广义模同构及其在高等代数中的应用*

林亚南　　苏秀萍

(厦门大学数学系　厦门　361005)

摘要　本文用代数上的模和广义模同构的观点,讨论“高等代数”中的若干问题.

关键词　广义模同构,高等代数,教改

中图分类号　O 151.2

1　预备

数域 k 上的代数 A,指的是非空集合 A 有两种运算:加法 $+$ 和乘法 $\times$,以及 k 到 A 的数乘运算$\circ$,它们满足(Ⅰ) $(A;+,\circ)$ 是 k 上线性空间;(Ⅱ) $(A;+,\times)$ 是环;(Ⅲ) $\alpha\circ(a\times b)=(\alpha\cdot a)\times b=a\times(\alpha\cdot b)$,对任意的 $\alpha\in k$, $a,b\in A$. 两个代数 $(A;+,\times,\circ)$,$(\bar{A};\bar{+},\bar{\times},\bar{\circ})$ 称为同构,如果存在 A 到 $\bar{A}$ 的双射 θ,满足(Ⅰ) $\theta(a+b)=\theta(a)\bar{+}\theta(b)$;(Ⅱ) $\theta(a\times b)=\theta(a)\bar{\times}\theta(b)$;(Ⅲ) $\theta(\alpha\circ a)=\alpha\bar{\circ}\theta(a)$,对任意 $\alpha\in k$, $a,b\in A$. A 与 $\bar{A}$ 同构,记为 $A\overset{\theta}{\cong}\bar{A}$. 称代数 A 带单位元 1,如果 $(A;+,\times)$ 是带单位元 1 的环. 设 V 是 k 上 n 维线性空间,记 $\mathrm{Hom}_k(V,V)$ 为 V 的线性变换的全体,它对于加法 $(f+g)(v)=f(v)+g(v)$,乘法 $(fg)(v)=f(g(v))$,数乘 $(\alpha f)(v)=\alpha f(v)$ 构成 k 上代数. 记 $k^{n\times n}$ 为 k 上 n 阶矩阵全体,它对于矩阵的加法,乘法,数乘构成 k 上代数.

命题 1　$\mathrm{Hom}_k(V,V)\overset{\theta}{\cong}k^{n\times n}$(作为 k-代数)

证明　取定 V 的基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$, $f\in\mathrm{Hom}_k(V,V)$,设 f 在此基下的矩阵为 A,即 $f(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)A$. 令 $\theta: f\mapsto A$. 易见 θ 导出代数 $\mathrm{Hom}_k(V,V)$ 与 $k^{n\times n}$ 之间的同构映射. 设 A 是 k 上带单位元 1 的代数,A 上的模 ${}_AM$ 指的是 k-线性空间 M 与 A 到 M 的“数乘”,满足:(Ⅰ) $(a+b)m=am+bm$;(Ⅱ) $a(m+n)=am+an$;(Ⅲ) $1\cdot m=m$;(Ⅳ) $(ab)m=a(bm)$;(Ⅴ) $\alpha(am)=(\alpha a)m=a(\alpha m)$,对任意的 $\alpha\in k$, $a,b\in A$, $m,n\in M$.

例 1　线性空间 V 是代数 $\mathrm{Hom}_k(V,V)$ 上的模,数乘定义为 $fv=f(v)$,对任意 $f\in\mathrm{Hom}_k(V,V)$, $v\in V$. 设 k^n 是 k 上 n 元列向量空间,则 k^n 是代数 $k^{n\times n}$ 上的模,数乘定义为矩阵的乘法.

2　广义模同构

n　e

定义　设 A, B 是 k-代数,且 $A\overset{\theta}{\cong}B$. M 是 A 上的模,N 是 B 上的模. M 到 N 的 k-线性映射 ϕ_θ 称为 ${}_AM$ 到 ${}_BN$ 的广义模同态,如果 $\phi_\theta(am)=\theta(a)\phi_\theta(m)$. 特别地,当 ϕ_θ 是双射时,

* 收稿日期:1998-01-08
林亚南,男,1957年10月出生,副教授
国家教委面向21世纪数学专业课程设置与教学改革项目

ϕ_θ 称为 $_A M$ 到 $_B N$ 的广义模同构,记为 $_A M \overset{\phi_\theta}{\cong} {}_B N$, $_A M$ 和 $_B N$ 称为广义同构的模.

注意到当 $A = B$ 时,上述的 ϕ_θ 即是代数上的模同态和模同构的定义. 所以,广义模同态是模同态的推广.

定理 设 V 是 n 维 k-线性空间,则有广义模同构 $_{\mathrm{Hom}_k(V,V)} V \overset{\phi_\theta}{\cong} {}_{k^{n\times n}} k^n$,其中 $\mathrm{Hom}_k(V, V) \overset{\theta}{\cong} k^{n\times n}$ 作为 k-代数同构,如命题 1 所述.

证明 取定 V 的基 $\eta_1, \cdots, \eta_n$. 任取 $v \in V$, v 在此基下的坐标为 $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$,则 $f(v)$ 在此基下的坐标为 $A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. 令 $\phi_\theta: v \to \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$,易证 ϕ_θ 是 k-线性映射且 $\phi_\theta(fv) = \theta(f)\phi_\theta(v)$.

由于模的运算的性质在广义模同构下保持不变,可认为广义同构的两个模本质上是一样的,这样可将一个模的问题化为另一个模的问题来考虑,扩大解题思路. 易证下面的命题:

命题 2 设 $_{\mathrm{Hom}_k(V,V)} V \overset{\phi_\theta}{\cong} {}_{k^{n\times n}} k^n$ 是广义模同构, $f \in \mathrm{Hom}_k(V, V)$, $\theta(f) = A \in k^{n\times n}$, A 的列向量为 $A_1, \cdots, A_n$,则(1) ϕ_θ 导出 k-线性空间同构 $\mathrm{Ker} f \cong \{X \in k^n | AX = 0\}$; (2) ϕ_θ 导出 k-线性空间同构 $\mathrm{Im} f \cong \{AX | X \in k^n\} = L(A_1, \cdots, A_n)$,这里 $L(A_1, \cdots, A_n)$ 表示 k^n 中由 $A_1, \cdots, A_n$ 生成的子空间; (3) $\dim \mathrm{Im} f = \dim L(A_1, \cdots, A_n) =$ 秩(A); (4) $\dim \mathrm{Ker} f = n -$ 秩(A).

推论 设 V 是 n 维 k-线性空间, $f \in \mathrm{Hom}_k(V, V)$,则 $\dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = n$.

证明 由命题 2 的(3), (4)即得.

3 应用举例

举几例说明在广义模同构的观点下空间与变换问题和列向量与矩阵问题的互相转化.

例 2 设 $A_1, \cdots, A_m$ 是 m 个非零的 n 阶矩阵,求证 存在 n 元列向量 X,使得 $A_i X \neq 0$, $i = 1, \cdots, m$.

证明 设 $\theta(f_i) = A_i$, $i = 1, \cdots, m$,这里 $f_i \in \mathrm{Hom}_k(V, V)$. 因 A_i 非零,故 $f_i \neq 0$. 以 $\mathrm{Ker}\, f_i \neq V$, $i = 1, \cdots, m$. 因有限维空间的有限个真子空间不能覆盖整个空间,故有 $v \in V$,使 $v \bar{\in} \mathrm{Ker}\, f_i$, $i = 1, \cdots, m$. 即 $f_i(v) \neq 0$, $i = 1, \cdots, m$. 令 $\phi_\theta(v) = X$ 由广义模同构,即知 $A_i X \neq 0$, $i = 1, \cdots, m$.

例 3 设 A, B 是 n 阶方阵,求证 秩$(AB) \geq$ 秩(A) + 秩$(B) - n$.

证明 设 $\theta(f) = A$, $\theta(g) = B$. 令 $\mathrm{Im}\, g = W$,则 $\mathrm{Im}\, fg = \mathrm{Im}(f|w)$. 有 $\dim \mathrm{Im}(f|w) + \dim \mathrm{Ker}(f|w) = \dim W = \dim \mathrm{Im} g$. 又因 $\dim \mathrm{Ker}(f|w) \leq \dim \mathrm{Ker} f = n - \dim \mathrm{Im} f$,所以有 $\dim \mathrm{Im}(fg) \geq \dim \mathrm{Im} g + \dim \mathrm{Im} f - n$. 由命题 2 即得结论.

例 4 设 $A \in k^{n\times n}$, $A^2 = A$, $A = A_1 + A_2$,且秩(A) = 秩(A_1) + 秩(A_2). 求证 $A_i^2 = A_i (i = 1, 2)$, $A_i A_j = 0 (i \neq j, i, j = 1, 2)$.

证明 设 $\theta(f) = A$, $\theta(f_i) = A_i$, $i = 1, 2$. 由广义模同构与代数同构,有 $f^2 = f$, $f = f_1 + f_2$,且 $\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathrm{Im} f_1 + \dim \mathrm{Im} f_2$. 因 $\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathrm{Im}(f_1 + f_2) \leq \dim(\mathrm{Im} f_1 + \mathrm{Im} f_2) \leq \dim \mathrm{Im} f_1 + \dim \mathrm{Im} f_2 = \dim \mathrm{Im} f$,所以 $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f_1 \oplus \mathrm{Im} f_2$. 对任意 $v \in V$, $f_1(v) \in \mathrm{Im} f$,所以存在 $u \in V$,使得 $f_1(v)$

$= f(u)$. 由 $ff_1(v) = ff(u) = f(u) = f_1(v)$ 可知 $ff_1 = f_1$. 考虑到 $f_1(v) = ff_1(v) = f_1f_1(v) + f_2f_1(v)$, 可得到 $f_1(v - f_1(v)) = f_2f_1(v) \in \mathrm{Im} f_1 \cap \mathrm{Im} f_2 = 0$, 故 $f_1^2 = f_1$, $f_2f_1 = 0$. 同理可得 $f_2^2 = f_2$, $f_1f_2 = 0$. 由同构关系有 $A_i^2 = A_i$, $A_iA_j = 0 (i \neq j, i, j = 1, 2)$.

例 5　设 V 是 n 维 k-线性空间, $0 \neq v \in V$. 求证　$\{f(v) \mid f \in \mathrm{Hom}_k(V, V)\} = V$.

证明　在广义模同构意义下, 要证明 $0 \neq X \in k^n$, 则有 $\{AX \mid A \in k^{n\times n}\} = k^n$. 设 E_i 是第 i 个分量为 1, 其余分量为零的 n 元列向量, 即 $\{E_i\}_{i=1}^n$ 是 k^n 的一个基. 设 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. 因 $X \neq 0$, 不妨设 $x_j \neq 0$. 则 $E_i = \frac{1}{x_j}E_{ij}X$, 这里 E_{ij} 表示第 i 行第 j 列所在元素为 1, 其余均为 0 的 n 阶方阵. 因 $\{AX \mid A \in k^{n\times n}\}$ 是 k^n 的子空间且 $E_i \in \{AX \mid A \in k^{n\times n}\}$, $i = 1, \cdots, n$, 所以 $\{AX \mid A \in k^{n\times n}\} = k^n$.

事实上, $\{f(\alpha) \mid f \in \mathrm{Hom}_k(V, V)\}$ 是 V 的一个 A—子模. 例子结论表明对任意 $0 \neq v \in V$, 则 $\mathrm{Hom}_k(V, V) \cdot \alpha = V$, 所以 V 是代数 $\mathrm{Hom}_k(V, V)$ 上的单模.

例 6　设 V 是 n 维 k-线性空间, $0 \neq v \in V$, 求证　$W = \{f \in \mathrm{Hom}_k(V, V) \mid f(v) = 0\}$ 是 $\mathrm{Hom}_k(V, V)$ 的子空间, 并求 $\dim W$.

证明　易证 W 是 $\mathrm{Hom}_k(V, V)$ 的子空间(实际上是代数 $\mathrm{Hom}_k(V, V)$ 的左理想). 进一步, 有代数 $\mathrm{Hom}_k(V, V)$ 上的模的正合列 $0 \longrightarrow W \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(V, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(V, V) \cdot v \longrightarrow 0$. 由例 5 知 $\mathrm{Hom}_k(V, V) \cdot \alpha = V$, 其维数为 n. 故 $\dim W = \dim \mathrm{Hom}_k(V, V) - n = n^2 - n = n(n-1)$.

应说明的是, 在广义模同构下, 例 6 的相应结论是 $0 \neq X \in k^n$, 则 $W = \{A \in k^{n\times n} \mid AX = 0\}$ 是 $k^{n\times n}$ 的子空间, 且 $\dim W = n(n-1)$.

参 考 文 献

1　黄洛生. 高等代数原理和方法. 福州:福建人民出版社, 1994
2　张禾瑞, 郝炳新. 高等代数. 北京:高等教育出版社, 1983
3　陈昭木, 陈清华, 王华雄等. 高等代数. 福州:福建教育出版社, 1991

Generalized Isomorphism of Modules and the Application to Higher Algebra

Lin Ya'nan　　Su Xiuping

(Department of Mathematics, Xiamen University　Xiamen　361005)

Abstract　Here the concept of generalized isomorphism of modules over algebras is introduced. Applying this new view point, the authors discuss some problems on higher algebras.

Keywords　generalized isomorphism of modules, higher algebra, education reform