Revue d'Histoire des Mathématiques

Le tout est-il toujours plus grand que la partie ?

Klaus Volkert

Tome 16 Fascicule 2 2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Ministère de la culture et de la communication (DGLFLF) et du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Secrétariat :

Nathalie Christiaën
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96
Mél : revues@smf.ens.fr / URL : http//smf.emath.fr/

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs 2010 : prix public Europe : 66 €; prix public hors Europe : 75 €;
prix au numéro : 38 €.
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

Maquette couverture : Armelle Stosskopf

Revue d'histoire des mathématiques
16 (2010), p. 287–306

LE TOUT EST-IL TOUJOURS PLUS GRAND QUE LA PARTIE ?

KLAUS VOLKERT

RÉSUMÉ. — On étudie quelques étapes du développement du huitième axiome d'Euclide (« Le tout est plus grand que la partie ») pendant le XIX^{e} et le XX^{e} siècle. L'histoire de cet axiome est liée, d'une part, au problème de la définition de la notion alors fondamentale de « grandeur » et, d'autre part, au problème de la définition de la notion d'« aire d'un polygone ».

ABSTRACT (Is the whole always greater than its part?)— We study some steps of the development of Euclid's axiom no. 8 ("The whole is greater then its part") during the 19th and the 20th century. The history of this axiom is closely related to the problem of defining the then basic notion of a magnitude on one hand and to the problem of defining the notion of the area of a polygon on the other.

« On a vu au mot AXIOME de quelle inutilité ces sortes de principes sont dans toutes les sciences ; il est donc très-à-propos de les supprimer dans les éléments de géométrie, quoiqu'il n'y en ait presque point où on ne les voie paroître encore. Quel besoin

Texte reçu le 12 avril 2007, révisé le 22 septembre 2008, accepté le 8 mars 2010.

K. VOLKERT, AG Didaktik der Mathematik, Bergische Universität Wuppertal, Gaußstraße 20, 42097 Wuppertal ; Archives Henri Poincaré, Université Nancy 2, LPHS (UMR 7117), 23, bd. Albert I, B.P. 3397, F-54015 Nancy.
Courrier électronique : klaus.volkert@math.uni-wuppertal.de

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55, 01A60, 51-03.
Mots clefs : Aire et axiomes de géométrie.
Key words and phrases. — Area and axioms of geometry.

a-t-on des axiomes sur le tout et sur la partie, pour voir que la moitié d'une ligne est plus petite que la ligne entière ? »[1]

INTRODUCTION

Lorsque l'on se demande quelle était la base des mathématiques classiques (celles d'Euclide, jusqu'au milieu du XIX^e siècle), on est renvoyé tout de suite à la notion de « grandeur ». Dès le début des *Éléments* d'Euclide, les grandeurs sont un grand thème des « notions communes » :

> « 1. *Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.*
> 2. *Et si, à deux choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.*
> 3. *Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.* » [Euclide 1990, p. 178].

Dans ces notions communes, nous apprenons que l'on peut ajouter et retrancher des grandeurs à d'autres et que l'on peut les comparer — les grandeurs sont donc susceptibles d'être l'objet d'un calcul (qui est pour Euclide un calcul non numérique[2]). Il est présupposé par Euclide que les grandeurs sont classées par leur propre nature en des espèces — appelées des grandeurs homogènes. Ce point important n'est pas explicité jusqu'au début du cinquième livre (définition 5). Des exemples concrets sont fournis par les segments, les angles, les aires et les volumes — chaque classe désignant une espèce homogène. Dans une telle classe, on peut comparer deux grandeurs (par exemple deux segments) selon leur « grandeur », c'est-à-dire par leur rapport en analogie, on peut les ajouter et l'on peut retrancher une grandeur d'une autre qui est plus grande. Il y a aussi une sorte de multiplication — c'est le produit d'un nombre entier positif par une grandeur, défini comme une addition itérée.

La liste des notions communes — on en compte neuf chez Vitrac — contient la phrase suivante :

> « 8. *Et le tout est plus grand que la partie.* »

---

1 Article « Géométrie » signé O (c'est-à-dire d'Alembert) dans l'[Enc 1784, vol. II, p. 136].

2 Cf. la discussion de ce point par Vitrac [Euclide 1990, p. 179]

Dans cet article, nous allons étudier l'histoire d'un cas spécial de cette notion commune — celui des aires —, quelquefois appelé « axiome de De Zolt » en référence au mathématicien italien A. De Zolt (1881). Nous commençons par quelques remarques concernant le premier livre des *Éléments*, le but étant de comprendre l'idée de grandeur chez Euclide et d'identifier l'usage qu'il fait de l'axiome 8 ; un tel retour est nécessaire parce que la théorie d'Euclide a servi de référence jusqu'à la fin du XIXe siècle. Nous allons nous concentrer sur le cas des aires des polygones plans. C'est le cas le plus simple qui ne soit pas trivial [3]. Notre choix est aussi justifié par l'histoire, car c'est exactement le cas des aires des polygones plans qui a été au XIXe siècle le point de départ d'un travail critique dans le contexte du mouvement axiomatique. Un événement important fut notamment la parution des *Fondements de la géométrie* de Hilbert (1899/1900), où le problème des aires des polygones joue un rôle clef (cf. § 3). Notre travail portera donc principalement sur la seconde moitié du XIXe et le début du XXe siècle ; nous ne nous proposons pas de fournir une étude complète des périodes antérieures.

Remerciements

Jean-Pierre Friedelmeyer, Philippe Nabonnand, Dominique Tournès et les rapporteurs anonymes m'ont assisté pour la rédaction de ce texte. Je les en remercie chaleureusement.

1. LES AIRES DANS LES *ÉLÉMENTS*

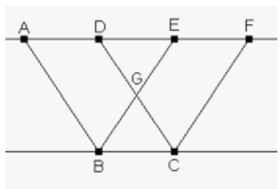
La notion d'aire n'est pas définie par Euclide de manière explicite. Elle apparaît pour la première fois dans la proposition 35 du premier livre :

---

3 Comme celui des segments. Par contre, le cas des volumes est trop compliqué pour une analyse par les méthodes proposées dans ce qui suit. Le résultat de Max Dehn (1900) montre qu'il y a des pyramides de volumes égaux qui ne sont pas équidécomposables (pour une définition de cette notion, cf. § 1). Euclide lui-même a entrepris quelques tentatives dans cette direction dans le onzième livre des *Éléments*, cf. XI, 28-31 [Euclide 2001, p. 179-200].

« *Les parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.* » [4]

Il est évident qu'« être égal » veut dire ici « avoir même aire » (et non pas « être congruent »). Dans sa démonstration Euclide ne considère que la situation suivante :

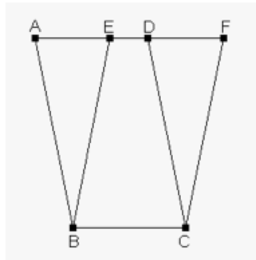


Les triangles ABE et DCF sont congruents (parce que AE est congruent à DF), donc « égaux » (en aire). On leur retranche le triangle DGE ; par la notion commune n° 3 les restes — c'est-à-dire les trapèzes [5] $ABGD$ et $EGCF$ — sont « égaux ». Maintenant on ajoute aux deux trapèzes le triangle GBC et on obtient les parallélogrammes $ABCD$ et $EBCF$, qui sont « égaux » par la notion commune n° 2.

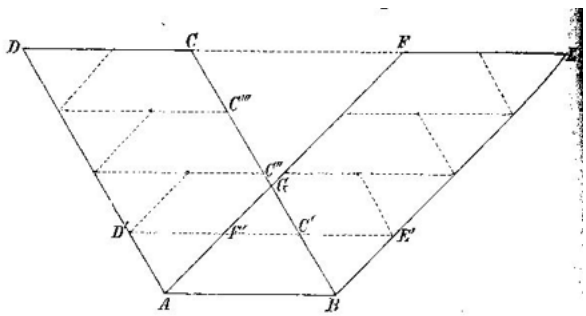
La méthode appliquée ici par Euclide est une combinaison d'addition et de soustraction. Mais il existe d'autres situations où il faut modifier un peu cette méthode :

[4] On peut noter aussi qu'Euclide n'a pas encore défini la notion de « parallélogramme » ; parmi les définitions du premier livre on trouve seulement (outre celles du carré, du losange et du rectangle) la notion de « rhomboide » - un quadrilatère « *... qui a les côtés et les angles opposés égaux les uns aux autres mais qui n'est ni équilatéral, ni rectangulaire ...* » (définition 22 [Euclide 1990, p. 164]). Les propriétés usuelles du parallélogramme sont établies par Euclide dans les propositions 33 et 34 du premier livre.

[5] Suivant le sens moderne du mot. Euclide utilise la notion de « trapèze » dans le sens de quadrilatère général « *et que l'on appelle trapèzes les quadrilatères autres que ceux-là.* » (définition 22 [Euclide 1990, p. 164]).



Dans ce cas, on a une partie commune — le trapèze commun *EBCD* — et deux triangles congruents : *ABE* et *DCF*. Par conséquent les deux parallélogrammes *ABCD* et *EBCF* sont composés de parties congruentes (un triangle plus le trapèze). En langage contemporain, on les dit « équidécomposables » [6]. Il n'est pas difficile de généraliser cette idée au cas discuté par Euclide, ainsi que le suggère la figure suivante [Stolz 1885, p. 75] [7] :



D'un point de vue méthodologique, cette dernière démonstration possède l'avantage de n'utiliser que la seule idée de la subdivision en parties congruentes. Mais il y a un problème : cette démonstration repose sur le fait que l'on peut subdiviser un segment donné en un nombre quelconque

6 Un terme introduit par Hilbert dans les éditions postérieures à la quatrième édition de ses *Fondements de la géométrie* ; on parle aussi de la « multi-congruence » ou de l'« égalité finie » (pour mettre l'accent sur le fait qu'on n'utilise qu'un nombre fini de pièces, en opposition à l'exhaustion). Pour les détails mathématiques on peut consulter [Hartshorne 2000, p. 195-221].

7 Pour arriver à cette décomposition, on subdivise la hauteur des parallélogrammes en un nombre fini de segments de même longueur, cette longueur étant plus petite que la distance du point d'intersection G à la base AB. On trace ensuite des parallèles à la base AB et aux côtés AD et AF. L'idée est déjà décrite littéralement par Duhamel [1866, p. 447-448].

de parties de même longueur. D'un point de vue moderne, c'est équivalent à l'archimédicité des segments [8].

La théorie des aires [9] fut reprise au début du XIX^e^ siècle par plusieurs auteurs [Volkert 1999]. Un lieutenant prussien, Paul Gerwien, a publié deux articles dans le *Journal de Crelle* en 1833, intitulés « Dissection d'un nombre quelconque de figures rectilignes égales en des parties égales » et « Dissection d'un ensemble quelconque de figures de différentes formes mais de même contenu sur la sphère en des parties égales » [10]. Dans ses deux articles, Gerwien a donné une étude systématique de l'équidécomposabilité dans le plan et sur la sphère. Dans les deux cas, il démontre le résultat suivant :

Deux polygones sont de même mesure si, et seulement si, ils sont équidécomposables.

Il en conclut :

> « *Le présent mémoire montre qu'on peut définir l'égalité des figures rectilignes de la manière suivante : des figures égales sont celles qui sont composées des mêmes parties.* » [11]

C'est presque une définition rigoureuse de la notion d'aire ! Il manque encore le passage de la relation « être équidécomposable » aux classes d'équivalence selon cette relation — Gerwien savait sûrement que la relation « être équidécomposable » est une relation d'équivalence (pour utiliser le terme moderne) mais il n'était pas encore prêt à considérer les classes elles-mêmes comme de nouveaux objets.

8 C'est-à-dire : si le segment a est plus petit que le segment b alors il existe un entier n tel que $na > b$. Parce que Hilbert voulait développer une théorie des aires sans l'archimédicité, il était obligé de retourner au procédé mixte d'Euclide, c'est à dire d'utiliser aussi l'équicomplémentarité ; pour les détails mathématiques on peut consulter à nouveau [Hartshorne 2000] ; l'histoire est traitée dans [Volkert 1999].

9 C'est-à-dire dans le sens d'équidécomposabilité, et non pas dans le sens d'une mesure (association d'un nombre réel positif à chaque polygone selon certains règles d'additivité).

10 « Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke », « Zerschneidung jeder beliebigen Menge verschieden gestalteter Figuren von gleichem Inhalt auf der Kugeloberfläche in dieselben Stücke ». Pour les détails mathématiques de ces travaux remarquables on peut consulter [Volkert 1999].

11 « Aus der voranstehenden Abhandlung geht hervor, daß sich die Gleichheit der geradlinigen Figuren folgendermaßen definiren läßt : Gleiche Figuren sind diejenigen, welche von denselben Stücken gebildet werden » [Gerwien 1833a, p. 234].

Il est fort remarquable que Gerwien ait démontré le même résultat pour la sphère dans son second mémoire. Sur la sphère, les figures — qui sont toujours des polygones — sont mesurées par l'excès, c'est-à-dire par la différence de la somme des angles de la figure et d'un multiple [12] de π. En faisant cela, Gerwien démontre qu'il a bien compris que sa théorie des aires (basée sur l'idée d'équidécomposabilité) ne repose que sur la théorie de la congruence, complétée par les faits les plus simples exprimés aujourd'hui par les axiomes d'incidence et d'ordre [13]. Par conséquent, elle peut se généraliser à chaque géométrie qui ne se distingue pas de la géométrie euclidienne au niveau de l'incidence, de l'ordre et de la congruence. C'est presque une compréhension structurelle !

Hilbert a donné un exposé rigoureux de la théorie des aires des polygones dans ses *Fondements de la géométrie*. Entre 1870 et 1900, on trouve beaucoup de travaux consacrés à des questions de la théorie de l'équidécomposabilité. Cette théorie était intéressante du point de vue des fondements de la géométrie parce qu'elle évitait tous les processus infinis. De plus, elle fournissait un exemple de grandeur qui n'était ni trop simple (comme les segments et les angles), ni trop compliquée (comme les volumes).

2. QUELQUES REMARQUES SUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA THÉORIE DES GRANDEURS APRÈS EUCLIDE

Les discussions sur le rôle du postulat (ou de l'axiome, ou de la demande) dit « des parallèles » dans l'histoire de la géométrie sont bien connues. On cherchait notamment à savoir si cet axiome est un véritable axiome ou non — c'est-à-dire si l'on peut en donner une démonstration ou non. L'axiome qui est le thème de cet article n'a pas provoqué un tel

12 Ce nombre dépend du nombre des sommets du polygone ; pour les quadrilatères il est égal à 2.

13 Il faut ajouter l'archimédicité — un axiome de continuité dans le langage de Hilbert. Par conséquent, la théorie de l'équidécomposabilité selon Gerwien n'est pas élémentaire dans le sens de Hilbert.

intérêt ; il semble que l'énoncé « *Le tout est plus grand que la partie* » fut longtemps considéré comme un énoncé vraiment évident [14].

Dans l'histoire des mathématiques, on rencontre l'axiome n° 8 à plusieurs reprises. Wallis en parle dans son discours bien connu sur la démonstration du postulat des parallèles (1663). Tout au début de ce discours, il discute l'idée d'axiome et dit :

> « *Même chez Euclide on trouve à côté des hypothèses explicitement formulées (…), d'autres hypothèses, qui sont évidentes soit par la perception des figures soit pour d'autres raisons et qu'on ne peut nullement mettre en doute. Une telle hypothèse (qui se trouve partout) est que le tout est la somme de ses parties …* » (traduit d'après [Stäckel & Engel 1895, p. 29]).

Dans l'*Encyclopédie Méthodique Mathématiques* d'Alembert écrit :

> « *AXIOME, s. m. En Mathématique, on appelle axiomes des propositions évidentes par elles-mêmes, &, qui n'ont pas besoin de démonstrations. Telles sont les propositions suivantes : le tout est plus grand que sa partie ; si à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs égales, les sommes seront égales ; si deux figures étant appliquées l'une sur l'autre se couvrent parfaitement, ces deux figures sont égales en tout.* » [Enc 1784, vol. I, p. 204]

On reconnaît ici la liste des notions communes d'Euclide.

Les idées de d'Alembert sur les grandeurs sont aussi intéressantes pour nous.

> « *Voilà un de ces mots dont tout le monde croit avoir une idée nette & qu'il est pourtant assez difficile de bien définir. Ne seroit-ce pas parce que l'idée que ce mot renferme est plus simple que les idées par lesquelles on peut entreprendre de l'expliquer ? …*
>
> *La grandeur & ses propriétés sont l'objet des Mathématiques, ce qui sera expliqué plus au long à l'article MATHÉMATIQUES.* » [Enc 1784, vol. II, p. 149]

Même au début du XIX^e siècle la situation n'a pas beaucoup changé. Dans les *Éléments de géométrie* de A.-M. Legendre (1^re édition 1794 ; je cite selon la 11^e de 1817) on ne trouve que peu d'axiomes (au total il n'y en a que cinq). Parmi ceux-ci :

> « 2. *Le tout est plus grand que sa partie.* 3. *Le tout est égal à la somme des parties en lesquelles il a été divisé.* » [Legendre 1817, p. 6].

---

[14] Une variante qu'on trouve souvent est : Le tout est la somme de ses parties — une formule qui place l'axiome plus près de l'arithmétique.

Legendre proposait de distinguer l'idée de congruence (il parle dans ce cas d'égalité) de l'idée d'avoir même aire (ici Legendre proposait le terme « équivalence » [Legendre 1817, note I, p. 275-279]). Pour « l'Euclide du XIX^{e} siècle », il y avait en plus l'égalité par symétrie. Ces définitions montrent une sensibilité accrue envers les relations — une acquisition importante du XIX^{e} siècle. La notion de surface ou d'aire est définie par S. Lacroix [15] comme suit :

> « *Par la surface d'une figure quelconque, on entend la portion d'étendue renfermée entre les lignes qui terminent cette figure. On appelle aussi cette étendue l'aire de la figure* » [Lacroix 1819, p. 109].

En somme on peut constater que le statut de l'axiome n^{o} 8 n'est pas mis en doute, ni par Legendre, ni par Lacroix, ni par la plupart des éditeurs d'Euclide de cette époque.

En 1866, on rencontre une première discussion critique de notre problème. Elle se trouve dans l'ouvrage *Des méthodes dans les sciences de raisonnement* écrit par J.-H.-C. Duhamel — un ouvrage d'épistémologie presque oublié aujourd'hui, qui s'occupe des fondements des mathématiques en relation avec les sciences. Duhamel défend l'idée que le huitième axiome est un énoncé analytique, c'est-à-dire une tautologie qui n'exprime que les conventions de notre langage :

> « *Ainsi, d'après le sens que nous attachons aux mots* tout, partie, plus grand, plus petit, *on voit qu'un tout est plus grand qu'une de ses parties, ou que la partie est plus petite que le tout. C'est donc à tort qu'on fait de cette proposition un axiome fondamental que quelques auteurs des Traités de Géométrie demandent qu'on admette comme évident, et placent au milieu de leurs postulata ou vérités indémontrables. Cette méprise, un peu*

15 Legendre en donne la définition suivante : « *L'aire ou la surface d'une figure sont des termes à-peu-près synonymes. L'aire désigne plus particulièrement la quantité superficielle de la figure en tant qu'elle est mesurée ou comparée à d'autres surfaces.* » [Legendre 1817, p. 61] Il ne faut pas confondre « surface de » avec « surface » qui est définie comme « *ce qui a longueur et largeur, sans hauteur ou épaisseur.* » [Legendre 1817, p. 1]. À peu près la même définition est donnée par Euclide (définition 5 du premier livre).
En 1865 Möbius définit l'aire d'un polygone comme suit : « *Un polygone ordinaire plan sépare par son périmètre une partie du plan duquel il fait partie. Cette partie est appelée son aire* ... » [Möbius 1866, p. 485].

forte il est vrai, consiste à prendre pour une vérité de sentiment ce qui n'est qu'une vérité de définition » [16] [Duhamel 1866, p. 7].

On comprend bien la stratégie de Duhamel : il veut nous convaincre que l'axiome n° 8 est une conséquence analytique des définitions choisies. Mais il n'avance aucun argument.

Un peu plus de trente ans plus tard, Hilbert donne une solution à notre problème. Dans ses *Fondements de la géométrie*, il fonde sa théorie des aires des polygones sur l'équicomplémentarité [17] (y compris, comme cas spécial, l'équidécomposabilité). Il pose le problème : « *Est-il possible que tous les polygones soient équicomplémentables ?* » [Hilbert 1972, p. 74] Si la réponse à cette question est positive, la théorie hilbertienne des aires ne vaut rien ! Pour démontrer que la réponse est négative, il faut montrer la proposition suivante : deux triangles équicomplémentables de même base ont même hauteur.

Hilbert remarque :

> « *Cette proposition fondamentale se trouve dans le premier livre des « Éléments » d'Euclide comme la proposition 39. La démonstration qu'en donne Euclide se sert du principe général des grandeurs « Le tout est plus grand que sa partie » — un procédé qui revient à l'introduction d'un nouvel axiome géométrique concernant l'équicomplémentarité* » [Hilbert 1972, p. 74] [18].

Une telle introduction est peu satisfaisante, parce qu'il faut limiter le nombre des axiomes au minimum ! Par conséquent, Hilbert est très content d'énoncer que le huitième axiome est une proposition démontrable, au moins dans sa théorie des aires :

---

16 Peut-être les notions « vérité de sentiment » et « vérité de définition » proviennent du roman *Les liaisons dangereuses* (1782) par Choderlos de Laclos — une association romantique remarquable dans le cadre sobre des fondements des mathématiques ! Je remercie Frauke Böttcher (Frankfurt) et Jean-Pierre Friedelmeyer (Strasbourg) pour les informations sur ce roman.

17 Deux polygones sont équicomplémentaires si on arrive à deux polygones équidécomposables en ajoutant des polygones congruents aux deux polygones donnés.

18 « Dieser fundamentale Satz 48 findet sich im ersten Buch der Elemente des Euklid als 39ster Satz ; beim Beweis desselben beruft sich jedoch Euklid auf den allgemeinen Größensatz "Das Ganze ist größer als sein Teil" — ein Verfahren, welches auf die Einführung eines neuen geometrischen Axioms über Ergänzungsgleichheit hinausläuft » [Hilbert 1972, p. 74].

« *Proposition 52. Si on découpe un rectangle par des droites en plusieurs triangles et si on néglige un de triangles il n'est plus possible de remplir complètement le rectangle par les triangles restants.*

Cet énoncé fut déclaré un axiome par De Zolt et par O. Stolz ; il a été démontré par F. Schur et par W. Killing à l'aide de l'axiome d'Archimède » [Hilbert 1972, p. 79-80] [19].

3. LA THÉORIE GÉNÉRALE DES GRANDEURS

Comme nous l'avons vu, la notion de « grandeur » était une notion fondamentale non définie des mathématiques classiques — on pouvait même unifier la géométrie, l'arithmétique et l'analyse par cette idée [20]. Les caractéristiques d'une grandeur avaient été déjà formulées par Euclide : on peut les ajouter et on peut les comparer. On connaît toutes sortes de grandeurs concrètes comme les longueurs, les aires, les volumes, etc. ; de plus, on connaît au moins une espèce de grandeur abstraite : les raisons, dont la théorie se trouve dans le cinquième livre des *Éléments.* Il faut remarquer que la construction des raisons comme grandeur abstraite reste incomplète chez Euclide dans la mesure où il ne traite pas de l'addition des raisons [21]. Le mouvement critique — un mouvement d'un caractère presque paradigmatique du XIX^{e} siècle — s'est occupé aussi de

---

19 « Satz 52. Zerlegt man ein Rechteck durch Geraden in mehrere Dreiecke und lässt auch nur eines dieser Dreiecke fort, so kann man mit den übrigen Dreiecken das Rechteck nicht mehr ausfüllen.
Dieser Satz ist von De Zolt und O. Stolz als Axiom hingestellt und von F. Schur und W. Killing mit Hilfe des Archimedischen Axioms bewiesen worden » [Hilbert 1972, p. 79-80]. Hilbert remarque de plus que sa théorie est indépendante de l'axiome d'Archimède.

20 Cela revient à l'idée déjà proposée par Aristote que la géométrie s'occupe des grandeurs continues et l'arithmétique traite des grandeurs discrètes. Il est remarquable que beaucoup de textes sur l'analyse, même au XIX^{e} siècle, commencent par une introduction sur les grandeurs constantes et les grandeurs variables — cf. par exemple le *Cours d'analyse* de Cauchy (1821) — une tradition qui remonte aux débuts de l'analyse (cf. par exemple le traité de l'Hôpital (1696)). Je remercie M. Zerner (Paris) pour ses renseignements sur les cours d'analyse du XIX^{e} siècle.

21 Euclide discute d'une manière explicite la comparaison des raisons — cf. les définitions 6 et 8 du cinquième livre — et certaines manières de manipuler des proportions — c'est-à-dire des égalités entre deux raisons (des proportions), par exemple la composition des raisons, la division et la conversion (déf. 15, 16 et 17).

la notion de grandeur. Comme c'était une entreprise assez générale et complexe, il faut que nous nous bornions ici à quelques indications.

L'outil le plus efficace du mouvement critique était l'axiomatisation [22]. Appliquer cette méthode aux grandeurs elles-mêmes allait de soi. Les premiers essais en furent peut-être l'*Ausdehnungslehre* de Hermann Grassmann (1844) et la *Größenlehre* de Bernard Bolzano (non publié par son auteur) ; mais aucun des deux n'a influencé le développement ultérieur d'une manière profonde. Les idées prématurées qu'ils contiennent n'ont été comprises que dans les années 1880.

L'un des mathématiciens qui s'est occupé de l'axiomatisation des grandeurs fut l'Autrichien Otto Stolz (1842-1905). Stolz a fait ses études à Vienne, à Göttingen et à Berlin ; il était un ami de Felix Klein qui en parle dans son essai historique sur le développement des mathématiques au XIX^e^ siècle comme d'« un logicien par excellence » [Klein 1926 & 1927, I, p. 152]. Stolz était fortement influencé par les idées de Weierstrass ; son livre sur l'arithmétique universelle essaie de développer les fondements (les « éléments ») de l'analyse dans le style de Weierstrass [23]. Mais, outre l'intérêt qu'il portait à son maître, Stolz avait un vif penchant pour l'histoire. Il est, en particulier, à l'origine de la reconnaissance de Bolzano [Stolz 1881]. Il s'est occupé aussi des idées de Grassmann et de l'axiome aujourd'hui appelé « axiome d'Archimède-Eudoxe » ; la connaissance des *Éléments* d'Euclide était donc indispensable pour ce savant « du Tyrol » (comme écrivait Klein [1926 & 1927, vol. I, p. 133]).

Stolz a traité à plusieurs reprises le thème des grandeurs en général et des aires en particulier. Je vais me concentrer ici sur son livre *Cours d'arithmétique générale. Selon les idées récentes. Première partie : Généralités et arithmétique des nombres réels* [24] [Stolz 1885] ; la seconde partie est intitulée *Arithmétique*

22 Cf. la géométrie (Hilbert et d'autres), l'arithmétique (Dedekind, Peano et d'autres), l'algèbre (Cayley, Dedekind, Weber et d'autres), l'analyse (Weierstrass, Cantor/Méray, Dedekind et d'autres), les espaces vectoriels (Peano), etc.

23 C'est-à-dire par une construction stricte des entiers, des nombres rationnels et des nombres réels.

24 « *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Nach den neueren Ansichten. Erster Theil : Allgemeines und Arithmetik der reellen Zahlen* ». Une nouvelle édition, sous le titre *Arithmétique générale*, fut publiée par Stolz en collaboration avec J. A. Gmeiner en 1901/1902 ; elle était bien connue en Allemagne comme le « Stolz-Gmeiner ».

des nombres complexes avec des applications à la géométrie[25] [Stolz 1886] — « *un livre qui est caractérisé par une présentation très scrupuleuse et qui traite les éléments d'une manière très proche de celle de Weierstrass*[26] » [Klein 1926 & 1927, I, p. 291].

Le chapitre V du livre de Stolz porte le titre « Des grandeurs absolues, relatives et continues » :

> « *Nous discuterons d'abord quelles propriétés, abstraction faite de l'étendue, caractérisent tous les systèmes de grandeurs géométriques, c'est-à-dire les lignes, les angles, les surfaces, les corps. Nous y associons les multiplicités d'une désignation ou les grandeurs discrètes. De plus, il s'agit de trouver des propriétés nécessaires et suffisantes, dont les autres propriétés résultent automatiquement. Les grandeurs d'un tel système quelconque sont désignées dans le texte suivant par* A, B, C, ... *; ces grandeurs sont soumises aux conditions suivantes :*
>
> *Deux grandeurs quelconques peuvent être désignées comme égales ou non ; si les grandeurs sont différentes, l'une est la plus grande, l'autre la plus petite.*
>
> *On peut additionner les grandeurs (et les multiplier par un nombre entier) comme les nombres entiers ; en particulier la somme de deux grandeurs est toujours une autre grandeur du système.*
>
> *Pour* $A > B$ *il existe une seule grandeur* X *du système avec* $B + X = A$.
>
> *Chaque grandeur est, soit d'une manière limitée, soit d'une manière illimitée, divisible dans des parties homogènes. C'est-à-dire qu'il existe une grandeur* X *dans le système avec* $nX = A$ *où* n *désigne soit un nombre entier quelconque, soit des nombres entiers bien définis.*
>
> *Pour* $A > B$ *il existe un multiple de* B *qui est plus grand que* A *:* $pB > A$ » [Stolz 1885, p. 69] [27].

---

25 « *Arithmetik der complexen Zahlen mit geometrischen Anwendungen* ».

26 Es ist ein Buch, daß sich durch große Gewissenhaftigkeit in der Darstellung auszeichnet und in ganz Weierstraßischer Art auf die Elemente eingeht.

27 « Wir werden zunächst erörtern, welche Eigenschaften allen Systemen von geometrischen Größen d. i. von Linien, Winkeln, Flächen, Körpern abgesehen von der Ausdehnung zukommen. Die Vielheiten von einer Benennung oder discreten Größen fassen wir mit ihnen zusammen. Ferner handelt es sich um Ermittelung der notwendigen und hinreichenden Eigenschaften d. i. derjenigen, aus welchen die übrigen von selbst hervorgehen. Die Größen irgend eines dieser Systeme, im folgenden mit A, B, C ... bezeichnet, erfüllen die nachstehenden Forderungen :
Je zwei derselben können entweder als gleich oder ungleich und im letzteren Falle kann die eine als die größere, die andere als die kleinere bezeichnet werden.
Die Größen lassen sich addiren (und vervielfachen) wie die natürlichen Zahlen, insbesondere ist die Summe je zweier eine Größe des Systemes.

Au-delà des exemples simples comme les segments et les angles, les polygones sont un exemple d'un tel système de grandeurs. Pour le mettre en évidence, il faut établir une relation d'ordre et une addition entre les polygones. L'addition est simplement définie comme la réunion des polygones [28]. Le problème de l'ordre est étudié par Stolz de plus près [Stolz 1885, p. 75-77]. L'idée en est la suivante. Soient deux polygones P et P'. On subdivise les deux polygones en triangles. À partir des triangles appartenant à chaque polygone, on construit un rectangle ayant un côté fixé (par exemple le segment choisi comme unité). On compare alors les deux rectangles qui en résultent à partir de leur autre côté. À cette fin, Stolz démontre les propositons suivantes :

> « 1. *Deux parallélogrammes ayant même base et même hauteur sont égaux entre eux (Euclide, I, prop. 35) ;*
>
> 2. *Chaque triangle est égal à un parallélogramme de même base et avec une hauteur qui est la moitié de la hauteur du triangle.*
>
> 3. *Dans chaque parallélogramme les parallélogrammes autour de la diagonale sont égaux (Euclide, I, prop. 43).* » [29]

Falls $A > B$, so existirt im Systeme eine und nur eine Größe X so, daß $B + X = A$.
Jede Größe A ist entweder beschränkt oder unbeschränkt in gleiche und mit ihr gleichartige Theile zerlegbar, d. h. es giebt im Systeme eine Größe X, so dass $nX = A$, worin n entweder jede oder auch nur gewisse natürliche Zahlen bedeuten kann.
Ist $A > B$, so giebt es ein Vielfaches von B, das größer ist als A : $pB > A$ » [Stolz 1885, p. 69].
Stolz savait bien que la qualité V (l'archimédicité) est indépendante des autres ; il cite un exemple (« l'infini des fonctions ») donné par Paul Du Bois-Reymond pour le montrer.

28 « Nennt man Summe zweier Polygone A, B jedes aus ihnen zusammengesetzte Polygon, ... » [Stolz 1885, p. 77] D'un point de vue ensembliste — qui n'était pas le point de vue de Stolz — il y a des problèmes à résoudre ici (cf. par exemple [Guinot 1991]).

29 « 1. Satz. Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind einander gleich. (Euclid. I. prop. 35)
2. Satz. Ein Dreieck ist gleich einem Parallogramme von derselben Grundlinie und der halben Höhe.
3. Satz. In jedem Parallelogamme sind die Ergänzungen der um eine Diagonale liegenden Parallelogramme einander gleich. (Euclid. I. prop. 43) » [Stolz 1885, p. 75-76].

Ces propositions sont toutes démontrées à l'aide de l'équidécomposabilité [30]. Stolz aboutit à la conclusion suivante :

> « *Par les propositions ci-dessus on peut construire pour chaque parallélogramme et chaque triangle un parallélogramme égal ayant un angle et un côté donnés. C'est vrai aussi pour un polygone, parce qu'on peut le découper par des diagonales en triangles. Par conséquent deux polygones peuvent toujours se comparer* » [Stolz 1885, p. 77] [31].

Il y a une difficulté dans les constructions indiquées par Stolz : si on a deux dissections du même polygone en triangles et si on rassemble les triangles respectifs en deux rectangles ayant un côté fixé, est-on sûr que ces rectangles seront congruents ? Si la réponse était négative, on aurait une contradiction avec l'axiome n° 8 !

Cette question fut posée par Friedrich Schur en 1892. Après avoir esquissé la méthode de Stolz, Schur constate : « Mais on a passé sous silence la question de savoir si ce rectangle est vraiment déterminé d'une manière unique, si on ne peut pas arriver, par une autre dissection de la figure en triangles — ce qui est le point de départ — à un rectangle différent. On ne peut expliquer ce silence que par la conviction que l'hypothèse mentionnée est exclue par le principe général sur les grandeurs qui dit que le tout n'est jamais égal à sa partie » [Schur 1892, p. 4] [32]. En réaction à la critique de Schur, Stolz a écrit l'article « Sur les polygones plans et les angles

---

30 Par conséquent Stolz est obligé d'utiliser l'archimédicité. Comme on l'a déjà dit, Stolz fut l'un des premiers à prêter attention à cet axiome ; en 1883, il avait publié un article intitulé « Sur la géométrie des Anciens, en particulier sur un axiome d'Archimède » [Stolz 1883], où il discutait le rôle de cet axiome, en particulier son indépendance par rapport aux autres axiomes connus à cet époque.

31 « Mit Hilfe der vorstehenden Sätze kann man zu jedem Parallelogramme, sowie zu jedem Dreiecke ein ihm gleiches Parallelogramm construiren, von dem ein Winkel und eine Seite gegeben sind. Dasselbe gilt von jedem Polygone, da man es durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen kann. Somit lassen sich in der That je zwei Polygone mit einander vergleichen » [Stolz 1885, p. 77].

32 « Doch ist man hierbei über die Frage mit Stillschweigen hinweggegangen, ob dies Rechteck auch eindeutig bestimmt sei, ob nicht bei einer andern Eintheilung der Figur in Dreiecke — das ist ja der Ausgangspunkt — ein anderes Rechteck erhalten wird. Es kann dies Stillschweigen nur so erklärt werden, dass die Annahme, ein Rechteck könne einem seiner Theile flächengleich sein, ohne Weiteres als durch den allgemeinen Größensatz ausgeschlossen betrachtet wird, der Theil könne dem Ganzen nicht gleich sein.“ [Schur 1892, p. 4] — W. Killing avait indiqué la même difficulté quelques années plus tôt, mais sans donner une solution [Killing 1886].

y compris les angles de contact comme des systèmes de grandeurs absolues ». Dans cet article Stolz accepte la critique de Schur ; par conséquent il introduit l'axiome suivant : « *Si on découpe un polygone B par des droites en plusieurs parties et si on supprime une de ces parties alors on ne peut plus couvrir le polygone B par les pièces qui restent* » [Stolz 1894, p. 234]). Dans ce contexte, Stolz cite le livre de De Zolt, *Principii della egualianza di poligoni* (1881), où l'auteur fait une tentative pour démontrer cet axiome. Le livre de De Zolt a été le point de départ d'une discussion intense de l'axiome de même nom en Italie [33].

Dans son article, Schur indique une démonstration par une méthode due à Möbius, qui présuppose une grandeur que l'on peut appeler « l'aire orientée d'un triangle » :

Si ABC est un triangle avec une orientation, on a $\mu(ABC) = -\mu(ACB)$. Si on découpe un polygone en des triangles bien orientés, on peut définir l'aire du polygone par la somme des aires des triangles et on démontre que cette somme est indépendante de la triangulation choisie [34] !

Il faut noter que la technique de Möbius n'utilise pas de méthodes infinies comme le passage à une limite ; elle est strictement finie, donc appliquable dans le contexte de l'équidécomposabilité ! Mais il reste encore une difficulté : comment arriver à la grandeur « aire d'un triangle » sans utiliser les méthodes usuelles d'exhaustion ? La réponse a été donnée par Hilbert dans ses *Fondements de la géométrie* à l'aide de son calcul des segments. Ce n'est pas ici le lieu pour discuter en détail cette partie importante de l'œuvre de Hilbert ; je veux seulement indiquer que ce calcul admet la possibilité de définir l'aire d'un triangle comme la moitié du produit de sa base par sa hauteur — un produit qui peut s'interpréter comme un segment. Par conséquent, on n'utilise pas la notion de nombre réel, et

---

33 On trouve quelques remarques sur cette discussion dans [Simon 1906, p. 106-107]. On a aussi essayé d'introduire l'idée d'équidécomposabilité dans les lycées — cf. [Dobriner 1898] et [Faifofer 1903] ; pour une discussion actuelle on peut consulter [Perrin 2002].

34 Cf. [Möbius 1866, p. 485–488] ; les idées de Möbius se trouvent déjà dans son *Calcul barycentrique* [Möbius 1827, p. 20-22 et p. 215-220]. La démonstration de la proposition indiquée repose sur le fait que les segments des triangles qui se trouvent à l'intérieur du polygone donné ont une somme qui s'annule. Il ne reste que les segments qui se trouvent sur le périmètre du polygone donné.

il n'y a pas non plus de processus infini. Avec cet outil, la démonstration de l'axiome de De Zolt (ou la réponse à la question posée par Schur et Killing) est simple : si on supprime une seule partie, la somme des aires est altérée [35].

On fait ici une sorte de détour : on démontre un fait principal sur l'équidécomposabilité par une mesure. Ce problème reste ouvert : on ne sait pas s'il y a une démonstration de l'axiome de De Zolt qui n'utilise pas de mesure [Hartshorne 2000, p. 210]. Par conséquent, il reste là un élément non géométrique — le rêve d'Euclide n'est pas encore réalisé complètement.

BIBLIOGRAPHIE

DOBRINER (Hermann)

[1898] *Leitfaden der Geometrie für höhere Schulen*, Leipzig : Voigtländer, 1898.

DUHAMEL (Jean-Marie-Constant)

[1866] *Des méthodes dans les sciences de raisonnement. Première partie : Des méthodes communes à toutes les sciences de raisonnement. Deuxième partie : Applications des méthodes générales à la science des nombres et à la science de l'étendue* [les deux parties se trouvent dans un seul tome avec des paginations séparées], Paris : Gauthier Villars, 1866.

[1784] *Encyclopédie méthodique*, Panckoucke, 1784 ; rééd. en trois tomes, Paris : ACL, 1987.

EUCLIDE

[1990] *Les Éléments. Volume 1 : Livres I à IV,* introduction générale par Maurice Caveing ; traduction et commentaire par Bernard Vitrac, Paris : PUF, 1990.

[2001] *Les Éléments. Volume 4 : Livres XI à XIII,* traduction et commentaire par Bernard Vitrac, Paris : PUF, 2001.

FAIFOFER (Aureliano)

[1903] *Éléments de géométrie*, Paris : Nony, 1903.

FREDERICKSON (Greg Norman)

[1997] *Dissections. Plane & Fancy*, Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1997.

35 Cf. les détails fournis dans [Hilbert 1972, p. 75-82].

Gerwien (Paul)

[1833a] Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 10 (1833), p. 228–234.

[1833b] Zerschneidung jeder beliebigen Menge verschieden gestalteter Figuren von gleichem Inhalt auf der Kugelfläche in dieselben Stücke, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 10 (1833), p. 235–240.

Grattan-Guinness (Ivor)

[1996] Numbers, magnitudes, ratios, and proportions in Euclid's *Elements* : How did he handle them ?, *Historia Mathematica*, 23 (1996), p. 355–375.

Guinot (Marc)

[1991] *Le paradoxe de Banach-Tarski*, Lyon : Aléas, 1991.

Hartshorne (Robin)

[2000] *Geometry : Euclid and Beyond*, New York : Springer, 2000.

Hilbert (David)

[1972] *Grundlagen der Geometrie*, Stuttgart : Teubner, 11^{e} édition, 1972.

Killing (Wilhelm)

[1886] Besprechung von Stolz, *Zeitschrift für Mathematik*, 1886, p. 186 (historisch-literarische Abteilung).

Klein (Felix)

[1926 & 1927] *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. I & II*, Berlin : Springer, 1926 & 1927 ; Rééd. en un vol., Berlin-New York-Heidelberg : Springer, 1979.

Lacroix (Sylvestre-François)

[1819] *Élémens de géométrie*, Paris : Courcier, 11^{e} édition, 1819.

Legendre (Adrien-Marie)

[1817] *Éléments de géométrie*, Paris : Didot, 11^{e} édition, 1817.

Möbius (August Ferdinand)

[1827] *Der barycentrische Calcul ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie*, Leipzig : Barth, 1827.

[1866] Ueber die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders, dans *Gesammelte Werke. Band II*, Leipzig : Hirzel, 1866, p. 473–512.

Neuenschwander (Erwin)

[1972–1973] Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids, *Archive for History of Exact Sciences*, 9 (1972–1973), p. 323–380.

Perrin (Daniel)

[2002] Eine Ergänzung zum Bericht über Geometrie der Kommission Kahane : das Beispiel der affinen Geometrie im Collège, *Mathematische Semesterberichte*, 48 (2002), p. 211–245.

Proclus

[1970] *A commentary on the First Book of Euclid's Elements* translated by Glenn R. Morrow, Princeton : Princeton Univ. Press, 1970.

Richards (Joan L.)

[2006] Historical mathematics in the French eighteenth century, *Isis*, 97 (2006), p. 700–713.

Schur (Friedrich)

[1892] Ueber den Flächeninhalt geradlinig begrenzter ebener Figuren, *Sitzungsberichte der Dorpater Naturforschenden Gesellschaft*, 1892, p. 2–6.

Simon (Max)

[1906] *Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert*, Leipzig : Teubner, 1906 (= *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Der Ergänzungsbände I. Band).

Stäckel (Paul) & Engel (Friedrich)

[1895] *Die Theorie der Parallellinien*, Leipzig : Teubner, 1895.

Stolz (Otto)

[1881] Bernhard Bolzanos Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung, *Mathematische Annalen*, 18 (1881), p. 255–279.

[1883] Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes, *Mathematische Annalen*, 22 (1883), p. 504–519.

[1885] *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Erster Theil : Allgemeines und Arithmetik der reellen Zahlen*, Leipzig : Teubner, 1885.

[1886] *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Zweiter Theil : Arithmetik der complexen Zahlen mit geometrischen Anwendungen*, Leipzig : Teubner, 1886.

[1888] Über die anschauliche Vergleichung der ebenen Vielecke und der Prismen, *Zeitschrift für das österreichische Gymnasium*, 39 (1888), p. 297–304.

[1891] *Größen und Zahlen. Rede bei Gelegenheit der feierlichen Kundmachung der gelösten Preisaufgaben am 2. März 1891*, Leipzig : Teubner, 1891.

[1894] Die ebenen Vielecke und die Winkel mit Einschluss der Berührung-Winkel als Systeme von absoluten Grössen, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 5 (1894), p. 233–240.

Volkert (Klaus)
[1999] Die Lehre vom Flächeninhalt ebener Polygone : einige Schritte in der Mathematisierung eines anschaulichen Konzeptes, *Mathematische Semesterberichte*, 46 (1999), p. 1–28.

De Zolt (Antonio)
[1881] *Principii della egualianza di poligoni preceduti da alcuni cenni critici sulla teoria della equivalenza geometrica*, Milano : Briola, 1881.