分代数系统的工具 DASSL 来求解. 这个解技巧被称为计算有效的分数阶行方法,首先由 Liu 等提出求解空间分数阶 Fokker-Planck 方程[18],现已被广泛利用于求解空间分数阶微分方程[1].

借助于分数阶导数的谱表示和拉普拉斯变换方法,本文还导出了在有限区域中的 Riesz 空间分数阶对流扩散方程的解析解.

1　预备知识

本文考虑具有如下初边界条件的 Riesz 空间分数阶对流扩散方程:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^\alpha}{\partial|x|^\alpha}u(x,t) + b\frac{\partial^\beta}{\partial|x|^\beta}u(x,t),$$

$$0<x<l,t>0 \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,t>0 \tag{2}$$

$$u(x,0) = g(x),0<x<l \tag{3}$$

其中 $\frac{\partial^\alpha}{\partial|x|^\alpha} = {}^RD_x^\alpha = -(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ 和 $\frac{\partial^\beta}{\partial|x|^\beta} = {}^RD_x^\beta = -(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$ 分别是 α 阶和 β 阶的 Riesz 空间分数阶导数,$0<\alpha<1,1<\beta\leq 2$,这里 Riesz 空间分数阶导数可用拉普拉斯算子的幂次方来表示[16-17]. 系数 a 和 b 都是正的常数. 我们假设 $u(x,t)$, $g(x)$ 都是实值函数并且充分光滑.

定义 1[16,19]　有限区间上 $(a\leq x\leq b)$ 的 α 阶

收稿日期:2007-07-18
基金项目:国家自然科学基金(10271098),澳大利亚国家研究基金(LP0348653)资助
* 通讯作者:fwliu @xmu.edu.cn

Riesz 空间分数阶导数:

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial|x|^\alpha}u(x,t) = {}^R D_x^\alpha u(x,t) = -c\left({}_aD_x^\alpha + {}_xD_b^\alpha\right)u(x,t) \tag{4}$$

这里 $c = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}, \alpha \neq 1$,

$$ {}_aD_x^\alpha u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\int_a^x \frac{u(\xi,t)\mathrm{d}\xi}{(x-\xi)^{\alpha+1-n}},\quad n = [\alpha]+1 \tag{5}$$

$$ {}_xD_b^\alpha u(x,t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\int_x^b \frac{u(\xi,t)\mathrm{d}\xi}{(\xi-x)^{\alpha+1-n}},\quad n = [\alpha]+1 \tag{6}$$

定义 2[1]　假设拉普拉斯算子$(-\Delta)$在一有界区域Ω中有对应于特征值λ_n^2的正交特征函数ϕ_n的完备子集,即$(-\Delta)\phi_n = \lambda_n^2\phi_n$在区域$\Omega$中;$B(\phi) = 0$在边界$\partial\Omega$,这里$B(\phi)$是 Dirichet 边界条件. 令

$$F_\gamma = \left\{ f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n, c_n = \langle f, \phi_n\rangle \,\Big|\, \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2|\lambda_n|^\gamma < \infty, \gamma = \max(\alpha, 0)\right\},$$

则对于任意 $f \in F_\gamma$, $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ 定义为

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\lambda_n^\alpha\phi_n \tag{7}$$

注释 1[1]　算子 $T = (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ 是线性和自适应的. 即,如果 $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n$, $g = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\phi_n$,则

$$\langle Tf, g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\lambda_n^\alpha\phi_n = \langle f, Tg\rangle \tag{8}$$

定义 3[1]　令$\{\phi_n\}$是拉普拉斯算子$(-\Delta)$在带有齐次边界条件的有界区域Ω中的对应于特征值λ_n^2的正交特征函数组成的一完备子集. 则

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f = \begin{cases} (-\Delta)^m f, \alpha = 2m, m = 0,1,2,\cdots \\ (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}-m}(-\Delta)^m f, \\ \quad m-1 < \frac{\alpha}{2} < m, m = 1,2,\cdots \\ \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^\alpha\langle f, \phi_n\rangle\phi_n, \alpha < 0 \end{cases} \tag{9}$$

注释 2[1]　定义 3 与定义 2 是等价的.

性质 1[20]　对于一个实的非奇异对称矩阵 $A_{(N-1)\times(N-1)}$,存在着一个非奇异矩阵 $P_{(N-1)\times(N-1)}$,使得

$$A = P\Lambda P^{-1} \tag{10}$$

这里 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{N-1})$, $\lambda_i\ (i = 1,\cdots,N-1)$ 是矩阵 $A_{(N-1)\times(N-1)}$ 的特征值.

2　利用矩阵转换技巧和分数阶的行方法求数值解

矩阵转换技巧是通过以下 3 个步骤来进行的.

2.1　标准扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u, 0 < x < l, t > 0 \tag{11}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, t > 0 \tag{12}$$

$$\phi(x,0) = g(x), 0 < x < l \tag{13}$$

2.2　对空间导数引进一个有限差分逼近

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{a}{h^2}\left(-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}\right),\quad (i = 1,2,\cdots,N-1) \tag{14}$$

$$u_0 = u_N = 0 \tag{15}$$

$$u(x_i,0) = g(x_i), (i = 1,2,\cdots,N-1) \tag{16}$$

这里 $u_i = u(x_i,t)$, h 是空间步长, $N = \frac{l}{h}$.

上面离散形式的这些方程可以写成如下矩阵形式:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -aAU \tag{17}$$

其中

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

显然这里矩阵 A 是一个实对称的$(N-1)$阶对角占优阵,因此它是可逆的. 据性质 1, A 可以分解为 $A = P\Lambda P^{-1}$.

2.3　求 Riesz 空间分数阶对流-扩散方程的行方法

把原来的方程(1)写成如下形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u - b\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{\beta}{2}-1}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u \tag{18}$$

令 $A = m\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$ 是拉普拉斯算子在齐次边界条件下的矩阵表示,现对于我们所考虑的带有初值和奇次边界条件的 Riesz 空间分数阶对流扩散方程(1)～(3),假设分数阶拉普拉斯算子满足 $m\left\{\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}\right\} = A^{\frac{\alpha}{2}-1}$, $m\left\{\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{\beta}{2}-1}\right\} = A^{\frac{\beta}{2}-1}$,那么方程(1)可以写成如下矩阵形式:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -aA^{\frac{\alpha}{2}-1}AU - bA^{\frac{\beta}{2}-1}AU \tag{19}$$

为了解决以上方程的常微分方程系统,利用矩阵 A 谱分解(性质 1),得到矩阵转换技巧(MMT). 于是式(19) 可以化为:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -aP\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}P^{-1}U - bP\Lambda^{\frac{\beta}{2}}P^{-1}U \tag{20}$$

这里 $\Lambda^{\frac{\alpha}{2}} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{\frac{\alpha}{2}}, \lambda_2^{\frac{\alpha}{2}}, \cdots, \lambda_{N-1}^{\frac{\alpha}{2}})$, $\Lambda^{\frac{\beta}{2}} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{\frac{\beta}{2}}, \lambda_2^{\frac{\beta}{2}}, \cdots, \lambda_{N-1}^{\frac{\beta}{2}})$.

这里我们得到一个半离散的代数系统,这个代数系统包含具有与 Riesz 分数阶导数相同的分数次幂的矩阵的一个常微分方程组. 这个半离散的代数系统可以用解决微分代数系统的工具 DASSL 来求解[18]. 这个DASSL 基于 $k(k=1,2,\cdots,5)$ 阶向后差分公式近似导数. 在每个时间层,根据解的性态,自动选取阶 k 和时间步长. 这个分数阶的行方法已被广泛利用于求解空间分数阶微分方程[1,18].

3 Riesz 空间分数阶对流-扩散方程的解析解

以 $\langle f, g\rangle = \int_0^l f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 作为内积, 算子 $\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$ 在齐次边界 $u(0) = u(l) = 0$ 条件下是自适应的且对应于特征值 $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\ (n = 1,2,\cdots)$,有相应的正交特征函数 $u_n(x,\lambda_n) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$.

现用如下的拉普拉斯变换方法得到我们所考虑的 Riesz 空间分数阶对流扩散方程的解析解.

先对方程(1) ～ (3) 进行拉普拉斯变换,得:

$$s\tilde{u} - g = -a\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{u}(x,s) - b\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{\beta}{2}}\tilde{u}(x,s) \tag{21}$$

$$\tilde{u}(0,s) = \tilde{u}(l,s) = 0 \tag{22}$$

对上面式子与特征函数 u_n 作内积:

$$s\langle u_n, \tilde{u}(x,s)\rangle - \langle u_n, g\rangle = -a\left\langle u_n, \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{u}\right\rangle - b\left\langle u_n, \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{\beta}{2}}\tilde{u}\right\rangle \tag{23}$$

下面计算式(23) 右端中的 $\left\langle u_n, \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{u}\right\rangle$,据定义 3 和注释 1,有

$$\left\langle u_n, \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{u}\right\rangle = \left\langle u_n, \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\tilde{u}\right\rangle = \left\langle \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}u_n, \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\tilde{u}\right\rangle = \lambda_n^{\frac{\alpha}{2}-1}\langle u_n, -\tilde{u}''\rangle \tag{24}$$

利用分部积分和 $u_n(x,\lambda_n) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$,可得

$$\langle u_n, -\tilde{u}''\rangle = [u_n'(l)\tilde{u}(l) - u_n'(0)\tilde{u}(0)] - \int_0^l \tilde{u}u_n''\mathrm{d}x = -\int_0^l \tilde{u}u_n''\mathrm{d}x \tag{25}$$

而

$$-\int_0^l \tilde{u}u_n''\mathrm{d}x = -\langle u_n'', \tilde{u}\rangle = \langle(-\Delta)u_n, \tilde{u}\rangle = \langle\lambda_n u_n, \tilde{u}\rangle = \lambda_n\langle u_n, \tilde{u}\rangle \tag{26}$$

把式(26) 代入式(25),得

$$\langle u_n, -\tilde{u}''\rangle = \lambda_n\langle u_n, \tilde{u}\rangle \tag{27}$$

所以式(24) 变为

$$\left\langle u_n, \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\tilde{u}\right\rangle = \lambda_n^{\frac{\alpha}{2}}\langle u_n, \tilde{u}\rangle \tag{28}$$

同理

$$\left\langle u_n, \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{\beta}{2}}\tilde{u}\right\rangle = \lambda_n^{\frac{\beta}{2}}\langle u_n, \tilde{u}\rangle \tag{29}$$

把式(28) 和(29) 两式代入式(23),有

$$s\langle u_n, \tilde{u}(x,s)\rangle - \langle u_n, g\rangle = -a\lambda_n^{\frac{\alpha}{2}}\langle u_n, \tilde{u}\rangle - b\lambda_n^{\frac{\beta}{2}}\langle u_n, \tilde{u}\rangle \tag{30}$$

令

$$\langle u_n, \tilde{u}(x,s)\rangle = C_n(s),\quad \langle u_n, g\rangle = G_n,$$

则式(30) 便可化为

$$sC_n(s) - G_n = -a\lambda_n^{\frac{\alpha}{2}}C_n(s) - b\lambda_n^{\frac{\beta}{2}}C_n(s) \tag{31}$$

从式(31) 可推出

$$C_n(s) = \frac{G_n}{s + a\lambda_n^{\frac{\alpha}{2}} + b\lambda_n^{\frac{\beta}{2}}} \tag{32}$$

于是

$$\tilde{u}(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty}C_n(s)u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{G_n}{s + a\lambda_n^{\frac{\alpha}{2}} + b\lambda_n^{\frac{\beta}{2}}}u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{G_n}{s + a\lambda_n^{\frac{\alpha}{2}} + b\lambda_n^{\frac{\beta}{2}}}\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{33}$$

最后,对式(33) 进行拉普拉斯逆变换,得所求的解析解为:

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}G_n e^{-(a\lambda_n^{\frac{\alpha}{2}} + b\lambda_n^{\frac{\beta}{2}})t}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{34}$$

4 数值例子

以下取一个具体的数值例子来求原方程的解析解:取 $l = \pi$, $g(x) = x^2(\pi - x)$. 因为此时

$$G_n = \langle u_n, g\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}x^2(\pi - x)\sin(nx)\mathrm{d}x =$$

$$\sqrt{2\pi}\int_0^\pi \sin(nx)\,x^2\,\mathrm{d}x - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi \sin(nx)\,x^3\,\mathrm{d}x \tag{35}$$

由分部积分,可算得

$$\sqrt{2\pi}\int_0^\pi \sin(nx)\,x^2\,\mathrm{d}x = (-1)^{n+1}\frac{\sqrt{2\pi}}{n}\pi^2 + \frac{2\sqrt{2\pi}}{n^3}[(-1)^n - 1] \tag{36}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi \sin(nx)\,x^3\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\pi^3(-1)^n + \frac{6}{n^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\pi(-1)^n \tag{37}$$

因此,

$$G_n = \frac{2\sqrt{2\pi}}{n^3}[(-1)^n - 1] - \frac{6}{n^3}\sqrt{2\pi}(-1)^n = -\frac{4}{n^3}\sqrt{2\pi}(-1)^n - \frac{2\sqrt{2\pi}}{n^3} \tag{38}$$

于是,把式(38)代入(34),得:

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{4}{n^3}\sqrt{2\pi}(-1)^{n+1}e^{-\left(a\lambda_n^{\alpha}+b\lambda_n^{\beta}\right)t}\sin(nx) - \\ & \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2\sqrt{2\pi}}{n^3}e^{-\left(a\lambda_n^{\alpha}+b\lambda_n^{\beta}\right)t}\sin(nx) = \\ & 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(-1)^{n+1}e^{-\left(a\lambda_n^{\alpha}+b\lambda_n^{\beta}\right)t}\sin(nx) - \\ & 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}e^{-\left(a\lambda_n^{\alpha}+b\lambda_n^{\beta}\right)t}\sin(nx) \end{aligned} \tag{39}$$

图 1 给出了在不同时间 $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ 时,用矩阵转换方法求得的数值解与用拉普拉斯变换求得的解析解的情况,这里我们取 $a = b = 0.25$, $\alpha = 0.4$, $\beta = 1.8$. 从中可以看出数值解与解析解能够很好地吻合. 这个矩阵转换技巧,与分数阶的行方法结合为求解 Riesz 空间分数阶对流 - 扩散方程提供了一种计算有效的解方法.

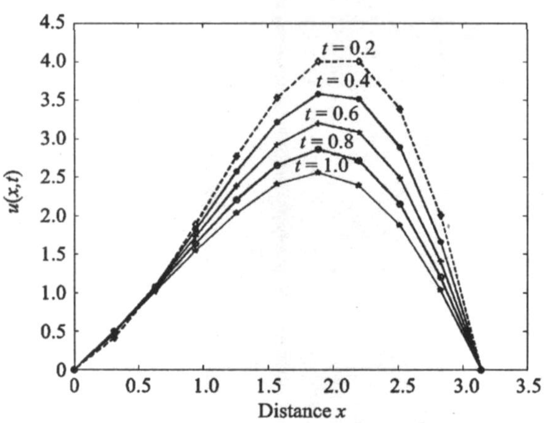

图 1　数值解(符号)与解析解(曲线)分别在 $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ 时的比较

Fig. 1　Comparison of numerical solution (symbols) and analysis solution (curves) at $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$, respectively

5　结　论

这篇文章提出了求解 Riesz 空间分数阶对流扩散方程的一种有效的数值方法——矩阵转换技巧,与分数阶的行方法结合. 利用分数阶导数的谱分解和拉普拉斯变换方法也导出了方程的解析解. 数值例子有力地证实了理论分析的正确性.

参考文献:

[1] Ilic M, Liu F, Turner I, et al. Numerical approximation of a fractional-in-space diffusion equation (Ⅱ)-with nonhomogeneous boundary conditions[J]. Fractional Calculus & Applied Analysis, 2006, 9(4): 333 - 349.

[2] Samko S G, Kilbas A A, Marichev O I. Fractional integrals and derivatives: theory and applications[M]. Amsterdam: Gordon and Breach, 1993.

[3] Podlubny I. Fractional differential equations[M]. New York: Academic Press, 1999.

[4] Gorenflo R, Mainardi F, Moretti D. Time fractional diffusion: a discrete random walk approach[J]. Journal of Nonlinear Dynamics, 2000, 29: 129 - 143.

[5] Huang F, Liu F. The fundamental solution of the space-time fractional advection-dispersion equation[J]. J Appl Math & Computing, 2005, 18(1/2): 339 - 350.

[6] 王学彬. 分离变量法解三维的分数阶扩散-波动方程的初值问题[D]. 厦门:厦门大学, 2006.

[7] Meerschaert M M, Scheffler H, Tadjeran C. Finite difference methods for two-dimensional fractional dispersion equation[J]. J Comp Phys, 2006, 211: 249 - 261.

[8] Liu F, Anh V, Turner I. Numerical solution of the space fractional Fokker-Planck equation[J]. J Comp Appl Mathematics, 2004, 166: 209 - 219.

[9] Shen S, Liu F, Anh V, et al. Detailed analysis of an explicit conservative difference approximation for the time fractional diffusion equation[J]. J Appl Math Computing, 2006, 22(3): 1 - 19.

[10] Liu F, Zhuang P, Anh V, et al. Stability and convergence of the difference methods for the space-time fractional advection-diffusion equation[J]. Appl Math Comp, 2007, 191: 12 - 20.

[11] Liu Q, Liu F, Turner I, et al. Approximation of the Lévy-Feller Advection-Dispersion process by random walk and finite difference method[J]. Phys Comp, 2007, 222: 57 - 70.

[12] Roop J P. Computational aspects of FEM approximation

of fractional advection dispersion equation on bounded domains in R^2[J]. J Comp Appl Math, 2006, 93(1): 243 - 268.
[13] Yu Q, Liu F, Anh V, et al. Solving linear and nonlinear space-time fractional reaction-diffusion equations by Adomian decomposition method[J]. International J for Numer Meth In Eng, 2007, DOI: 10.1002/NME.2165.
[14] Zaslavsky G M. Topological aspects of the dynamics of fluids and plasmas[M]. Kluwer: Dordrecht, 1992.
[15] Metzler R, Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach[J]. Physics Reports, 2000, 339: 1 - 77.
[16] Gorenflo R, Mainardi F. Random walk models for space-fractional diffusion processes[J]. Fractional Calculus & Applied Analysis, 1998, 1: 167 - 191.
[17] Gorenflo R, Mainardi F, Moretti D, et al. Discrete random walk models for space-time fractional diffusion[J]. Chemical Physics, 2002, 284: 521 - 541.
[18] Liu F, Anh V, Turner I. Numerical solution of the space fractional Fokker-Planck equation[J]. J Comp and Appl Math, 2004, 166: 209 - 219.
[19] Gorenflo R, Mainardi F. Approximation of Lévy-Feller diffusion by random walk[J]. J Anal Appl (ZAA), 1999, 18: 231 - 246.
[20] 徐树方. 数值线性代数[M]. 北京:北京大学出版社, 2000.

A Computationally Efficient Solution Method for a Riesz Space Fractional Advection-Dispersion Equation

SHEN Shu-jun[1], LIU Fa-wang[2*]

(1. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China;
2. School of Mathematical Sciences, Queensland University of Technology, Qld. 4001, Australia)

Abstract: In this paper, a Riesz space fractional advection-dispersion equation (RSFADE) is considered, which is derived from the kinetics of chaotic dynamics. Following work by Ilic and Liu et al, a new computationally efficient method for solving the RSFADE on a bounded domain is proposed. The method is based on the matrix representation of both the Riesz space fractional operators. The novelty of this method is that a standard discretisation of the operator leads to a system of ordinary differential equations (ODEs) with the matrix raised the same fractional power. Then the ODEs is solved by a computationally efficient fractional method of lines. Using a spectral representation of the fractional derivatives and the Laplace transform, the analysis solution of this equation is also derived. Finally, a numerical example is given to demonstrate that this numerical method is computationally efficient.

Key words: Riesz space fractional derivative; matrix transfer technique; Laplace transform; advection-dispersion equation; method of lines