第 33 卷第 1 期
2003 年 1 月
东南大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF SOUTHEAST UNIVERSITY (Natural Science Edition)
Vol. 33 No. 1
Jan. 2003

具周期时滞系统的移动均值及其在电力系统中的应用

计国君[1] 史 平[2] 宋文忠[3] 戴先中[3]

([1] 厦门大学管理学院, 厦门 361005)
([2] 南京财经大学基础教学部, 南京 210003)
([3] 东南大学自动化研究所, 南京 210096)

摘要: 基于 20 世纪 60 年代 Halanay 和 Hale 关于微分系统平均性的思想,利用移动均值方法,研究了一类非线性具周期时滞系统的移动均值,利用移动均值方法和分区间分析方法证明了该类系统的平均化定理,得到了该类系统及其平均化系统解的渐近性行为. 本文的分区间分析方法及定理与以往研究的不同之处在于考虑了平均化系统中的时滞项. 最后将结论应用到一个具有周期激励的时滞系统模型——非同期合闸产生的过电压模型,研究了该类系统在周期扰动和反馈控制下的稳定性问题,验证了本文所得结果.

关键词: 移动均值方法; 时滞系统; 周期扰动; 电力系统; 过电压

中图分类号: TM711;O322 **文献标识码**: A **文章编号**: 1001 - 0505(2003)01-0034-07

Moving averages for periodic time-delay differential system and application to the power system

Ji Guojun[1] Shi Ping[2] Song Wenzhong[3] Dai Xianzhong[3]

([1]School of Management, Xiamen University, Xiamen 361005, China)
([2]Department of Basic Courses, Nanjing Economics University, Nanjing 210003, China)
([3]Institute of Automation, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: This paper is partly based on the idea of averaging of differential systems proposed by Halanay and Hale in the 1960's. The moving averages for periodic time-delay differential system is presented and its averaging theorems are proved by the method of moving averages and district-analysis. The asymptotic behavior of the solutions to the system and its averaged system are obtained. The district-analysis and the theorem differ from previous work in taking into account the time-delay terms existing in the averaged system. A model of over-voltage with time-delay and with periodic excitation, caused by asynchronous closing of switches in power systems, is given. Study on the system stabilization under periodic disturbances and feedback time-delay verifies the above results.

Key words: moving averages; time-delay system; periodic disturbance; power system; over-voltage

动力系统的稳定性分析理论的发展在数学和应用科学领域产生了巨大的影响,诸如生态系统、电力系统、航空航天等领域,存在较为完善的系统稳定性研究的方法,如对系统 $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$(其中 $t_0 \le t_1 \le t_2$)的研究.

已有文献表明,探讨依赖于时间的系统稳定性分析的方法证明还存在较大的困难[1,2],例如对系统形式为 $\dot{x} = f(t,x)$, $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$,其中 $f(t+T,x) = f(t,x)$. 对某个 $T>0$,最为复杂的稳定性分析是系统因为 T 的作用表现的不稳定性行为,该现象通常被称作参数谐振. 已有方法适合这样的系统分析,最典型的是 Floquet 理论[3] 和近期的有关研究工作.

收稿日期: 2002-04-08.
基金项目: 国家杰出青年资金资助项目(59925718).
作者简介: 计国君(1964—),男,博士,教授.

均值方法成功地应用于周期性系统的消谐并确保系统的全局性态.该方法的理论结果在 18 世纪和 19 世纪被应用到对行星运动探测的研究[4],其中该方法被作为解决太阳系模型中小周期扰动问题的一种方法.从 20 世纪 50 年代至今,这方面主要的理论工作都反映在文献[5]中.大家感兴趣的都是研究下列形式的弱非线性二阶系统:

$$\ddot{x}(t) + w_n^2 x(t) = \varepsilon f(t, x(t), \dot{x}(t)) \tag{1}$$

式中,$x \in \mathbf{R}$;f 是连续的,$f(t + T, x, \dot{x}) = f(t, x, \dot{x})$,关于某个 $T > 0$,且 $0 < \varepsilon \ll 1$.借助一定的坐标变换,系统(1)可以表示为 $\dot{x}(t) = \varepsilon F(t, x(t)) + O(\varepsilon^2)$,这样可平均化为

$$\dot{x}(t) = \varepsilon \overline{F}(x(t)) \tag{2}$$

式中,$x \in \mathbf{R}^2$,$\overline{F}(x) = \frac{1}{T}\int_0^T F(t, x)\,\mathrm{d}t$,当忽略 $O(\varepsilon^2)$ 项时,这样的系统具有明显的物理意义(代表非线性机械与电振动模型),对系统(2)可进行平衡点与稳定性分析.传统的例子是受外力作用的垂直悬摆问题,文献[6]表明,在充分大的外加频率下系统为受迫偏转平衡.从此均值方法从早期的对弱非线性系统扩展到下列更一般向量场的非线性系统:

$$\dot{x}(t) = \varepsilon f(t, x(t), \varepsilon) \tag{3}$$

式中,假设 $f: \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,$f(t + T, x, \varepsilon) = f(t, x, \varepsilon)$,对某个 $T > 0$,f 为定义在有界集合上 2 阶可微的有界函数.文献[7]表明,存在坐标变换 $x = y + \varepsilon w(t, y, \varepsilon)$ 使得系统(3)可简化为

$$\dot{y}(t) = \varepsilon \overline{f}(y(t)) + \varepsilon^2 f_1(t, y(t), \varepsilon) \tag{4}$$

式中,$\overline{f}(y(t)) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t, y(t), \varepsilon)\,\mathrm{d}t$,$f_1(t + T, y(t), \varepsilon) = f_1(t, y(t), \varepsilon)$.该变换与对系统(1)的变换相比较,优点是显然的,此时系统(3)可近似地表示为

$$\dot{y}(t) = \varepsilon \overline{f}(y(t)) \tag{5}$$

利用平均化定理,文献[7]证明了系统(3)和(5)解的封闭性.特别地,如果 $x(t)$ 是系统(3)的解,而 $y(t)$ 是系统(5)的解,则 $|x(t) - y(t)| = O(\varepsilon)$,其中 $t \in [0, t_1]$,$t_1 = O\left(1/\varepsilon\right)$.另外,利用平均化定理可考虑系统(3)和(5)解的双曲性态,且系统(5)的双曲不动点轨道与系统(3)的双曲周期轨道有密切关系,当然包括系统前(后)向不动点(周期轨道)的稳定(不稳定)流形的解的渐近行为.文献[8]利用相应的结论将周期性情形扩展到概周期情形.Arnold 在文献[4]中利用作用角(action-angle)坐标的观点对均值方法作了几何描述,且讨论了平均化结论的条件对一维的多频率系统是不可行的.

平均化定理的最基本的发展和应用是在自动控制理论领域,因为在自动控制领域中所有的物理过程常表现为周期性或者为中立型动态性(内在振动性),有时需要考虑周期励磁作为反馈控制.该方法已经证明可用于被称为开环周期控制的镇定性分析.文献[9]表明,作为振动控制器利用开环周期输入来控制或者使得一类系统稳定,该方法是可行的.具有周期控制系统的鲁棒性研究反映在文献[10]中所考虑的多铰链机械系统,其中垂直摆视为通常意义的理解.文献[10]的结果近来被扩充到一般系统中对开环控制律的系统化分析和综合上[11].

对时滞系统采用平均化的思想方法是由实际问题自身决定的,关键是实际问题中的确定性问题大都存在时滞,重要的研究体现在控制领域.系统闭环控制律的综合往往是通常的反馈环显示一定的时滞,这是在实际问题中常见的现象.在模拟控制系统中,时滞产生在控制系统或者控制器的非模型化的内在性态中,这样在具体控制中将导致反馈信号的时滞.在数字控制中,时滞将导致执行控制任务的计算溢出.较为复杂的例子是时滞可能产生在无限维系统中,诸如流体、化工系统和弹性结构问题等.另一方面,时滞的最明显来源是遥控装置的控制造成的时间差,如 2 个不同星球信号的传递.电力系统中不同期合闸产生过电压比同期合闸要高,这是与三相开关时滞的原因相关联的[12,13].

将平均化理论推广到时滞系统的意义是显然的,从上述介绍的例子看来需要设计高频开环控制律.时滞系统受迫周期的例子在文献[14]中可体现.

1　时滞系统的平均化

考虑下列非线性时滞系统:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varepsilon f(t, x(t), x(t-\tau_1), \cdots, x(t-\tau_m)) \\ x(t) &= \phi(t), t \in [t_0-\tau, t_0], \tau = \max_{1\le i\le m} \tau_i \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

式中,f 关于所有变量是连续的,$f: \mathbf{R}\times D\times\cdots\times D \to \mathbf{R}^n$, $D\subset \mathbf{R}^n$, ε和$\tau_i(1\le i\le m)$ 均为正的实参数. 同时假设非线性函数 f 以 T 为周期,即

$$f(t+T, x, x_{\tau_1}, \cdots, x_{\tau_m}) = f(t, x, x_{\tau_1}, \cdots, x_{\tau_m}) \qquad \forall (t, x, x_{\tau_1}, \cdots, x_{\tau_m}) \in \mathbf{R}\times D\times\cdots\times D$$

初始函数 ϕ在 $t\in[t_0-\tau, t_0]$ 上连续. 设系统(6) 的解表示为 $x(t) = x(t; t_0, \phi)$. 文献[1]结论表明,对充分小的 ε,系统(6) 的解可利用平均化近似地表示为下列系统的解:

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \varepsilon f_0(y(t), y(t), \cdots, y(t)) \\ y(t_0) &= \phi(t_0) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

式中 $$f_0(l_1, l_2, \cdots, l_{m+1}) = \frac{1}{T}\int_0^T f(s, l_1, l_2, \cdots, l_{m+1})\,\mathrm{d}s \tag{8}$$

对系统(2),非线性项 f 的显式时间量通过平均化处理掉,且时滞量也未加考虑,这样简化使得问题更简单. 但是对有些实际问题,如 ε并非充分小,利用平均化处理忽略时滞会产生更不准确的结论[15]. 显然在诸多实际物理问题中,ε不可能是充分小的,这样传统的均值理论就很难应用[1]. 所以有必要发展均值理论到容许有大的上界的 ε值.

本文假定在区间$[t, t+T]$上 $x(t)$ 的移动均值表示为 $\bar{x}(t)$. 特别地,当 ε充分小时,函数 $x(t)$ 的变化率应该充分小,即认为$|x(t)-\bar{x}(t)|$也较小. 因为调和函数 $x(t)$ 经过平均化处理后为 $\bar{x}(t)$,这样近似后的 $\bar{x}(t)$ 可以通过式(6) 右边平均向量场所对应的齐次系统得到. 假定 $x(t) = x(t; t_0, \phi)$ 是系统(6) 相应于初始连续函数 $\phi\in C[t_0-\tau, t_0]$ 的解. $x(t)$ 的移动均值表示为 $\bar{x}(t)$,且定义

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} \phi(t) & t\in[t_0-\tau, t_0] \\ \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} x(s)\,\mathrm{d}s & t\in[t_0, \infty) \end{cases}$$

式中,$T>0$,是函数 f 的周期. 这样有下列结论:

定理1 假设系统(6) 在 $t\in[t_0-\tau, t_0+L+T]$时的解 $x(t)\in D$,其中 $L>0$, $T>0$,进一步假设 f 是以 T 为周期的,且满足$|f(t, x_1, \cdots, x_{m+1})|\le M$, $\forall (t, x_1, \cdots, x_{m+1})$ 定义在$([t_0-\tau, t_0+L]\times D\times\cdots\times D)$,则$|x(t)-\bar{x}(t)| = O(T\varepsilon)$, $\forall t\in[t_0-\tau, t_0+L]$.

证 根据定义可得 $x(t)-\bar{x}(t) = 0$, $\forall t\in[t_0-\tau, t_0]$,当 $t\in[t_0, t_0+L]$ 可推出

$$\begin{aligned} |x(t)-\bar{x}(t)| &= \left|x(t) - \frac{1}{T}\int_t^{T+t} x(s)\,\mathrm{d}s\right| = \left|\frac{1}{T}\int_t^{T+t}[x(t)-x(s)]\,\mathrm{d}s\right| = \\ &\left|\frac{\varepsilon}{T}\int_t^{T+t}\int_s^t f(v, x(v), x(v-\tau_1), \cdots, x(v-\tau_m))\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}s\right| \le \\ &\left|\frac{\varepsilon}{T}\int_t^{T+t} M(t-s)\,\mathrm{d}s\right| = \frac{\varepsilon M T}{2} = O(T\varepsilon) \end{aligned}$$

这里用到函数 f 当 $x(t)\in D$ 时具有一致有界的 M.

现在讨论平均化系统(7) 的代替模型

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \varepsilon f_0(z(t), z(t-\tau_1), \cdots, z(t-\tau_m)) \\ z(t) &= \phi(t),\ t\in[t_0-\tau, t_0],\ \tau = \max_{1\le i\le m}\tau_i \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式中,f_0 的定义同式(8).

注 ①从定理1易见,函数 $f(t, \cdot)$ 平均值的一致收敛是不需要的,即表明当 f 为非周期函数时定理1仍然成立. 实际上,在本文的结论中,移动均值方法对向量场的限制条件是弱的. ②在式(9) 中,时滞的信息依旧保留,因此该系统的平均化模型要比式(7) 复杂得多.

现在讨论式(9) 的解 $\bar{x}(t)$. 假定右边关于变量是可微的,则函数 $\bar{x}(t)$ 满足下列关系:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \frac{1}{T}[x(t+T; t_0, \phi) - x(t; t_0, \phi)] = \\ &\frac{\varepsilon}{T}\int_t^{T+t} f(v, x(v; t_0, \phi), x(v-\tau_1; t_0, \phi), \cdots, x(v-\tau_m; t_0, \phi))\,\mathrm{d}v \qquad t\ge t_0 \\ \bar{x}(t) &= \phi(t) \qquad t\in[t_0-\tau, t_0] \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

式(10) 右边依赖于 $x(t)$ 而非 $\bar{x}(t)$. 所以,$\bar{x}(t)$ 可看作向量场等价与 $\varepsilon f(\cdot)$ 的局部均值的系统(6) 的解. 将式(10) 描述如下:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \frac{\varepsilon}{T}\int_t^{T+t} f(v,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\tau_1),\cdots,\bar{x}(t-\tau_m))\mathrm{d}v + \frac{\varepsilon}{T}\int_t^{T+t}[f(v,x(v;t_0,\phi),x(v-\tau_1;t_0,\phi),\cdots,x(v-\tau_m;t_0,\phi)) - f(v,\bar{x}(t),\bar{x}(t-\tau_1),\cdots,\bar{x}(t-\tau_m))]\mathrm{d}v \tag{11}$$

这样,扰动理论可用于与系统(9) 相关的解 $\bar{x}(t)$,下列结论自然成立:

定理 2　令定理 1 的假设条件满足,$L_0 = L/\varepsilon$,且假定 ①$|f(t,x_1,\cdots,x_{m+1}) - f(t,\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_{m+1})| \le k\sum_{i=1}^{m+1}|x_i - \bar{x}_i|$,$\forall(t,x_i,\bar{x}_i) \in \left(\left[t_0-\tau,t_0+\frac{L}{\varepsilon}\right]\times D\times D\right)$;② 设函数 $\bar{x}(t)$,$z(t)$ 当 $t\in[t_0-\tau,t_0+L/\varepsilon]$ 值域落在 D 内,此处当 $t\in[t_0-\tau,t_0]$ 时 $\bar{x}(t) = z(t) = \phi(t)$. 则有

$$|\bar{x}(t) - z(t)| = O(T\varepsilon) + O(\tau\varepsilon) \qquad \forall t\in\left[t_0-\tau,t_0+\frac{L}{\varepsilon}\right]$$

证　令 $z(t) = z(t;t_0,\phi)$ 表示系统(9) 的解. 当 $t\in[t_0-\tau,t_0]$,有 $|\bar{x}(t) - z(t)| = 0$. 注意到函数 $\bar{x}(t)$ 通常在 $t = t_0$ 点不连续,所以,函数 $\bar{x}(t-\tau)$ 在 $t = t_0+\tau$ 不连续. 这就要特别关注点 $t = t_0$ 和 $t = t_0+\tau$. 令 $\delta > 0$ 为充分小的常数 $t\in[t_0,t_0+\tau+\delta]$ 时,考虑函数 $|\bar{x}(t) - z(t)|$,有

$$|\bar{x}(t) - z(t)| = |\bar{x}(t_0) - z(t_0)| + \varepsilon\int_{t_0}^{t}\left[\frac{1}{T}\int_v^{T+v} f(v,x(v),x(v-\tau_1),\cdots,x(v-\tau_m))\mathrm{d}v - f_0(z(v),z(v-\tau_1),\cdots,z(v-\tau_m))\right]\mathrm{d}v$$

而当 $t\in[t_0,t_0+\tau+\delta]$ 时 $z\in D$,则

$$|f_0(z(v),z(v-\tau_1),\cdots,z(v-\tau_m))| \le \frac{1}{T}\int_0^T|f(t,z(v),z(v-\tau_1),\cdots,z(v-\tau_m))|\mathrm{d}t \le \frac{1}{T}\int_0^T M\mathrm{d}t = M$$

另当 $t\in[t_0,t_0+\tau+\delta]$ 时,$x\in D$,有 $|f(v,x(v),x(v-\tau_1),\cdots,x(v-\tau_m))| \le M$. 因此当 $t\in[t_0,t_0+\tau+\delta]$ 时,有 $|\bar{x}(t) - z(t)| = |\bar{x}(t_0) - z(t_0)| + \varepsilon\int_{t_0}^{t_0+\tau+\delta}\frac{1}{T}\left(\int_v^{v+T}M\mathrm{d}t + M\right)\mathrm{d}v$. 依据假定条件 $z(t_0) = \bar{x}(t_0)$,利用定理 1 可得 $|\bar{x}(t_0) - z(t_0)| \le \varepsilon MT/2$. 即当 $t\in[t_0,t_0+\tau+\delta]$ 时,可得 $|\bar{x}(t) - z(t)| \le \varepsilon M\left(T/2 + 2\tau + 2\delta\right)$.

下面假定 $L/\varepsilon \ge \delta + \tau$,则当 $t\in[t_0+\tau+\delta,t_0+L/\varepsilon]$ 时,从式(11) 可推出

$$\bar{x}(t) - z(t) = \bar{x}(t_0+\tau+\delta) - z(t_0+\tau+\delta) + \varepsilon\int_{t_0+\tau+\delta}^{t}\left[\frac{1}{T}\int_v^{T+v}f(v,x(v),x(v-\tau_1),\cdots,x(v-\tau_m))\mathrm{d}v - f_0(z(v),z(v-\tau_1),\cdots,z(v-\tau_m))\right]\mathrm{d}v$$

即

$$\begin{aligned}|\bar{x}(t) - z(t)| \le{}& |\bar{x}(t_0+\tau+\delta) - z(t_0+\tau+\delta)| + \\ & \varepsilon\int_{t_0+\tau+\delta}^{t}|f_0(\bar{x}(v),\bar{x}(v-\tau_1),\cdots,x(v-\tau_m)) - f_0(z(v),z(v-\tau_1),\cdots,z(v-\tau_m))|\mathrm{d}v + \\ & \varepsilon\int_{t_0+\tau+\delta}^{t}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T f(v+u,x(v+u),x(v+u-\tau_1),\cdots,x(v+u-\tau_m))\mathrm{d}v - \right. \\ & \left. f_0(z(v),z(v-\tau_1),\cdots,z(v-\tau_m))\right\}\mathrm{d}v + \varepsilon\int_{t_0+\tau+\delta}^{t}|f_0(x(v),x(v-\tau_1),\cdots,x(v-\tau_m)) - \\ & f_0(\bar{x}(v),\bar{x}(v-\tau_1),\cdots,\bar{x}(v-\tau_m))|\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{12}$$

从上述关系可以得到

$$|\bar{x}(t_0+\tau+\delta) - z(t_0+\tau+\delta)| \le \varepsilon M\left(T/2 + 2\tau + 2\delta\right)$$

进一步地,因为函数 f 为具有常数 k 的 Lipschitz 型函数,条件(2) 表明

$$|f_0(z(v),z(v-\tau_1),\cdots,z(v-\tau_m)) - f_0(\bar{x}(v),\bar{x}(v-\tau_1),\cdots,\bar{x}(v-\tau_m))| \le$$

$$k\left[|z(v)-\bar{x}(v)|+\sum_{i=1}^{m}|z(v-\tau_i)-\bar{x}(v-\tau_i)|\right]$$

对 $v\in[t_0,t_0+L/\varepsilon]$ 成立. 类似地,有

$$|f_0(x(v),x(v-\tau_1),\cdots,x(v-\tau_m))-f_0(\bar{x}(v),\bar{x}(v-\tau_1),\cdots,\bar{x}(v-\tau_m))|\le$$
$$k\left[|x(v)-\bar{x}(v)|+\sum_{i=1}^{m}|x(v-\tau_i)-\bar{x}(v-\tau_i)|\right]$$

利用定理1证明,表明当 $v\in[t_0,t_0+L/\varepsilon]$ 时有

$$|f_0(x(v),x(v-\tau_1),\cdots,x(v-\tau_m))-f_0(\bar{x}(v),\bar{x}(v-\tau_1),\cdots,\bar{x}(v-\tau_m))|\le kMT\varepsilon$$

另外当 $v\in[t_0+\tau+\delta,t_0+L/\varepsilon]$, $L/\varepsilon\ge\tau+\delta$, $u\in[0,T]$ 时,有

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(u+v,x(u+v),x(u+v-\tau_1),\cdots,x(u+v-\tau_m))\mathrm{d}u-f_0(x(v),x(v-\tau_1),\cdots,x(v-\tau_m))\right|=$$
$$\frac{1}{T}\left|\int_0^T[f(u+v,x(u+v),x(u+v-\tau_1),\cdots,x(u+v-\tau_m))]\mathrm{d}u-\right.$$
$$\left.f(u+v,x(u),x(u-\tau_1),\cdots,x(u-\tau_m))\right|\le\frac{1}{T}\int_0^T k\left[|x(u+v)-x(u)|+\right.$$
$$\left.\sum_{i=1}^{m}|x(u+v-\tau_i)-x(u-\tau_i)|\right]\mathrm{d}u$$

当 $t_0\le t_1\le t_2$ 时,易见 $x(t_2)-x(t_1)=\varepsilon\int_{t_1}^{t_2}f(v,x(v),x(v-\tau_1),\cdots,x(v-\tau_m))\mathrm{d}v$,这样,当 $v\in[t_0+\tau+\delta,t_0+L/\varepsilon]$, $L/\varepsilon\ge\tau+\delta$, $u\in[0,T]$ 以及某 $c\in[0,\tau+\delta]$ 时可得

$$|x(u+v-c)-x(v-c)|\le MT\varepsilon$$

利用上述不等式,当 $t\in[t_0+\tau+\delta,t_0+L/\varepsilon]$ 时,式(12)可化为

$$|\bar{x}(t)-z(t)|\le\varepsilon M\left(\frac{T}{2}+2\tau+2\delta\right)+k\varepsilon\int_{t_0+\tau+\delta}^{t}\left[|\bar{x}(v)-z(v)|+\sum_{i=1}^{m}|\bar{x}(v-\tau_i)-z(v-\tau_i)|\right]\mathrm{d}v+$$
$$\frac{2\varepsilon^2}{T}\int_{t_0+\tau+\delta}^{t}\int_0^T kMv\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u+\varepsilon^2\int_{t_0+\tau+\delta}^{t}kMT\mathrm{d}u$$

当 $t\in[t_0,t_0+L/\varepsilon]$ 时,可见上述积分的任意一项都是正的,于是

$$|\bar{x}(t)-z(t)|\le\varepsilon M\left(\frac{T}{2}+2\tau+2\delta\right)+k\varepsilon\int_0^t\left[|\bar{x}(v)-z(v)|+\sum_{i=1}^{m}|\bar{x}(v-\tau_i)-z(v-\tau_i)|\right]\mathrm{d}v+$$
$$\frac{2\varepsilon^2}{T}\int_0^t\int_0^T kMv\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u+\varepsilon^2\int_0^t kMT\mathrm{d}u$$

此处不连续函数 $\bar{x}(t)$ 在点 $t=t_0^-$ 是Lebesgue可积的. 注意到上述不等式是递增的,以及当 $v\in[t_0-\tau,t_0]$ 时,$\bar{x}(v-\tau_i)=z(v-\tau_i)$, $1\le i\le m$. 所以当 $t\in[t_0,t_0+L/\varepsilon]$ 时,可得 $\sup\limits_{v\in[t_0,t]}|\bar{x}(v)-z(v)|\le\varepsilon M(T/2+2\tau+2\delta)+2k\varepsilon MTL+k\varepsilon(n+1)\int_0^t\sup\limits_{\sigma\in[t_0,v]}|\bar{x}(\sigma)-z(\sigma)|\mathrm{d}\sigma$. 考虑到 $\sup\limits_{v\in[t_0,t]}|\bar{x}(v)-z(v)|$ 为连续函数,当 $t\in[t_0,t_0+L/\varepsilon]$ 时,利用Gronwall不等式可得 $\sup\limits_{v\in[t_0,t]}|\bar{x}(v)-z(v)|\le[M\varepsilon(T/2+2\tau+2\delta)+2kLMT\varepsilon]\exp[k\varepsilon(n+1)(t-t_0)]$. 此处常数 δ 可任意小(例如可取 $\delta=\tau\varepsilon$),因此上面的不等式表明当 $t\in[t_0-\tau,t_0+L/\varepsilon]$ 时,有 $|\bar{x}(t)-z(t)|=O(T\varepsilon)+O(\tau\varepsilon)$.

将定理1与定理2结合到一起可得下列均值定理:

定理3 设定理1与定理2的条件均满足,则当 $t\in[t_0-\tau,t_0+L/\varepsilon]$ 时,有 $|x(t)-z(t)|=O(T\varepsilon)+O(\tau\varepsilon)$ 成立.

证 考虑到 $|x(t)-z(t)|\le|x(t)-\bar{x}(t)|+|\bar{x}(t)-z(t)|$,利用定理1和定理2即得.

3 在电力系统中的应用

在电力系统中,理想的开关合闸过程是三相同期,但电力系统本身特点决定了三相合闸往往是不同期

的. 实际运行表明,非同期合闸产生的开关过电压比同期合闸产生的高. 在一般情况下,前者比后者高 20 %～39 %,因此前者具有更大的危险性. 为探索由非同期合闸产生开关过电压的机理,借助于计算机的实验分析已经得到一定的结论[13]. 在电力系统的振荡回路中由于谐振是发生在三相紧密相关的非线性电路中,其机理十分复杂. 为回避该困难,国内外的研究者大都取其简化形式,即将三相非线性电路简化为单相来研究,以便可以借助于单自由度非线性振动理论在相平面上作定性分析和研究. 实际上早期 I. A. Wright 就指出不能如此简化的理论和实际理由,且列出不能简化的具体线路图. 1975 年 Germand 首次建立了电力系统的三相非线性数学模型,虽然此数学模型从现在的研究结果看尚有不足之处,但是也充分表明对电力系统谐振机理的研究必须在高维相空间中进行. 近来基频谐振的机理及其消除途径已经取得突破性进展. 由上述分析表明,非同期合闸产生过电压本质上受到非线性与时滞双重因素的制约,所以要准确地反映电力系统中非同期合闸产生过电压机理,必须建立具有时滞的非线性数学模型并以此来剖析非同期合闸产生过电压的机理.

利用某种电路来分析合闸的情况. 先合上开关 A,开关 B 和 C 分别滞后时间 τ_1, τ_2 再合上,根据文献[13],得到下列无量纲化具时滞的数学模型:

$$\ddot{\phi}_i(t) + (k + a + nb\phi_i^{n-1}(t))\dot{\phi}_i(t) + k(a\phi_i(t) + b\phi_i^n(t)) + W = E\cos\left[t - (i-1)\frac{2}{3}\pi\right] \tag{13}$$

式中,$i = 1,2,3$ 且 $W = \beta a\left[\sum_{i=1}^{3}\phi_i(t) + \sum_{i=1}^{2}\phi_i(t-\omega\tau_i)\right] + \beta b\left[\sum_{i=1}^{3}\phi_i^n(t) + \sum_{i=1}^{2}\phi_i^n(t-\omega\tau_i)\right]$ 其中,$k, a, b, \omega, E, \tau_i (i = 1,2)$ 均是正常数,$n \geq 3$ 为一奇正整数,$0 < k + a \ll 1$,$0 < b \ll 1$. 为了理论分析方便,考虑在 $i = 1$ 下的情形,即考虑

$$\ddot{x}(t) + (k + a + nbx^{n-1}(t))\dot{x}(t) + (k + \beta)(ax(t) + bx^n(t)) + \beta ax(t-\omega\tau) + \beta bx^n(t-\omega\tau) = E\cos t \tag{14}$$

作下列坐标变换:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{b}y_1 \\ \dot{x} = y_2 + by_1 - b^{1-n}y_1^{\,n} \end{cases}$$

可得下列 1 阶微分系统:

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= b(by_1(t) + y_2(t) - b^{1-n}y_1^{\,n}(t)) \\ \dot{y}_2(t) &= E\cos t - b\left(k + a + b^2 + \frac{ak + a\beta}{b^2}\right)y_1(t) - b\left(b + \frac{a+k}{b}\right)y_2(t) - \\ &\quad \frac{a\beta}{b}y_1(t-\omega\tau) - \beta b^{1-n}y_1^{\,n}(t-\omega\tau) - (\beta b^{1-n} - ab^{1-n} - b^{3-n})y_1^{\,n}(t) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

利用定理 1,平均化系统(15) 具下列形式:

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= b(bz_1(t) + z_2(t) - b^{1-n}z_1^{\,n}(t)) \\ \dot{z}_2(t) &= -b\left(k + a + b^2 + \frac{ak + a\beta}{b^2}\right)z_1(t) - b\left(b + \frac{a+k}{b}\right)z_2(t) - \\ &\quad \frac{a\beta}{b}z_1(t-\omega\tau) - \beta b^{1-n}z_1^{\,n}(t-\omega\tau) - (\beta b^{1-n} - ab^{1-n} - b^{3-n})z_1^{\,n}(t) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

在 τ 充分小的前提下,在 $\tau = 0$ 附近,对系统(16) 线性化分析表明,其特征方程的特征值为

$$\lambda_i = \frac{-(k+a) \pm \sqrt{(k-a)^2 - 8a\beta}}{2} \qquad i = 1,2$$

利用采样数据 $k = 0.003\,27$, $a = 0.003\,565$, $n = 9$, $b = 0.000\,231\,9$, $\beta = 10.787\,429$, $\omega = 314$,代入特征值关系式可得 $\lambda_i = -0.003\,417\,5 \pm 0.277\,34\mathrm{j}$,其中 $i = 1,2$; $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$,易见此时系统是稳定的.

鉴于非同期合闸产生过电压机理的复杂性,20 世纪 80 年代后期,就有学者在考虑同期合闸问题时在系统中引进控制变量,这样可以利用控制理论来进一步分析. 但是由于非线性系统自身的复杂程度以及该问题中存在高阶的以及耦合项的变量,所以未取得实质性进展.

为进一步考虑非同期合闸产生过电压模型的稳定性,对系统(14) 引进前向控制 $u(t) = -k_0x(t) -$

$k_p x(t-\omega\tau)$,这样系统(14)化为下列形式:

$$\ddot{x}(t)+(k+a+nbx^{n-1}(t))\dot{x}(t)+(k+\beta)(ax(t)+bx^n(t))+\beta ax(t-\omega\tau)+\beta bx^n(t-\omega\tau)+u(t)=0 \tag{17}$$

类似于系统(16)的形式如下:

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}_1(t)&=b(by_1(t)+y_2(t)-b^{1-n}y_1{}^n(t))\\ \dot{y}_2(t)&=-b\left(k+a+b^2+\frac{ak+k_0+a\beta}{b^2}\right)y_1(t)-b\left(b+\frac{a+k}{b}\right)y_2(t)-\\ &\quad\frac{a\beta+k_p}{b}y_1(t-\omega\tau)-\beta b^{1-n}y_1{}^n(t-\omega\tau)-(\beta b^{1-n}-ab^{1-n}-b^{3-n})y_1{}^n(t)\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

在 τ 充分小的前提下,对系统(18)的线性分析表明在比例增益量 k_0 和 k_p 均是非负的条件下,系统是稳定的.与文献[12,13]比较,得出这样的结果不仅方法上容易,而且结论的条件也简单.

限于篇幅,具体数值计算的结果在另文中给出.实际上,非线性系统考虑到时滞因素的影响,理论上和数值计算上仍有很多困难,尽管时滞量可以局限在 $O(\varepsilon)$ 的范围内,甚至于更小.所以,早期人们认为时滞对系统的影响不太重要的观点是错误的,也是与实际不相符的.

参考文献(References)

[1] Halanay A. The method of averaging in equations with retardation[J]. *Rev Math Pur Appl Acad R P R*, 1959, **4**:467－483.

[2] Hale J K. Averaging methods for differential equations with retarded arguments with small parameter[J]. *Journal of Differential Equations*, 1966, **2**:57－73.

[3] Magnus W, Winkler S. *Hill's equation*, *Vol*. 20 *of tracts in mathematics*[M]. New York: Inter-science Publishers, 1966. 386－409.

[4] Arnol'd V I. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, *Vol*. 250 *of a series of comprehensive studies in mathematics*. 2nd ed[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988. 218－227.

[5] Bogoliubov N N, Mitroposky Y A. Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillators[A]. In: *International Monographs on Advanced Mathematics and Physics*[C]. New York: Gordon and Breach Science Publishers Inc, 1961. 307－409.

[6] Arnol'd V I. *Mathematical methods of classical mechanics*, *Vol*. 60 *of graduate texts in mathematics*[M]. New York: Springer-Verlag, 1989. 1107－1203.

[7] Guckenheimer J, Holmes P. *Nonlinear oscillations*, *dynamical systems and bifurcations of vector fields*, *Vol*. 42, *applied mathematical sciences*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1983. 2034－2056.

[8] Hale J K. *Ordinary differential equations*, *texts and monographs in pure and applied mathematics*[M]. Malabar, FL: Robert E. Krieger Publishing, 1969. 147－158.

[9] Baillieul J, Lehman B. *Open-loop control using oscillatory inputs*, *the control handbook*[M]. Orlando: CRC Press, 1995. 1311－1327.

[10] Seto D, Baillieul J. Control problems in superarticulated mechanical systems[J]. *IEEE Trans Autom Contr*, 1994, **39**(12):1214－1220.

[11] Baillieul J, Dahlgren S, Lehman B. Nonlinear control designs for systems with bifurcations and applications to stabilization and control of compressors[A]. In: *Proceedings of the* 1995 *Conference on Decision and Control*[C]. New Orleans, 1995. 3062－3067.

[12] Ji Guojun, Wang Zhengxian. The functional differential equations appeared in overvoltage[A]. In: *Proc Proceedings of the International Conference on F. D. E*[C]. Guangzhou, China, 1994. 132－138.

[13] Ji Guojun, Song Wenzhong. Discussion to the overvoltage models during circuit opened under the asynchronous closing in power systems [J]. *J Act Math Sinica*, 1999, **22**:438－445.

[14] Lehman B, Lunei S V, Bentsman J, et al. Vibrational control of nonlinear time lag systems with bounded delay: averaging theory, stabilization and transient behavior[J]. *IEEE Trans Autom Contr*, 1994, **AC-39**: 898－912.

[15] Lehman B, Kolmanovskii V B. Extensions of classical averaging techniques to delay differential equations[A]. In: *Proc 33rd IEEE Con Dec Contr*[C]. Paris, 1994. 411－416.