SUR LES MESURES INVARIANTES

DE CERTAINES CHAINES DE MARKOV

DEFINIES PAR DES TRANSFORMATIONS HOMOGRAPHIQUES

par Y. GUIVARC'H et A. RAUGI

La construction de mesures du type de Cantor sur un intervalle peut être rattachée à l'étude de certaines chaines de Markov définies comme barycentres de transformations de la forme $y = ax + b$. De telles mesures apparaissent, dans le cas d'un rapport constant de dissection $\rho > 1$ et de l'intervalle $[-\frac{1}{1-\rho}, \frac{1}{1-\rho}]$, comme lois de variables aléatoires de la forme $z(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \rho_i$ où les ε_i sont des variables indépendantes prenant les valeurs ± 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$. Si l'on considère une suite (s) d'homothéties g_i définies par $g_i \cdot x = a_i x + b_i$, le nombre $g_1 \cdot \ldots g_n \cdot o$ n'est autre que $\sum_{i=1}^{i=n} a_1 \ldots a_{i-1} b_i$ et, s'il y a convergence vers $z(s)$, on aura la relation $g_1 \cdot z(\theta s) = z(s)$ où θs est la suite translatée de s. En particulier, si les $g_i(\omega)$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi p , la loi ν de $z[s(\omega)] = z(\omega)$ vérifiera l'équation de convolution $p * \nu = \int g \cdot \delta_x \, dp(g) \, d\nu(x) = \nu$.

En ce cas, la mesure ν est stationnaire pour la chaine de Markov sur la droite de noyau de transition

$$P(x,\cdot) = \int g \cdot \delta_x \, dp(g) = p * \delta_x$$

En particulier si p est concentrée, avec probabilités $\frac{1}{2}$ sur les deux homothéties $g(x) = \rho\, x \pm 1$, la mesure ν sera celle envisagée au début.

On peut evisager plus généralement des chaines de Markov "barycentres de transformations projectives" dont le noyau de transition est défini par

$$P(x,\cdot) = \int g \cdot \delta_x \, dp(g) = p * \delta_x$$

où x est un point de la droite projective B et p une mesure de probabilité concentrée sur le groupe projectif qui sera identifié au groupe de matrices (2,2) de déterminant ±1. De telles transformations $g\cdot x = \frac{ax+b}{cx+d}$ apparaissent dans l'étude des fractions continues.

On peut se demander si, comme dans le cas des mesures du type de Cantor, les fonctions de répartition des mesures stationnaires de ces chaines satisfont des conditions de Lipchitz. On donne ici une réponse partielle montrant que, de façon très générale, une condition de Lipchitz logarithmique est satisfaite. En fait, l'argument développé s'étend à l'action d'un groupe semi-simple sur sa frontière maximale [3] .

Le résultat obtenu permet par exemple de préciser les théorèmes limites de [1] pour les produits de matrices aléatoires (voir l'article des mêmes auteurs dans le même volume). On donne ici l'argument essentiel dans le cadre simplifié des matrices (2,2).

La mesure de probabilité p sera ici supposée portée par un compact S du groupe $Sl(2,\mathbb{R})$ des matrices de déterminant 1 ; on supposera aussi que S ne laisse pas de produit scalaire invariant et ne permute pas un ensemble fini de droites.

Dans ces conditions, il existe [2] sur la droite projective B une unique mesure de probabilité ν qui vérifie l'équation de convolution $p * \nu = \nu$.

On va voir que ν est de potentiel logarithmique fini, c'est-à-dire que, si un point de B est assimilé à un vecteur unitaire $x \in \mathbb{R}^2$ d'angle polaire θ , on a

$$\int -\log|\operatorname{Sin}\theta|\, d\nu(\theta) < +\infty$$

Introduisons, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, des représentations $\rho_\lambda(g)$ de G dans les mesures ou les fonctions sur B par

$$\rho_\lambda(g)\,[\delta_x] = \|gx\|^{-2\lambda}\,\delta_{g.x}$$

$$\rho_\lambda(g)[\varphi]\,(x) = \|g^{-1}x\|^{-2\lambda}\,\varphi(g^{-1}x)$$

où x est unitaire et $g\cdot x = \frac{gx}{\|gx\|}$.

Observons que si m est la mesure de Haar sur B, on a $\frac{dg^{-1}m}{dm}(x) = \|gx\|^{-2}$.

Soit w la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et χ le noyau défini par le produit scalaire

$$\chi^{-1}(x,y) = |\langle x,wy\rangle|^{2} = \sin^2(x,y) \quad .$$

Les λ-potentiels de Riesz χ^λ sont alors définis par $\chi^\lambda(x,y) = \sin^{-2\lambda}(x,y)$.
Un résultat essentiel de [4] est que, pour un certain ε, il existe si λ est petit une fonction ε-Lipchitzienne positive ψ_λ telle que

$$\rho_\lambda(p)\ [\psi_\lambda] = k(\lambda)\ \psi_\lambda .$$

Si $e \in B$, ψ_λ est uniquement déterminée par la condition supplémentaire $\psi_\lambda(e)=1$ et elle dépend alors analytiquement de λ.

Si ν_λ est une probabilité vérifiant pour $\check{p}$, symétrique de p : $\rho_\lambda(\check{p})[\nu_\lambda] = \rho(\lambda)\ \nu_\lambda$ on a de manière évidente :

$$k(\lambda)<\psi_\lambda , \nu_\lambda> = <\rho_\lambda(\check{p})[\psi_\lambda] , \nu_\lambda> = \rho(\lambda) <\psi_\lambda , \nu_\lambda>$$

et $\rho(\lambda) = k(\lambda)$.

L'existence de ν_λ résulte du théorème de point fixe de Schauder-Tychonoff.

Lemme

Soit ν une mesure sur B et φ son λ-potentiel. Alors, pour tout $g \in G$, la fonction $\rho_\lambda(g)[\varphi]$ est le λ-potentiel de la mesure $\rho_\lambda(g)[\nu]$.

Preuve

Il suffit de traiter le cas de $\nu = \delta_x$ et alors tout se ramène à voir que

$$\|gx\|^2\ \chi^{-1}(g\cdot x,y) = \|g^{-1}y\|^2\ \chi^{-1}(x,g^{-1}\cdot y|$$

Or, par définition de χ, le premier membre vaut $|<gx,wy>|^2$

$$|<gx,wy>|^2 = |<x,g^t wy>|^2 = |<x,w(w^{-1}g^t w)y>|^2.$$

Comme $w^{-1}g^t w = g^{-1}$, ceci vaut $|<x,wg^{-1}\cdot y>|^2$ soit $\|g^{-1}y\|^2\ |<x,wg^{-1}\cdot y>|^2$.

Proposition 1

Soit ν_λ une probabilité sur B vérifiant $\rho_\lambda(p)[\nu_\lambda] = c(\lambda)\ \nu_\lambda$. Alors son λ-potentiel φ_λ vérifie (partout) $\rho_\lambda(p)[\varphi_\lambda] = c(\lambda)\,\varphi_\lambda$ et il est fini pour λ assez petit.

Preuve

La première assertion découle du lemme.
Montrons que φ_λ est colinéaire à ψ_λ définie au début, pour λ petit.

Pour $\lambda < \frac{1}{2}$, χ^{λ} est m-intégrable en chaque variable et donc φ_λ est fini m-presque partout. Posons $h_\lambda = \varphi_\lambda / \psi_\lambda$ et réécrivons l'équation satisfaite par φ_λ :

$$\forall\, x \in B \quad \frac{c(\lambda)}{k(\lambda)}\; h_\lambda(x) = \int h_\lambda(g^{-1}x)\, \frac{\psi_\lambda(g^{-1}x)}{k(\lambda)\psi_\lambda(x)}\, dp(g)$$

Puisque h_λ est, comme φ_λ, semi-continue inférieurement, elle atteint sa borne inférieure en un point $x_o \in B$ et :

$$+\infty > \frac{c(\lambda)}{k(\lambda)}\; h_\lambda(x_o) \;\geq\; h_\lambda(x_o) \int \frac{\psi_\lambda(g^{-1}x_o)}{k(\lambda)\psi_\lambda(x_o)}\, dp(g) \;=\; h_\lambda(x_o)$$

par définition de ψ_λ .

D'où $c(\lambda) \leq k(\lambda)$. Les remarques initiales et le remplacement de p par $\check{p}$ donnent l'égalité. Si l'on reprend alors l'équation vérifiée par h_λ , la stricte positivité de $\frac{\psi_\lambda(g^{-1}x_o)}{k(\lambda)\psi_\lambda(x_o)}$ donne :

p-presque partout : $h_\lambda(g^{-1}x_o) = h_\lambda(x_o)$.

Puisque l'orbite de x_o sous le semi-groupe engendré par x_o est dense dans B, on obtient, par semi-continuité : $h_\lambda(x) \leq h_\lambda(x_o)$ $\forall\, x \in B$ et donc $h_\lambda(x) = \text{cte}$.
Donc φ_λ est finie partout, comme ψ_λ .

<u>Proposition 2</u>

Soit ν *la mesure* p-*invariante sur* B ($p * \nu = \nu$). *Elle est de potentiel logarithmique fini :* $0 < \int \log \chi(x,y)\, d\nu(y) < +\infty$.

<u>Preuve</u>

Observons que, pour $\lambda > 0$: $0 < \log \chi \leq \frac{\chi^{\lambda} - 1}{\lambda}$

et donc : $\int_B \log \chi(x,y)\, d\nu_\lambda(g) \leq \frac{\lambda(x) - 1}{\lambda}$

D'après la proposition précédente φ_λ s'écrit $\varphi_\lambda(x) = a(\lambda)\, \psi_\lambda(x)$ où $a(\lambda)$ est déterminée par

$$\int_B \varphi_\lambda(x)\, dm(x) = a(\lambda) \int_B \psi_\lambda(x)\, dm(x)$$

La première intégrale vaut :

$$\int_B \chi^{\lambda}(x,y)\ dm(y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin\theta|^{-2\lambda} d\theta$$

et c'est une fonction C^{∞} de λ , pour λ petit.

Comme il en est de même de $\int_B \psi_{\lambda}(x)\ dm(x)$, on en déduit que $\frac{\lambda(x)-1}{\lambda}$ a pour limite quand $\lambda \to 0$: $a'(0) + \frac{\partial}{\partial x} \psi_{\lambda}(x)$.

La convergence de ν_{λ} vers ν et la positivité de $\log \chi$ donnent :

$$\int_B \log \chi(x,y)\ d\nu(y) \leq \lim_{\lambda \to 0} \frac{\psi_{\lambda}(x)-1}{\lambda} < +\infty \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. FURSTENBERG : "Non commuting random products "
T.A.M.S. vol 108 (1963) p. 337-428.

[2] H. FURSTENBERG : "Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces"
Proc. Symp. Pure Math. vol 26 p. 193-229.

[3] Y. GUIVARC'H et A. RAUGI : "Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence"
à paraître.

[4] E. Le Page : "Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires"
C.R.A.S. t 292 (8 février 1981) p. 327-329.