第 19 卷 第 7 期 2007 年 7 月
计算机辅助设计与图形学学报
JOURNAL OF COMPUTER-AIDED DESIGN & COMPUTER GRAPHICS
Vol. 19, No. 7
July, 2007

Loop 细分曲面精确求值新公式

杨 军 曾晓明
(厦门大学数学科学学院 厦门 361005)
(yangbowenxmu@gmail.com; ttaek@yeah.net)

摘 要 利用控制网格拓扑结构的对称性,通过将奇异点周围 1-环和 2-环的控制顶点进行离散 Fourier 变换(DFT)得到分块对角阵,将其进行特征分解及排序之后,再通过离散 Fourier 逆变换(IDFT)和截断等操作得到细分矩阵的高次幂的表达式,从而得到 Loop 细分曲面新的精确参数化公式.

关键词 细分曲面;离散 Fourier 变换;参数化
中图法分类号 TP391.7

A New Exact Evaluation Formula for Loop Subdivision Surfaces

Yang Jun Zeng Xiaoming
(*School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen* 361005)

Abstract A block diagonal matrix can be obtained by utilizing the discrete Fourier transform (DFT) and the symmetrical structure called 1-ring and 2-ring in the vicinity of an extraordinary point on a mesh. By using in a sequence the eigen-decomposition, a permutation, the inverse discrete Fourier transform (IDFT) and a truncation on the matrix, an exact and explicit parametrization formula for Loop subdivision surfaces is proposed.

Key words subdivision surfaces; discrete Fourier transform (DFT); parametrization

细分曲面是一种离散曲面造型技术,与传统的连续形式的曲面造型技术相比,它规则简单,易于实现,特别是可以处理任意拓扑结构的控制网格,因而在 CAGD 和计算机图形学等领域得到了越来越广泛的应用. 细分曲面技术的基本思想是从一个初始网格出发,通过一些简单的规则(如对旧顶点进行线性组合)得到新顶点,再按一定的规则将其连接使控制网格加密. 只要规则选取合适,将以上步骤重复进行,最终加密的控制网格将收敛到一张极限曲面,这种递归定义的思想也使得其在多分辨建模技术领域占有一席之地.

到目前为止,已经产生了多种细分规则,比较著名且应用较广的有 Catmull-Clark 细分、Doo-Sabin 细分、Loop 细分、Butterfly 细分、$\sqrt{3}$细分等. 其中出现最早的 Catmull-Clark 和 Doo-Sabin 细分已有近 30 年的历史,它们分别是规则的双三次和双二次 B 样条曲面的推广;Loop 细分的产生也已有近 20 年的历史,它则是三向四次箱样条曲面的推广. 推广后的情况与规则的情况相比,最大的不同是它们分别有度数不为 4 或 6 的控制顶点,这样的点被称为奇异点. 正是由于奇异点的存在,导致对极限曲面性质的分析比较困难,使得规则简单、易于实现的细分曲面经过多年发展才得到较为成熟的应用.

1978 年,Doo 等[1]最早利用离散 Fourier 变换(discrete Fourier transform, DFT)和特征分析技术分析了奇异点附近的情况;1988 年,Ball 等[2]进一步利用该技术分析了 Catmull-Clark 细分曲面的奇异点的性质,得到切平面连续的必要条件并改进了

收稿日期:2007-04-30. 基金项目:国家自然科学基金(10571145). 杨 军,男,1979 年生,博士研究生,主要研究方向为逼近论、CAGD. 曾晓明,男,1956 年生,教授,博士生导师,主要研究方向为逼近论、CAGD.

细分规则;1998 年,Stam 给出了 Catmull-Clark 细分曲面[3]和 Loop 细分曲面[4]上任意参数点处的精确求值方法,从而使得细分方法朝实际应用方向迈出了一大步. Stam 也因该项技术的科学性和实用性满足了电影对建模技术的需求而获奥斯卡殊荣,于 2006 年被美国电影艺术和科学学会授予技术成就奖. 2006 年,Lai 等[5]进一步得到了广义 Catmull-Clark 细分曲面的参数化公式.

Stam 方法中重要的步骤之一是对细分矩阵进行特征分解,该方法在数值上是完全可行的,但是用于理论分析则有一些不足:因为细分矩阵的大小与奇异点的度数有关,要精确地求得任意情形下特征向量矩阵的逆矩阵的(符号)表达通式,要么非常困难,要么形式非常复杂[3,5]. 本文部分采用了和文献[2,5]类似的技术,通过 DFT 从另一个角度给出 Loop 细分曲面的精确求值公式.

1　Loop 细分模式

给定如图 1 所示的三角剖分的初始控制网格,其中 V 为奇异点(度数 $N\neq 6$),细分一次后的控制网格如图 2 所示,细分规则由图 3,4(称为模板)给出.

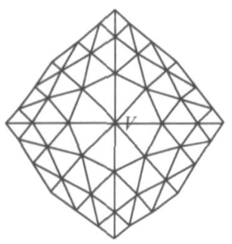

图 1　初始控制网格

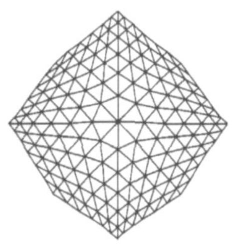

图 2　细分一次后的控制网格

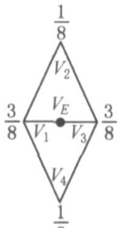

图 3　新边点产生规则

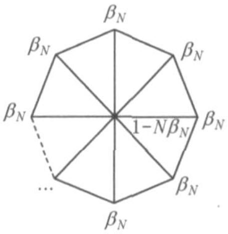

图 4　新顶点产生规则

新边点的产生规则为 $V_E=\frac{3}{8}(V_1+V_3)+\frac{1}{8}(V_2+V_4)$;新顶点的产生规则为 $V_V=(1-N\beta_N)V+\beta_N\sum V_j$,其中 $\beta_N=\frac{1}{N}\left(\frac{5}{8}-\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{N}\right)^2\right)$,$j=1,2,\cdots,N$. 将新边点和该边上 2 个旧顶点对应的新顶点分别相连,将每一个三角形 3 条边对应产生的新边点两两相连,则得到细分一次后的控制网格.

细分得到的极限曲面由许多小曲面片自动光滑拼接而成,每一小曲面片及其控制顶点(共 $N+6$ 个)如图 5 所示.

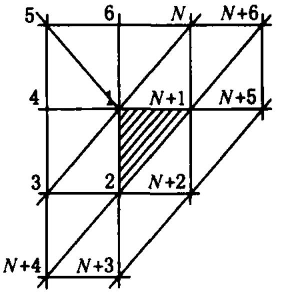

图 5　初始网格顶点排列顺序

下面简述 Stam 的参数化求值方法.

将初始网格的控制顶点列记为 C_0,细分一次后的顶点列记为 C_1,增广顶点列记为 $\overline{\mathrm{C}}_1^{\mathrm{T}}$,其排序方式如图 5,6 所示. 其中,

$\mathrm{C}_1^{\mathrm{T}}=(c_{1,1},\cdots,c_{1,K})$, $\overline{\mathrm{C}}_1^{\mathrm{T}}=(c_{1,1},\cdots,c_{1,K+1},\cdots,c_{1,M})$, $M=K+6=N+12$.

$\mathrm{C}_1=\mathrm{A}\mathrm{C}_0$, A 为细分矩阵(参见附录);

$\overline{\mathrm{C}}_1=\overline{\mathrm{A}}\mathrm{C}_0$, $\overline{\mathrm{A}}$ 为增广细分矩阵(参见附录).

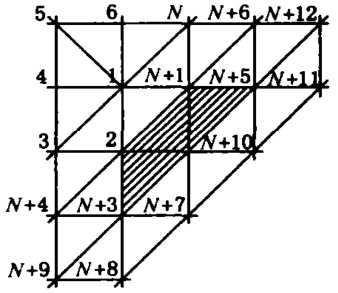

图 6　细分一次后网格顶点排列顺序

细分一次后,细分前奇异点周围顶点控制的一小曲面片(如图 5 阴影部分所示)可分解成 4 片更小的曲面片,其中 3 片是正规情形下的箱样条曲面片(如图 6 中阴影部分所示);细分一直进行下去,奇异点周围将始终具有如图 5,6 所示的拓扑结构. 细分 m 次后,奇异点附近具有这样的拓扑结构的网格的控制顶点列分别记为 C_m 和 $\overline{\mathrm{C}}_m$,

$$\overline{\mathrm{C}}_m=\overline{\mathrm{A}}\mathrm{C}_{m-1}=\overline{\mathrm{A}}\mathrm{A}^{m-1}\mathrm{C}_0,\ m\geq 1.$$

引入 $12\times M$ 的选取矩阵 P_k,通过计算可得每一小正规曲面片的控制顶点列,记为 $\mathrm{B}_{m,k}=\mathrm{P}_k\overline{\mathrm{C}}_m$,$k=1,2,3$. 则细分 m 次后每一小正规曲面片可以参数化为 $s_{m,k}(v,w)=\mathrm{B}_{m,k}^{\mathrm{T}}\mathrm{b}(v,w)=\overline{\mathrm{C}}_{m,k}^{\mathrm{T}}\mathrm{P}_k^{\mathrm{T}}\mathrm{b}(v,$

$w)$,其中 $\mathrm{b}(v,w)$为正规情况下的 12 个基函数组成的列向量,详见文献[4]中的附录.

为对整个小曲面片(图 5 中阴影部分代表的曲面片)在整体参数域 Ω 进行参数化,我们将整体参数域分解成如图 7 所示的一系列小区域,具体表示如下:

$$\Omega_1^m = \{(v,w) \mid v \in [2^{-m}, 2^{-m+1}],\ w \in [0, 2^{-m+1} - v]\};$$

$$\Omega_2^m = (v,w) \mid v \in [0, 2^{-m}],\ w \in [2^{-m} - v, 2^{-m}]\};$$

$$\Omega_3^m = \{(v,w) \mid v \in [0, 2^{-m}],\ w \in [2^{-m}, 2^{-m+1} - v]\}.$$

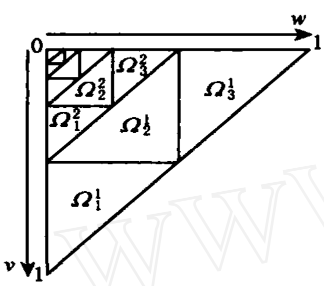

图 7 三角参数域的分解

整个小曲面片的参数化表达式为

$$s(v,w)\big|_{\Omega_k^m} = \mathrm{C}_0^{\mathrm{T}}(\mathrm{P}_k\bar{\mathrm{A}}\mathrm{A}^{m-1})^{\mathrm{T}}\mathrm{b}(t_{m,k}(v,w)),$$

其中 $t_{m,k}$将 Ω_k^m 变换到整体参数域 Ω,具体表达式为

$$t_{m,1}(v,w) = (2^m v - 1, 2^m w),$$

$$t_{m,2}(v,w) = (1 - 2^m v, 1 - 2^m w),$$

$$t_{m,3}(v,w) = (2^m v, 2^m w - 1).$$

若直接利用该曲面参数化表达式求值,每求一点(v,w)处的值就要利用矩阵乘法计算一次矩阵高次幂,既不方便也不经济,如果能求出 A^m 的表达通式,则只需要进行一些简单的运算即可. 文献[4]采用这种思想对 A 进行特征分解,最终得到了 Loop 细分曲面的参数表达式. 但由于 A 的大小和 N 有关,对其进行特征分解并得到通式很不容易. 本文将利用 DFT 从另一角度得到 Loop 细分曲面不同形式的参数表达式.

2 Loop 细分曲面的精确求值

本文中假定奇异点都是孤立的,即每一小曲面片的初始控制网格最多只含一个奇异点,否则可以通过 2 次细分使控制网格满足要求.

首先对初始控制网格的顶点编号,奇异点记为 V,1-环上的点按逆时针方向依次记为 $E_j, E_{j+1}, \cdots, E_{j+N-1}$, $j = 1, 2, \cdots, N$,如图 8 所示. 由于拓扑结构具有对称性,因此我们规定,若 $p \equiv k(\mathrm{mod}\, N)$,则 $E_p = E_k$, $1 \le k \le N$. 2-环上的点按逆时针方向依次记为 $I_j, F_{j+1}, I_{j+1}, F_{j+2}, \cdots, F_{j+N}, I_{j+N-1}$, $j = 1, 2, \cdots, N$. 同样规定,若 $p \equiv k(\mathrm{mod}\, N)$,则 $I_p = I_k$, $F_p = F_k$, $1 \le k \le N$. 细分一次后的网格顶点编号顺序与细分前的编号顺序一致,记为 $V^{(1)}, E_j^{(1)}, I_j^{(1)}, F_j^{(1)}$ 等;细分 m 次后的顶点记为 $V^{(m)}, E_j^{(m)}, I_j^{(m)}, F_j^{(m)}$.

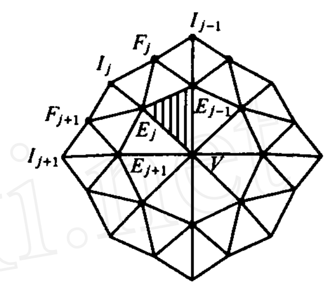

图 8 初始网格顶点编号顺序

下面对细分前后 1-环和 2-环上的顶点进行 DFT. 由 Loop 细分模式的细分规则易知

$$\begin{cases} E_j^{(1)} = \frac{3}{8}E_j + \frac{3}{8}V + \frac{1}{8}E_{j-1} + \frac{1}{8}E_{j+1} \\ F_j^{(1)} = \frac{1}{8}F_j + \frac{1}{8}V + \frac{3}{8}E_j + \frac{3}{8}E_{j-1} \\ I_j^{(1)} = \frac{5}{8}E_j + \frac{1}{16}(I_j + F_j + E_{j-1} + V + E_{j+1} + F_{j+1}). \end{cases} \tag{1}$$

将 V 和 $V^{(1)}$ 看成常项点列$\{V\}$,$\{V^{(1)}\}$,对顶点列$\{V\}$,$\{E_j\}$,$\{F_j\}$,$\{I_j\}$,$\{V^{(1)}\}$,$\{E_j^{(1)}\}$,$\{I_j^{(1)}\}$,$\{F_j^{(1)}\}$分别作 DFT,并记为

$$\begin{cases} v_\omega = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} w_N^{-\omega j} V \\ v_\omega^{(1)} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} w_N^{-\omega j} V^{(1)} \\ e_\omega = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} w_N^{-\omega j} E_j \\ e_\omega^{(1)} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} w_N^{-\omega j} E_j^{(1)} \\ f_\omega = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} w_N^{-\omega j} F_j \\ f_\omega^{(1)} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} w_N^{-\omega j} F_j^{(1)} \\ i_\omega = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} w_N^{-\omega j} I_j \\ i_\omega^{(1)} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} w_N^{-\omega j} I_j^{(1)} \end{cases} \tag{2}$$

其中, $w_N^{-\omega j} = e^{-\frac{2\pi i}{N}\omega j} = \cos\frac{2\pi}{N}\omega j - \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{N}\omega j$; $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$; $\omega = 0, 1, \cdots, N-1$.

记 $c_\omega = \cos\frac{2\pi\omega}{N}$, $s_\omega = \sin\frac{2\pi\omega}{N}$. 由式(1),(2)直接计算可得

$$v_\omega = v_0 = V,$$

$$v_\omega^{(1)} = v_0^{(1)} = V^{(1)} = (1 - N\beta_N) v_0 + N\beta_N e_0,$$

$$e_0^{(1)} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} E_j^{(1)} = \frac{3}{8} v_0 + \frac{5}{8} e_0,$$

$$f_0^{(1)} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} F_j^{(1)} = \frac{1}{8} v_0 + \frac{3}{4} e_0 + \frac{1}{8} f_0,$$

$$i_0^{(1)} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} I_j^{(1)} = \frac{1}{16} v_0 + \frac{3}{4} e_0 + \frac{1}{8} f_0 + \frac{1}{16} i_0,$$

$$e_\omega^{(1)} = \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} c_\omega\right) e_\omega,$$

$$f_\omega^{(1)} = \frac{3}{8}(w_N^{-\omega} + 1) e_\omega + \frac{1}{8} f_\omega,$$

$$i_\omega^{(1)} = \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{8} c_\omega\right) e_\omega + \frac{1}{16}(1 + w_N^{\omega}) f_\omega + \frac{1}{16} i_\omega.$$

记

$$\alpha = N\beta_N,$$

$$\begin{cases} R_0 = (v_0, e_0, f_0, i_0)^{\mathrm{T}} \\ R_0^{(1)} = (v_0^{(1)}, e_0^{(1)}, f_0^{(1)}, i_0^{(1)})^{\mathrm{T}} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} R_\omega = (e_\omega, f_\omega, i_\omega)^{\mathrm{T}} \\ R_\omega^{(1)} = (e_\omega^{(1)}, f_\omega^{(1)}, i_\omega^{(1)})^{\mathrm{T}} \end{cases} \quad (4)$$

将关系式(3),(4)写成矩阵形式

$$R_0^{(1)} = T_0 R_0, \quad R_\omega^{(1)} = T_\omega R_\omega;$$

其中,

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{pmatrix},$$

$$T_\omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(3+2c_\omega) & 0 & 0 \\ \frac{3}{8}(1+w_N^{\omega}) & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{8}(5+c_\omega) & \frac{1}{16}(1+w_N^{\omega}) & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

由于 T_0 和 T_ω 都是小矩阵,因此容易对其进行特征分解.

N 为奇数和偶数的情况稍有不同. 先考虑 N 为奇数的情况,直接计算可得

$$T_0 = L_0 \Theta_0 L_0^{-1}, \quad T_\omega = L_\omega \Theta_\omega L_\omega^{-1};$$

其中, L_0, L_ω 和 L_0^{-1}, L_ω^{-1} 分别是相应矩阵的特征向量矩阵及其逆矩阵; Θ_0 和 Θ_ω 是相应矩阵的特征值组成的对角阵.

$$\Theta_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{8}-\alpha \end{pmatrix},$$

$$\Theta_\omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8}(3+2c_\omega) \end{pmatrix},$$

$$L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -16(9\alpha - 34\alpha^2 + 32\alpha^3) \\ 1 & 0 & 0 & 6(9 - 34\alpha + 32\alpha^2) \\ 1 & 1 & 0 & 81 - 180\alpha + 64\alpha^2 \\ 1 & 2 & 1 & 2(45 - 84\alpha + 16\alpha^2) \end{pmatrix},$$

$$L_\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2(5 + 9c_\omega + 4c_\omega^2) \\ 1 & 0 & 3(5+4c_\omega)(1+w_N^{-\omega}) \\ 1+w_N^{\omega} & 1 & 23 + 30c_\omega + 7c_\omega^2 + 3s_\omega^2 \end{pmatrix},$$

$$L_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{3+8\alpha} & \frac{8\alpha}{3+8\alpha} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2-4\alpha} & \frac{3-4\alpha}{-2+4\alpha} & 1 & 0 \\ \frac{3}{-9+16\alpha} & 1+\frac{3}{9-16\alpha} & -2 & 1 \\ -\gamma & \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \frac{1}{54 - 60\alpha - 352\alpha^2 + 512\alpha^3};$$

$$L_\omega^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{3\mathrm{i}s_\omega}{2(1+c_\omega)} & 1 & 0 \\ \frac{-4 + 2c_\omega(5+3c_\omega) + 6s_\omega^2}{5+4c_\omega} & -1-w_N^{\omega} & 1 \\ \frac{1}{10 + 18c_\omega + 8c_\omega^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

再将 R_0, R_ω, $\omega = 1, 2, \cdots, N-1$ 的元素按顺序排成列向量

$$R = (v_0, e_0, f_0, i_0, \cdots, e_{N-1}, f_{N-1}, i_{N-1})^{\mathrm{T}};$$

同样,将 $R_0^{(1)}$, $R_\omega^{(1)}$, $\omega = 1, 2, \cdots, N-1$ 的元素排成列向量 $R^{(1)}$. 类似地,细分 m 次后的情况用 $R^{(m)}$ 表示, $R^{(m)} = T^m R$, 其中 T 为分块对角阵 $T = \mathrm{diag}(T_0, T_1, \cdots, T_{N-1})$, T^m 表示 T 的 m 次方. 由于

除 T_0 为 4×4 小矩阵外,其他 T_ω 均为 3×3 的小矩阵,而对小矩阵的特征分解是简单易行的,因而可以比较容易地求出 T^m,这样就避免了直接对一个大矩阵进行特征分解再求高次幂(Stam 的方法).

易知,

$$T^m = L\Theta^m L^{-1} \tag{5}$$

其中,L 和 L^{-1}为分块对角阵,Θ 为对角阵.

$$L = \mathrm{diag}(L_0, L_1, \cdots, L_{N-1}),$$
$$L^{-1} = \mathrm{diag}(L_0^{-1}, L_1^{-1}, \cdots, L_{N-1}^{-1}),$$
$$\Theta = \mathrm{diag}(\Theta_0, \Theta_1, \cdots, \Theta_{N-1}).$$

下面利用 Fourier 逆变换(inverse discrete Fourier transform, IDFT)、排序矩阵和选取矩阵求得细分矩阵 A 的 m 次方的精确表达公式.

首先将 R 和 $R^{(m)}$中的元素进行重排,使之适合进行 IDFT. 这只要利用一个 $3N+1$ 阶排序矩阵 D_1(参见附录)就可以做到,D_1 的每一行有且仅有一个元素为 1,其余的为 0,且 1 在每行中的位置各不相同,因而 D_1 是一个正交矩阵,$D_1^{-1} = D_1^T$. 重排后的 R 和 $R^{(m)}$分别记为 Q 和 $Q^{(m)}$,

$Q = (v_0, e_0, e_1, \cdots, e_{N-1}, f_0, f_1, \cdots, f_{N-1}, i_0, i_1, \cdots, i_{N-1})^T$;

$Q^{(m)}$的元素的排列方式类似,即

$$Q = D_1 R,\ Q^{(m)} = D_1 R^{(m)};$$

因而 $Q^{(m)} = D_1 T^m D_1^{-1} Q$.

然后进行 IDFT. 记 DFT 的变换矩阵为 W,则 IDFT 的变换矩阵为 W^{-1}. 对 Q 和 $Q^{(m)}$进行 IDFT,分别得到初始控制网格顶点和细分 m 次后的控制顶点按同样顺序排列成的顶点列,记为 G 和 $G^{(m)}$,$G = W^{-1}Q$;$G^{(m)} = W^{-1}Q^{(m)}$. 即 $G^{(m)} = W^{-1} D_1 T^m D_1^T W G$.

为便于直接利用文献[4]中的部分结论,我们再对 $G^{(m)}$和 G 进行一次排序并进行截断,使顶点排列方式遵从文献[4]中的排列方式(如图 5 所示). 这可以利用 $3N+1$ 阶排序矩阵 D_2(参见附录)以及 $(N+6)\times(3N+1)$阶截取矩阵$(I, 0)$做到,其中,I 为 $N+6$ 阶单位阵,0 为全零矩阵.

根据图 5,8 可知,C_m 和 $G^{(m)}$的关系为

$$C_m = (I, 0) D_2 G^{(m)},\ C_0 = (I, 0) D_2 G;$$

因而

$$C_m = (I, 0) D_2 W^{-1} D_1 T^m D_1^T W D_2^{-1} (I, 0)^T C_0,$$

将式(5)代入,得

$$C_m = (I, 0) D_2 W^{-1} D_1 L \Theta^m L^{-1} D_1^T W D_2^{-1} (I, 0)^T C_0,$$

将此式和 $C_m = A^m C_0$ 对比,即知

$$A^m = (I, 0) D_2 W^{-1} D_1 L \Theta^m L^{-1} D_1^T W D_2^{-1} (I, 0)^T,$$

只要对上式右端进行简化,就可以得到 A^m 的精确表达式(详见附录).

当 N 为奇数时,

$$A^m = A_1 + \left(\frac{1}{8}\right)^m A_2 + \left(\frac{1}{16}\right)^m A_3 + \left(\frac{5}{8} - a\right)^m A_4 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \left(\frac{1}{8}(3 + 2c_k)\right)^m A_k \tag{6}$$

其中 $c_k = \cos\dfrac{2\pi k}{N}$,$A_1$,$A_2$,$A_3$,$A_4$ 和 A_k 均为只与奇异点度数 N 有关而与细分次数 m 无关的矩阵,称为分解矩阵.

下面给出 Loop 细分曲面精确求值的步骤和公式

要求任意参数值(v, w)处对应的曲面上的点,需要先求出 m 和 k.

$m = \min\{\lceil \log_{\frac{1}{2}} v \rceil, \lceil \log_{\frac{1}{2}} w \rceil\}$,符号$\lceil a \rceil$ 表示不小于 a 的最小整数;

由 Ω_k^m的定义知

$$k = \begin{cases} 1, \text{if } 2^m v \geq 1,\quad 2^m(w+v) \leq 2 \\ 2, \text{if } 2^m v \leq 1,\quad 2^m w \leq 1,\quad 2^m(w+v) \geq 1. \\ 3, \text{if } 2^m w \geq 1,\quad 2^m(w+v) \leq 2 \end{cases}$$

将式(6)代入 $s(v, w)$,得到新的参数化公式,利用该公式即可求值.

$$\begin{aligned} s(v, w)\big|_{\Omega_k^m} = {} & C_0^T (A^{m-1})^T \bar{A}^T P_k^T b(t_{m,k}(v, w)) = \\ & C_0 A_1^T \bar{A}^T P_k^T b(t_{m,k}(v, w)) + \\ & \left(\frac{1}{8}\right)^{m-1} C_0 A_2^T \bar{A}^T P_k^T b(t_{m,k}(v, w)) + \\ & \left(\frac{1}{16}\right)^{m-1} C_0 A_3^T \bar{A}^T + \\ & \left(\frac{5}{8} - a\right)^{m-1} C_0 A_4^T \bar{A}^T P_k^T b(t_{m,k}(v, w)) + \\ & \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \left(\frac{1}{8}(3 + 2c_k)\right)^{m-1} C_0 A_k^T \bar{A}^T P_k^T b(t_{m,k}(v, w)). \end{aligned}$$

当 N 为偶数时,$c_{\frac{N}{2}} = -1$,此时 $T_{\frac{N}{2}}$为实矩阵,其特征值矩阵和特征向量矩阵及其逆矩阵不能再用通式 Θ_ω,L_ω 和 L_ω^{-1} 表示,需要单独计算. 此种情况下的讨论过程与 N 为奇数的情况完全类似,最终求得 A^m 的表达式及 $s(v, w)$的表达式略有不同(参见附录),过程略.

3 结论和展望

本文给出了 Loop 细分曲面参数化计算的一个新公式. 通过 DFT 和 IDFT 求得细分矩阵的高次幂

的分解公式,对固定的 N,只需要利用附录给出的公式事先计算一次分解矩阵,然后进行简单的代数运算即可. 该公式利于编程,计算简单、方便,可用来设计 Loop 细分曲面计算的高效算法,同时由于公式具有显式表达式,可以用于理论分析,细分曲面的误差估计是 CAGD 中的一个重要问题,我们对此进行了初步探讨[6],今后将利用新公式对该问题做进一步的研究.

参　考　文　献

[1] Doo D, Sabin M A. Behaviour of recursive subdivision surfaces near extraordinary points [J]. Computer-Aided Design, 1978, 10(6): 356-360

[2] Ball A A, Storry D J T. Condition for tangent plane continuity over recursively generated B-spline surfaces [J]. ACM Transactions on Graphics, 1988, 7(2): 83-102

[3] Stam J. Exact evaluation of Catmull-Clark subdivision surfaces at arbitrary parameter values [C] //Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGAPH, Orlando, 1998: 395-404

[4] Stam J. Evaluation of Loop subdivision surfaces [C] //Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Orlando, 1998: Course Notes # 37

[5] Lai S, Cheng F. Parametrization of general Catmull-Clark subdivision surfaces and its application [J]. Computer Aided Design & Applications, 2006, 3: 1-4

[6] Zeng X M, Yang J. Convergence property of control meshes of Loop subdivision surfaces [J]. Journal of Information & Computational Science, 2005, 2(4): 805-813

附录

细分矩阵 $A = \begin{pmatrix} S & 0 \\ S_{11} & S_{12} \end{pmatrix}$, $\bar{A} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$.

其中, S 为 $N+1$ 阶方阵,

$$S = \begin{pmatrix} \sigma & \beta_N & \beta_N & \beta_N & \beta_N & \cdots & \beta_N & \beta_N & \beta_N \\ c & c & d & 0 & 0 & & 0 & 0 & d \\ c & d & c & d & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & & & \cdots \\ c & d & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d & c \end{pmatrix},$$

$\sigma = \frac{3}{8} + \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{N}\right)^2$, $c = \frac{3}{8}$, $d = \frac{1}{8}$;

S_{11} 为 $5 \times (N+1)$ 阶矩阵,

$$S_{11} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 10 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix};$$

S_{12} 为 5 阶方阵,

$$S_{12} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

S_{21} 和 S_{22} 见文献[4].

排序矩阵 D_1 的构造. 注意到 R 具有近似周期性的结构(除去第一个元素外,后面的元素每 3 个一组下标递增),可知 D_1 是一个 $3N+1$ 阶稀疏矩阵,位于 $\{1,1\}$, $\{(j-1)\times N+k+1, 3k+j-2\}$ 位置的元素为 1,其他元素为 0,其中,$1 \le j \le 3$, $1 \le k \le N$.

排序矩阵 D_2 的构造. 比较图 5,8,并注意到图 8 的拓扑结构具有对称性,可得出 D_2. D_2 也是一个 $3N+1$ 阶的稀疏矩阵,位于 $\{1,1\}$, $\{N+2, N+2\}$, $\{N+3, 3N+1\}$, $\{N+4, 2N+1\}$, $\{N+5, 2N+2\}$, $\{N+6, N+3\}$ 及 $\{k, N-k+3\}$ 位置的元素为 1,其他元素为 0,其中 $2 \le k \le N+1$.

由 A 的结构知, $A^m = \begin{pmatrix} S^m & 0 \\ \Delta_m & (S_{12})^m \end{pmatrix}$. 其中, Δ_m 为和 m 有关的 $5 \times (N+1)$ 阶矩阵,而

$$(S_{12})^m = \left(\frac{1}{8}\right)^m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \zeta_m & 2^{-m} & \zeta_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \zeta_m & 0 & 0 & 2^{-m} & \zeta_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\zeta_m = 1 - 2^{-m}$. 因此要求 A^m,只需再求出 A^m 中左侧 S^m 和 Δ_m 部分的元素,这可利用 $A^m = (I, 0) D_2 W^{-1} D_1 L \Theta^m L^{-1} \times D_1^T W D_2^{-1} (I, 0)^T$ 化简得出,同时可得出分解矩阵的表达式.

以下各式中, $A^m_{i,j}$ 表示 A^m 中位于 i 行 j 列的元素, $c_k = \cos\frac{2\pi k}{N}$, $\rho = \frac{5}{8} - \alpha = \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{N}\right)^2$, $\mu_k = \frac{1}{8}(3 + 2c_k)$, $\tau = \frac{8\alpha}{3+8\alpha}$, $\eta = \frac{3}{3+8\alpha}$, $\theta = \frac{3-4\alpha}{4\alpha-2}$. 当 N 为奇数时, $\sum$ 表示 $\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}$; 当 N 为偶数时, $\sum$ 表示 $\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}$.

A^m 的第一列和第一行的元素, $3 \le k \le N+1$.

$A^m_{1,1} = \eta + \rho^m \tau$, $A^m_{2,1} = \eta - \rho^m \eta$, $A^m_{k,1} = A^m_{2,1}$,

$$A^m_{N+2,1} = \eta + \left(\frac{1}{8}\right)^m \frac{1}{2-4\alpha} + \rho^m \frac{9-4\alpha}{-6-4\alpha+32\alpha^2},$$

$$A^m_{N+3,1} = \eta + \left(\frac{1}{8}\right)^m \frac{1}{1-2\alpha} + \left(\frac{1}{16}\right)^m \frac{3}{-9+16\alpha} + \rho^m \frac{-45+84\alpha-16\alpha^2}{27-30\alpha-176\alpha^2+256\alpha^3},$$

$A^m_{N+4,1} = A^m_{N+2,1}$, $A^m_{N+5,1} = A^m_{N+3,1}$, $A^m_{N+6,1} = A^m_{N+2,1}$,

$A^m_{1,2} = \frac{1}{N}(\tau - \rho^m \tau)$, $A^m_{1,k} = A^m_{1,2}$.

A^m 的第 s 行, t 列的元素, $2 \le s \le N+1$, $2 \le t \le N+1$.

$$NA^m_{s,t} = \tau + \rho^m \eta + \sum \mu_k^m 2c_{k(t-s)} + \frac{(-1)^N+1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^m c_{\frac{N}{2}(s-t)}.$$

第 $N+2$ 到 $N+6$ 行元素, $2 \le q \le N+1$.

$$NA^m_{N+2,q} = \tau + \left(\frac{1}{8}\right)^m\left(\theta - 3\sum \frac{c_{\frac{k}{2}(3-2q)}}{c_{\frac{k}{2}}}\right) + \rho^m \frac{(-9+4\alpha)}{-6-4\alpha+32\alpha^2} + 3\sum \mu_k^m \frac{c_{\frac{k}{2}(3-2q)}}{c_{\frac{k}{2}}},$$

$$NA^m_{N+3,q} = \tau + \left(\frac{1}{8}\right)^m\left(2\theta - 6\sum c_{k(q-2)}\right) + \left(\frac{1}{16}\right)^m\left(\frac{12-16\alpha}{9-16\alpha} + 4\sum \frac{(1+5c_k)c_{k(q-2)}}{5+4c_k}\right) + \rho^m \frac{(45-84\alpha+16\alpha^2)}{27-30\alpha-176\alpha^2+256\alpha^3} + \sum \mu_k^m \frac{2(13+2c_k)c_{k(q-2)}}{5+4c_k} + \frac{(-1)^N+1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^m 8c_{\frac{N}{2}(q-2)} - \frac{(-1)^N+1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^m 8c_{\frac{N}{2}(q-2)},$$

$$NA^m_{N+4,q} = \tau + \left(\frac{1}{8}\right)^m\left(\theta - 3\sum \frac{c_{\frac{k(5-2q)}{2}}}{c_{\frac{k}{2}}}\right) + \rho^m \frac{(-9+4\alpha)}{-6-4\alpha+32\alpha^2} + 3\sum \mu_k^m \frac{c_{\frac{k(5-2q)}{2}}}{c_{\frac{k}{2}}},$$

$$NA^m_{N+5,q} = \tau + \left(\frac{1}{8}\right)^m\left(2\theta - 6\sum c_{k(q-1)}\right) + \left(\frac{1}{16}\right)^m\left(\frac{12-16\alpha}{9-16\alpha} + 4\sum \frac{(1+5c_k)c_{k(q-1)}}{5+4c_k}\right) + \rho^m \frac{(45-84\alpha+16\alpha^2)}{27-30\alpha-176\alpha^2+256\alpha^3} + \sum \mu_k^m \frac{2(13+2c_k)c_{k(q-1)}}{5+4c_k} + \frac{(-1)^N+1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^m 8c_{\frac{N}{2}(q-1)} - \frac{(-1)^N+1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^m 8c_{\frac{N}{2}(q-1)},$$

$$NA^m_{N+6,q} = \tau + \left(\frac{1}{8}\right)^m\left(\theta - 3\sum \frac{c_{\frac{k}{2}(1-2q)}}{c_{\frac{k}{2}}}\right) + \rho^m \frac{(-9+4\alpha)}{-6-4\alpha+32\alpha^2} + 3\sum \mu_k^m \frac{c_{\frac{k}{2}(1-2q)}}{\frac{k}{2}}.$$

有了上面的结果,不难进一步通过

$$\bar{A}A^{m-1} = \begin{pmatrix} S^m & 0 \\ S_{11}S^{m-1} + S_{12}\Delta_{m-1} & (S_{12})^m \\ S_{21}S^{m-1} + S_{22}\Delta_{m-1} & S_{22}(S_{12})^{m-1} \end{pmatrix}$$

求得 $\bar{A}A^{m-1}$ 的简化结果. 需要特别说明的是:当 $N=3$ 时,以上分解式中会出现分母为 0 的情况,故对于 $N=3$ 分解公式不适用,此时 A 是一个 9×9 的矩阵,通过计算可知 A 不能对角化,但很容易利用 Jordan 分解求出 A^m 的表达通式,限于篇幅此处略去详细结论.

(上接第 853 页)

[7] Fan Xuchuan, Chen Falai. Interval implicitization of rational B-spline curves [J]. Journal of Software, 2004, 15(6): 960-967 (in Chinese)
(樊旭川, 陈发来. 有理 B 样条曲线的区间隐式化[J]. 软件学报, 2004, 15(6): 960-967)

[8] Fan Xuchuan. Interval polynomials and interval implicitization [D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2005 (in Chinese)
(樊旭川. 区间多项式与区间隐式化方法[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2005)

[9] Liu Ligang, Wang Guojin, Shou Huahao. Approximation by interval Bézier surfaces [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2000, 12(9): 645-650 (in Chinese)
(刘利刚, 王国瑾, 寿华好. 区间 Bézier 曲面逼近[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2000, 12(9): 645-650)

[10] Li Yajuan, Chen Wenyu, Wang Guozhao. Interval implicitization of rational surfaces [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2006, 18(7): 936-941 (in Chinese)
(李亚娟, 陈文喻, 汪国昭. 有理曲面的区间隐式化[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2006, 18(7): 936-941)