

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

JACQUELINE FERRAND

Étude de la représentation conforme au voisinage de la frontière

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1942, p

http://www.numdam.org/item?id=THESE_1942__248__1_0

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

N^o d'ORDRE :
9862
A.
N^o de série 1995

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR **JACQUELINE FERRAND**

ANCIENNE ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE DE LA REPRÉSENTATION CONFORME AU VOISINAGE DE LA FRONTIÈRE.

2^e THÈSE. — LES ESPACES DE FINSLER.

Soutenues le

1942 devant la Commission d'examen.

MM. MONTEL, *Président.*

DENJOY }
VALIRON } *Examineurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1942

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyens honoraires } M. MOLLIARD.
 } C. MAURAIN.
Doyen..... PAUL MONTEL, *Professeur*, Théorie des fonctions.

<i>Professeurs honoraires</i>	LÉON BRILLOUIN.	LAPICQUE.	BOHN.	J. DRACH.
	AUGER.	G. BERTRAND.	RABAUD.	M. GUICHARD.
	DANGEARD.	CH. FABRY.	CAULLERY.	LABROUSTE.
	LESPIEAU.	LÉON BERTRAND.	É. CARTAN.	
	VESSIOT.	WINTREBERT.	É. BOREL.	
	PORTIER.	DUBOSCO.	A. COTTON.	

PROFESSEURS

<p>CHARLES PÉREZ..... † Zoologie. L. BLARINGHEM ... † Botanique. G. JULIA..... † Analyse supérieure et Algèbre supérieure. C. MAUGUIN..... † Minéralogie. A. DENJOY..... † Géométrie supérieure. L. LUTAUD..... † Géographie physique et Géologie dynamique. G. BRUHAT..... † Physique. E. DARMOIS..... † Enseignement de Physique. A. DEBIERNE..... † Physique générale et Radio-activité. A. DUFOUR..... † Physique (P. C. B.). L. DUNOYER..... † Chimie physique. M. JAVILLIER..... † Chimie biologique. HENRI VILLAT..... † Mécanique des fluides et applications. CH. JACOB..... † Géologie. P. PASCAL..... † Chimie générale. M. FRÉCHET..... † Calcul des Probabilités et Physique mathématique. E. ESCLANGON..... † Astronomie. H. BÉGHIN..... † Mécanique physique et expérimentale. FOGH..... † Mécanique expérimentale des fluides. PAUTHENIER..... Physique (P. C. B.). DE BROGLIE..... † Théories physiques. CHRÉTIEN..... † Optique appliquée. PRENANT..... † Anatomie et Histologie comparées. VILLEY..... Mécanique physique et expérimentale. COMBES..... † Physiologie végétale. GARNIER..... † Application de l'Analyse à la Géométrie. PERÈS..... Mécanique rationnelle.</p>	<p>HACKSPILL..... † Chimie minérale. TOUSSAINT..... Technique aéronautique. M. CURIE..... Physique (P. C. B.). G. RIBAUD..... † Hautes températures. CHAZY..... † Mécanique rationnelle. GAULT..... Chimie (P. C. B.). CROZE..... Recherches physiques. DUPONT..... † Théories chimiques. VALIRON..... † Calcul différentiel et intégral. BARRABÉ..... Géologie structurale et Géologie appliquée. MILLOT..... Biologie animale (P. C. B.). F. PERRIN..... Théories physiques. VAVON..... † Analyses et mesures chimiques. G. DARMOIS..... Calcul des probabilités et Physique-mathématique. CHATTON..... † Biologie maritime. AUBEL..... Chimie biologique. JACQUES BOURCART..... Géographie physique et Géologie dynamique. M^{me} JOLIOT-CURIE..... Physique générale et Radio-activité. PLANTEFOL..... Biologie végétale (P.C.B.). CABANNES..... † Recherches physique. GRASSÉ..... † Zoologie (Évolution des êtres organisés). PRÉVOST..... Chimie organique. BOULIGAND..... Mathématiques. CHAUDRON..... Chimie (P. C. B.). WYART..... Minéralogie. TEISSIER..... Zoologie. MANGENOT..... Biologie végétale (P. C. B.). P. AUGER..... Physique. MONNIER..... Physiologie générale. PIVETEAU..... Géologie. ROCARD..... Physique. H. CARTAN..... Calcul différentiel.</p>
--	---

Secrétaire..... A. PACAUD.

Secrétaire honoraire..... D. TOMBECK.

A MON PÈRE

**A LA MÉMOIRE
DE MON GRAND-PÈRE**

PREMIÈRE THÈSE

ÉTUDE

DE

LA REPRÉSENTATION CONFORME

AU VOISINAGE DE LA FRONTIÈRE

Introduction.

Il ne saurait être question ici de faire un historique complet de la théorie de la représentation conforme, qui a vu le jour dans les travaux de Riemann, Poincaré, Schwarz, Kœbe, Hilbert, pour ne citer que les plus illustres. Nous voudrions seulement montrer l'intérêt qu'ont suscité, au cours de ces dernières années, les questions dont nous allons nous occuper. Il s'agira uniquement ici de la représentation conforme d'un domaine simplement connexe Δ décrit par la variable $\zeta = \xi + i\eta$ sur l'intérieur du cercle $C : |z| < 1$ [ou sur le demi-plan droit : $x > 0$] décrit par la variable $z = x + iy$, et du comportement de la fonction représentative $\zeta = f(z)$ au voisinage de la circonférence $K : |z| = 1$ [ou de l'axe $y'y : x = 0$]. Les premiers résultats dans cette voie, lorsque la frontière Γ de Δ n'est pas un arc analytique, sont dus à Painlevé (1891), Korn, Lichtenstein.

Dans un Mémoire paru en 1913, M. Carathéodory ^[1], précédé, il est vrai, par MM. Schmidt, Schoenflies, Study, renouvelait la théorie

en introduisant la notion de « bout premier » (Primende) élargissant celle de point-frontière pour un domaine qui n'est pas limité par un arc de Jordan; il y a alors correspondance biunivoque entre les points a de la circonférence K [ou de l'axe $y'y$] et les bouts premiers E de la frontière Γ de Δ , un bout premier $E(a)$ étant défini au fond par ses voisinages topologiques, images des voisinages de a dans C . Quelques années plus tard M. E. Lindelof ^[1] précisait les résultats de M. Carathéodory, montrant, entre autres, que l'ensemble des points « principaux » d'un bout premier $E(a)$ coïncidait avec l'ensemble des limites de la fonction $f(z)$ lorsque $z \rightarrow a$ dans un angle d'approximation. Peu après paraissait un important Mémoire de M. Montel ^[1] sur la représentation conforme : Tandis que la méthode ingénieuse, mais assez longue de M. Lindelof devait conduire plus tard à la théorie moderne de la mesure conforme, systématisée par MM. Carleman, Nevanlinna et Ostrowski, celle de M. Montel, grâce à la notion de famille normale qu'il venait d'introduire, se révélait plus simple pour l'étude des propriétés angulaires de la fonction $f(z)$ et surtout permettait une démonstration élégante et directe du théorème d'existence de la représentation.

Jusqu'à ce moment-là les résultats obtenus étaient surtout qualitatifs. Le problème fondamental qui se posait alors était le comportement de la dérivée $f'(z)$, et tout d'abord les conditions d'existence d'une limite de $f'(z)$ (dérivée angulaire) coïncidant, comme l'a montré M. Valiron ⁽¹⁾, avec la limite du rapport $\frac{f(z) - \alpha}{z - a}$ [si $f(z) \rightarrow \alpha$ lorsque $z \rightarrow a$ angulairement]. Les travaux de M. Julia ⁽²⁾ et de M. Denjoy ⁽³⁾, sur les fonctions holomorphes dans C satisfaisant à $|f(z)| \leq 1$, ont conduit simultanément MM. Valiron ⁽⁴⁾ et Carathéodory ⁽⁴⁾ au théorème suivant : *il suffit pour l'existence d'une dérivée angulaire au point $z = a$ correspondant à $\zeta = \alpha$ que la frontière Γ de Δ soit comprise entre deux cercles tangents en α .* Dans un autre article ⁽⁵⁾, M. Valiron

(1) G. VALIRON, *Bull. Sc. math.*, 2^e série, t. 53, 1929, p. 70-77.

(2) G. JULIA, *Acta Mathematica*, t. 42, 1920, p. 349-355.

(3) A. DENJOY, *C. R. Acad. Sc.*, t. 188, 1929, p. 139 et 1084.

(4) C. CARATHÉODORY, *Sitz. Ber. der Akad.*, zu Berlin, 1929, p. 39-54.

(5) G. VALIRON, *Bull. Sc. math.*, 2^e série, t. 56, 1932, p. 208-212.

montrait qu'on pouvait remplacer les deux cercles par des courbes Γ_1, Γ_2 ayant au point α un contact d'ordre nul, résultat dépassant celui de MM. Bessonoff et Lavrentieff ⁽¹⁾ utilisant des courbes ayant un contact d'ordre quelconque, mais positif. Tous ces critères, comme celui pourtant plus large de M. Wolff ⁽²⁾, étaient déjà contenus dans celui de M. Ahlfors ^[1] conséquence de deux inégalités d'une signification très profonde qui donnaient en outre, pour la première fois, des conditions nécessaires rejoignant à peu près les conditions suffisantes pour des domaines à frontière suffisamment régulière.

Pendant que MM. Wolff, Visser, Warschawski, Van der Corput continuaient à travailler dans cette direction sans améliorer sensiblement les critères de M. Ahlfors (*voir* à ce sujet l'étude intéressante de M. B. Grootenboer ^[1]), M. Ostrowski ^[1] engageait la théorie dans une voie nouvelle en dissociant la semi-conformité (Winkelproportionalität) de la conformité de la représentation (existence d'une dérivée angulaire), et donnant, pour la semi-conformité, une condition géométrique nécessaire et suffisante. Dans cette étude les notions de « mesure conforme », de « noyau » et de « plis » se révélèrent efficaces. Ce sont ces méthodes que nous avons essayé d'étendre (Chap. III et IV).

Restait le problème global du comportement de $f(z)$ sur la frontière. On connaissait déjà quelques résultats de M. Weniaminoff ⁽³⁾ mais qui, fondés sur la notion de courbe rectifiable, ne pouvaient s'appliquer qu'à des domaines assez particuliers. Il revient à M. Denjoy ^[1, 2, 3] d'avoir montré, tout récemment, que, dans le cas le plus général, en négligeant sur la circonférence K un ensemble de points a de mesure linéaire nulle, on a en tout autre point, lorsque $z \rightarrow a$ dans un angle d'approximation, $f'(z) = o\left[\frac{1}{\sqrt{z-a}}\right]$, d'où résulte que $f(z)$ a une limite unique α . M. Wolff ⁽⁴⁾ reprenait immédiatement

⁽¹⁾ P. BESSONOFF et M. LAVRENTIEFF, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 58, 1930, p. 175-198.

⁽²⁾ J. WOLFF, *C. R. Acad. Sc.*, t. 191, 1930, p. 921.

⁽³⁾ WENIAMINOFF, *C. R. Acad. Sc.*, t. 180, 1925, p. 114 et 902.

⁽⁴⁾ J. WOLFF, *C. R. Acad. Sc.*, t. 213, 1941, p. 158.

ces résultats pour en simplifier la démonstration et ce sont ces travaux qui nous ont servi de point de départ dans les Chapitres I et II.

C'est en effet par ce dernier problème, à cause de la simplicité des méthodes et des résultats, que nous commençons cet exposé. Nous avons pu donner du théorème de M. Denjoy un énoncé valable quelle que soit la façon dont le point z s'approche de la circonférence, une démonstration nécessitant le minimum d'hypothèses sur la fonction $f(z)$ et plusieurs sortes de généralisations : tous ces résultats se rattachent très simplement, par l'intermédiaire d'un lemme de MM. Cartan et Ahlfors, à la limitation de l'aire décrite par le point représentatif $\zeta = f(z)$, cette aire pouvant être affectée d'un coefficient de densité variable. Ils ne sont donc pas limités aux fonctions univalentes, et nous avons tenu à leur conserver toute leur généralité. Aussi le premier chapitre est-il consacré aux fonctions holomorphes définies dans le cercle $C : |z| < 1$, ou, si l'on préfère, dans une couronne circulaire $r_0 \leq |z| < 1$, puisque nous nous intéressons uniquement à ce qui se passe au voisinage de la circonférence $K : |z| = 1$.

Dans la suite, pour plus de commodité, la fonction $f(z)$ est supposée définie dans le demi-plan droit $D : x > 0$, ou seulement dans la bande $x_0 \leq x > 0$.

Le deuxième chapitre contient plus particulièrement les applications à la représentation conforme des théorèmes démontrés au premier. L'univalence de la fonction $f(z)$ permet en effet, par application du théorème de Kœbe, de les préciser en les simplifiant. On verra comment la seule notion d'aire décrite permet de démontrer, outre la limitation globale de la dérivée trouvée par M. Denjoy, des propriétés purement topologiques de la représentation, en particulier sur l'accessibilité, et de retrouver les résultats locaux de MM. Carathéodory et Lindelöf en introduisant un point de vue métrique plus précis. La méthode suivie permet d'étudier l'ensemble limite des valeurs de $f(z)$ lorsque z tend vers un point $a = it$ de l'axe $y'y$ dans un domaine intérieur à D limité par une courbe de forme donnée, et de préciser la rareté des points a pour lesquels cet ensemble ne se réduit pas à un point α . Nous généralisons ainsi un résultat de M. Wolff relatif au cas où cette courbe est un cercle tangent à $y'y$. Nous terminons en discutant la signification géométrique des résultats obtenus.

Les troisième et quatrième chapitres procèdent d'un point de vue assez différent. Nous nous plaçons cette fois au voisinage d'un point accessible α donné de la frontière Γ de Δ , que nous envoyons à l'infini ainsi que son correspondant a par deux transformations homographiques sur les variables ζ et z . Nous cherchons d'abord (Chap. III) des conditions géométriques suffisantes pour que $f(z)$ ait pour limite unique $\alpha = \infty$ lorsque z tend vers $a = \infty$ sur une courbe ayant à l'infini avec l'axe $y'y$ un contact d'ordre donné. Cette étude ne nous semble pas avoir été faite jusqu'ici. Elle nous a été suggérée par les travaux de M. Denjoy ⁽¹⁾ sur l'itération des fonctions analytiques dans un domaine Δ , dont les valeurs tombent dans Δ . Mais, avant de l'exposer, nous rappelons les définitions et les méthodes de M. Ostrowski dont nous avons besoin, en particulier la mesure conforme; nous les appliquons à la démonstration d'un lemme fort simple qui donne une limitation inattendue de l'argument de z lorsque $\zeta \rightarrow \infty$ dans un angle d'approximation intérieur à Δ ; nous donnons enfin une nouvelle démonstration, basée sur les méthodes de M. Montel, du théorème de M. Ostrowski sur la semi-conformité.

Au Chapitre IV, nous commençons par rappeler les résultats de M. Ahlfors; puis nous montrons comment les propriétés de $f(z)$ trouvées au Chapitre II permettent de représenter la fonction $\log \frac{f(z)}{z}$ par une intégrale de Poisson. Nous abordons alors le problème des conditions géométriques que doit remplir Δ pour que la fonction $f(z)$ possède une dérivée angulaire à l'infini : $c = \lim_{z \rightarrow \infty, |\text{Arg } z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon} \frac{f(z)}{z}$.

Les résultats de M. Ostrowski sur la semi-conformité nous suggèrent l'idée que, pour la conformité aussi, les conditions se partagent en deux groupes : d'une part la frontière Γ de Δ ne doit pas pénétrer trop profondément dans le demi-plan droit ($\xi > 0$); d'autre part Γ doit posséder une double infinité de points ζ_v, ζ'_v s'étendant à l'infini dans les deux directions de l'axe imaginaire $\xi = 0$, assez voisins de cet axe et suffisamment denses sur Γ . Aussi nous étudions d'abord les deux cas particuliers :

(1) A. DENJOY, *C. R. Acad. Sc.*, t. 182, 1926, p. 42.

I. Δ est contenu dans le demi-plan $\xi > 0$: seules interviendront les conditions du premier groupe.

II. Δ contient le demi-plan $\xi > 0$: seules interviendront les conditions du deuxième groupe.

Dans le premier cas nous trouvons des conditions suffisantes moins restrictives que celles de M. Ahlfors, même élargies par M. Grootenboer; elles rejoignent les conditions nécessaires établies dans un cas particulier par M. Ahlfors.

Dans le deuxième cas nous avons réussi à montrer que l'existence d'une double infinité de points ζ_n, ζ'_n , convenablement répartis sur Γ , et tels que la ligne brisée qui les joint limite un domaine satisfaisant aux conditions de M. Ahlfors était suffisante, le reste de la frontière n'étant soumis à aucune condition. Quelques exemples montrent le progrès ainsi réalisé. Nous montrons pour des domaines assez généraux que l'existence de ces suites est nécessaire, sauf peut-être la condition de régularité dans la répartition.

On obtient des conditions suffisantes pour un domaine Δ général en lui imposant de contenir un domaine du type I et d'être contenu dans un domaine du type II. Nous remarquons que ces conditions entraînent plus que l'existence d'une dérivée angulaire : si elles sont réalisées, la fonction $\log \left| \frac{f(x)}{x} \right|$ est à variation totale bornée pour $1 \leq x \leq \infty$.

Les principaux résultats de cette étude ont fait l'objet de Notes aux *Comptes rendus* (9 juin 1941, 10 novembre 1941, 10 janvier 1942, 9 février 1942). En outre une cinquième Note, assez distincte, contient des applications à l'itération (23 juin 1941).

Je dois remercier très spécialement M. Denjoy qui m'a suggéré le sujet de cette étude et n'a cessé de m'encourager. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma gratitude. J'adresse ma respectueuse et profonde reconnaissance à M. Montel qui a bien voulu présenter mes Notes et accueillir ce Mémoire dans les *Annales de l'École Normale Supérieure*. M. Valiron m'a constamment témoigné une active sympathie; je l'en remercie bien vivement. Enfin je rappellerai ce que je dois à M. Wolff qui, malgré les difficultés de correspondance m'a tenue au courant de ses plus récents travaux.

A. B. — Pour éviter les répétitions, les références désignées par une * se rapportent à la liste suivante :

- L. AHLFORS [1], *Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen* (*Acta Soc. Sc. Fennicæ*, Nova series A, 1, n° 9, 1930, p. 1-40).
- C. CARATHÉODORY [1], *Ueber die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete* (*Math. Annalen*, t. 63, 1913, p. 323-370).
- A. DENJOY [1], *C. R. Acad. Sc.*, t. 242, 1941, p. 1071.
[2], *C. R. Acad. Sc.*, t. 243, 1941, p. 15.
[3], *C. R. Acad. Sc.*, t. 243, 1941, p. 115.
- B. GROOTENBOER [1], *Sur la représentation conforme des domaines simplement connexes au voisinage des frontières* (*Bull. Soc. Math. de France*, t. 61, 1933, p. 128-140).
- E. LINDELÖF [1], *Sur un principe général de l'Analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme* (*Acta Soc. Sc. Fennicæ*, t. 46, n° 4, 1915, p. 1-35).
- P. MONTEL [1], *Sur la représentation conforme* (*Journ. de Math.*, 7^e série, t. 3, 1917, p. 1-54).
[2], *Leçons sur les fonctions univalentes*, Paris, Gauthier-Villars, 1933.
- R. NEVANLINNA [1], *Eindeutige analytische Funktionen*, Berlin, Julius Springer, 1936.
- A. OSTROWSKI [1], *Zur Randverzerrung bei konformer Abbildung* (*Prace Math. Fiz.*, t. 44, Varsovie, 1936, p. 371-471).
- J. WOLFF [1], *Inégalités remplies par les fonctions univalentes* (*Proceedings de l'Académie d'Amsterdam*, t. 44, n° 8, 1941).

CHAPITRE I.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS HOLOMORPHES DANS UNE COURONNE.

Théorème fondamental.

1. Nous commencerons par rappeler un lemme important dont l'idée primitive se trouve dans les travaux de MM. Boutroux, A. Bloch et H. Cartan, auquel M. Ahlfors a donné la forme simple et très générale que voici ⁽¹⁾ :

⁽¹⁾ L. AHLFORS, *Ein Satz von H. Cartan und seine Anwendung auf die Theorie der meromorphen Funktionen* (*Soc. sc. fennicæ Comment. Phys. math.*, 5, n° 16, 1931). Voir également le livre de R. NEVANLINNA, *[1], p. 136.

LEMME. — *Étant donnés : a. dans le plan complexe un ensemble borné mesurable E, et une fonction d'ensemble complètement additive ou charge $\mu(e)$ définie sur tout sous-ensemble mesurable e de E, et bornée [$\mu(E) < \infty$].*

b. Une fonction $h(R)$ continue croissante définie pour $0 \leq R \leq \infty$, telle que

$$h(0) = 0, \quad h(\infty) > 1;$$

en désignant par $\mu(R, a)$ la charge portée par la partie de E contenue dans le cercle de centre $z = a$, de rayon R, on a, pour tout $R > 0$,

$$\mu(R, a) \leq h(R) \times \mu(E),$$

en tout point a du plan, excepté au plus sur un ensemble A de points a pouvant être recouvert par une suite de cercles $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ de rayons $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$ tels que

$$\sum_{n=1}^{\infty} h(R_n) < 6.$$

2. Prenons maintenant une fonction $h(R)$ ne satisfaisant plus nécessairement à la condition $h(\infty) > 1$. Soit ε un nombre quelconque tel que $0 < \varepsilon < h(\infty)$. On aura l'inégalité

$$\mu(R, a) < \frac{1}{\varepsilon} \mu(E) \times h(R),$$

excepté au plus pour un ensemble de points a pouvant être recouvert par une suite de cercles dont les rayons vérifient $\sum_{n=1}^{\infty} h(R_n) < 6\varepsilon$.

Si nous faisons tendre ε vers zéro nous obtenons le

COROLLAIRE. — *En tout point a du plan excepté au plus sur un ensemble A de h-mesure extérieure nulle ⁽¹⁾ (nous conviendrons de*

(1) La mesure extérieure d'un ensemble A dérivant de la fonction $h(R)$, au sens de M. Hausdorff (*Math. Annalen*, t. 79, 1919, p. 157), est la borne inférieure de $\sum_n h(R_n)$ pour tous les systèmes finis ou dénombrables de cercles $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$, recouvrant l'ensemble A.

dire : sur une h -plénitude), le rapport $\frac{\mu(\mathbb{R}, a)}{\mu(\mathbb{E}) \times h(\mathbb{R})}$ est borné, quel que soit \mathbb{R} , par un nombre qui dépendra en général du point a .

Pour plus de commodité, nous remplacerons la condition $h(o) = 0$ par $h(o) \geq 0$; le corollaire reste valable dans le cas $h(o) > 0$, si l'on convient alors que tout ensemble de h -mesure nulle est vide : nous ne faisons que traduire le fait évident qu'en tout point a le rapport $\frac{\mu(\mathbb{R}, a)}{\mu(\mathbb{E})}$ est borné (et même inférieur à 1).

3. Nous appliquerons ce corollaire à l'étude des fonctions holomorphes dans la couronne circulaire $C(r_0 \leq |z| < 1)$. La fonction additive d'ensemble la plus simple que l'on puisse associer à $f(z)$ et à un ensemble e quadratiquement mesurable est l'aire décrite par $f(z)$ lorsque z décrit e [chaque valeur ζ de $f(z)$ étant comptée autant de fois qu'elle est prise par $f(z)$ en des points de e distincts ou confondus]. Plus généralement, désignant par $S(r)$ l'aire décrite par $f(z)$ lorsque z décrit la couronne $C_r(r_0 \leq |z| \leq r < 1)$, nous supposons qu'on connaît une fonction $\varphi(r)$ positive et mesurable telle que l'intégrale

$$(1) \quad \int_{r_0}^{\rho} \varphi(r) dS(r) = \int_{r_0}^{\rho} \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 \varphi(r) r dr d\theta$$

reste bornée par un nombre fixe M lorsque $\rho \rightarrow 1$. (Comme c'est une fonction croissante de ρ , il en résulte qu'elle a une limite.)

Alors, à chaque ensemble e quadratiquement mesurable contenu dans la couronne fermée $C_1(r_0 \leq |z| \leq 1)$, nous attachons la charge représentée par l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes

$$\mu(e) = \int_{r_0}^1 \varphi(r) ds(r) = \iint_e |f'(re^{i\theta})|^2 \varphi(r) d\omega,$$

$s(r)$ étant l'aire décrite par $f(z)$ lorsque z décrit la portion de e située dans C_r , et $d\omega$ l'élément d'aire du plan z . Sur tout ensemble e' extérieur à la couronne C_1 , nous prendrons $\mu(e') = 0$.

LEMME. — D'après notre corollaire : en tout point a de la circonférence $K(|z| = 1)$, excepté au plus sur un ensemble de h -mesure nulle, le rapport $\frac{\mu(\mathbb{R}, a)}{h(\mathbb{R})}$ est borné par un nombre $m(a)$.

Ceci n'aura évidemment d'intérêt que si la totalité de K n'est pas de h -mesure nulle : donc, puisque K a la dimension 1, si $\frac{h(R)}{R}$ reste borné inférieurement lorsque $R \rightarrow 0$.

4. Soient alors : $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ une suite quelconque de points de la couronne C' telle que $r_n \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$, et $a = e^{i\theta_0}$ un point non exceptionnel de K . Dès que $r_n > \frac{2r_0 + 1}{3}$ la fonction $f(z)$ est holomorphe dans le cercle γ_n de centre z_n , de rayon $\frac{1-r_n}{2}$ et, d'après un théorème de M. Bieberbach (voir P. MONTEL [2], p. 98), l'aire décrite par $f(z)$ lorsque z décrit γ_n est

$$S(z_n) = \pi \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1-r_n}{2} \right)^{2p} \frac{p}{(p!)^2} |f^{(p)}(z_n)|^2.$$

Nous supposons que, dans γ_n , [pour $\frac{1-r_n}{2} \leq 1-r \leq \frac{3}{2}(1-r_n)$], le rapport $\frac{\varphi(r)}{\varphi(r_n)}$ reste borné inférieurement par un nombre $k > 0$ indépendant de r_n . [Remarquons que lorsque $r \rightarrow 1$, $\varphi(r)$ peut, selon les cas, tendre vers zéro, ou $+\infty$, ou n'avoir aucune limite.] La charge portée par γ_n est alors supérieure à $k\varphi(r_n)S(z_n)$. D'autre part γ_n est contenu dans le cercle de centre a , de rayon $R = \frac{3}{2}|z_n - a|$. Supposons la croissance de $h(R)$ assez régulière pour que le rapport $\frac{h\left(\frac{3R}{2}\right)}{h(R)}$ reste borné supérieurement par un nombre k_1 lorsque $R \rightarrow 0$. D'après le lemme, la charge portée par γ_n est inférieure à

$$\mu\left(\frac{3}{2}|z_n - a|, a\right) < m(a) \times k_1 h(|z_n - a|),$$

d'où

$$(2) \quad k\varphi(r_n)S(z_n) < m(a)k_1 h(|z_n - a|).$$

Mais si l'intégrale (1) est bornée, il est possible de trouver une fonction $\varphi_1(r)$ telle que l'intégrale $\int_{r_0}^r \varphi_1(r) dS(r)$ soit aussi bornée, et que $\frac{\varphi_1(r)}{\varphi(r)} \rightarrow \infty$ lorsque $r \rightarrow 1$.

En effet, nous pouvons toujours supposer, en supprimant au besoin une partie des éléments de la suite z_n , que $1 - r_{n+1} < \frac{1 - r_n}{3}$. Alors le cercle γ_n est tout entier contenu dans la couronne $\frac{3r_n - 1}{2} \leq r \leq \frac{3r_{n+1} - 1}{2}$.

$$\text{Posons } u_n = \int_{\frac{1-r_{n+1}}{2}}^{\frac{1-r_n}{2}} \varphi(r) dS(r).$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est convergente en même temps que l'intégrale (1). Il est possible de trouver une série $\sum v_n$ convergente telle que $v_n = \frac{u_n}{\varepsilon_n}$, et que la suite ε_n tende vers zéro en décroissant. Il suffit de prendre $v_n = \sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}$, R_n désignant le reste de la série $\sum u_i$ lorsqu'on s'arrête au terme u_n , soit $R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i$. La suite R_n tend vers zéro en décroissant, donc aussi ε_n . En effet,

$$v_n = \frac{R_{n-1} - R_n}{\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}} = \frac{u_n}{\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}}, \quad \text{d'où } \varepsilon_n = \sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}.$$

Dans chaque intervalle $\frac{3r_n - 1}{2} \leq r < \frac{3r_{n+1} - 1}{2}$ nous prendrons $\varphi_1(r) = \frac{\varphi(r)}{\varepsilon_n}$. A l'intérieur de γ_n , $\frac{\varphi_1(r)}{\varphi(r)}$ reste constant, donc

$$\frac{\varphi_1(r)}{\varphi_1(r_n)} = \frac{\varphi(r)}{\varphi(r_n)} \geq h,$$

et $\varphi_1(r)$ satisfait aux mêmes conditions que $\varphi(r)$.

THEOREME. — *En appliquant l'inégalité (2) à $\varphi_1(r)$ on voit qu'en tout point a de K excepté au plus sur un ensemble de h -mesure nulle,*

$$\frac{\varphi(r_n) S(z_n)}{h(|z_n - a|)} \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty,$$

ou en utilisant les notations de Landau

$$(3) \quad S(z) = o\left[\frac{h(|z - a|)}{\varphi(r)}\right], \quad \text{lorsque } r \rightarrow 1$$

[ceci sans même supposer que z tende vers a] en posant

$$r = |z|; \quad S(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1-r}{2} \right)^{2\nu} \frac{\rho}{(\rho!)^2} |f^{(\nu)}(z)|^2.$$

Remarquons que si $\varphi(r) = 1$, on peut prendre pour γ_n le cercle de centre z_n , de rayon $1 - r_n$ (au lieu de $\frac{1-r_n}{2}$), et (3) reste exact avec

$$S(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (1-r)^{2\nu} \frac{\rho}{(\rho!)^2} |f^{(\nu)}(z)|^2,$$

ce qui donne un résultat un peu plus précis.

La formule (3) nous donne immédiatement une limitation des dérivées de $f(z)$

$$(4) \quad f^{(\nu)}(z) = o \left[\frac{\sqrt{h(|z-a|)}}{(1-r)^\nu \sqrt{\varphi(r)}} \right].$$

Il suffirait d'ailleurs de connaître la limitation de la dérivée première pour pouvoir en déduire toutes les autres au moyen de l'intégrale de Cauchy. Mais la formule (3) a l'avantage de fournir une limitation simultanée de toutes les dérivées.

5. *Exemples.* — a. Prenons $h(R) = 1$; on voit que

$$(1-r)f'(z)\sqrt{\varphi(r)} \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } r \rightarrow 1.$$

En particulier si l'on peut prendre $\varphi(r) = 1$, c'est-à-dire si l'aire décrite par $f(z)$ est bornée,

$$(1-r)f'(z) \rightarrow 0.$$

Il est à remarquer que dans l'hypothèse beaucoup moins restrictive où l'aire $\Sigma(r)$ couverte par $f(z)$ lorsque z décrit C_r [chaque valeur ζ de $f(z)$ étant comptée une seule fois] reste bornée lorsque $r \rightarrow 1$, la seule application du théorème de M. A. Bloch (voir P. MONTÉL [2], p. 110) montre déjà que $(1-r)|f'(z)|$ reste borné lorsque $r \rightarrow 1$.

b. Prenons $h(R) = R$. En tout point a d'une plénitude de K (l'ensemble exceptionnel étant de mesure linéaire nulle) on aura

$$f'(z) = o \left[\frac{\sqrt{|z-a|}}{(1-r)\sqrt{\varphi(r)}} \right].$$

Cette limitation, établie par M. Denjoy pour $\varphi(r) = 1$, d'abord ^[1] quand z tend vers a dans un angle d'approximation, puis ^[3] quand z tend vers a sur un chemin ayant avec K un contact d'ordre maximum inférieur à 1, a été généralisée par M. Dufresnoy ⁽¹⁾ pour les fonctions $\varphi(r) = (1-r)^{1-\delta}$ ($0 < \delta < 1$). M. Wolff ^[4], en se limitant à $\varphi(r) = 1$, l'a étendue au cas où z tend vers a sur une courbe convexe dans la direction Oa et de forme donnée. La méthode que nous avons employée permet de s'affranchir de toute hypothèse sur la manière dont z s'approche de K puisqu'il n'est même pas nécessaire de supposer que z tende vers a .

Courbes restant rectifiables dans la transformation $\zeta = f(z)$.

6. De ces limitations de $|f'(z)|$ nous pouvons déduire des limitations de la longueur de la courbe décrite par le point $\zeta = f(z)$ lorsque z décrit un arc de Jordan rectifiable donné L aboutissant en a . En particulier :

a. Si la fonction $\varphi(r)$ peut être choisie de manière que

$$\int_0^{1-\rho} \sqrt{\frac{h(R)}{\varphi(1-R)}} \frac{dR}{R} < \infty$$

pour tout point a de K excepté au plus sur un ensemble de h -mesure nulle, la longueur de la courbe décrite par $f(z)$ lorsque z décrit dans C' un arc de Jordan L_1 rectifiable atteignant K en a sous une incidence aiguë, est finie; $f(z)$ a donc une limite finie α lorsque $z \rightarrow a$ dans un angle d'approximation $\left[\left| \text{Arg} \left(1 - \frac{z}{a} \right) \right| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right]$ et la longueur de l'arc $\widehat{\zeta, \alpha}$ décrit par $f(z)$ lorsque z décrit l'arc $\widehat{z, a}$ de L_1 est égale à

$$\circ \left[\int_0^{1-\rho} \sqrt{\frac{h(R)}{\varphi(1-R)}} \frac{dR}{R} \right] \quad (\rho = |z_1|).$$

b. Plus généralement si

$$\int_0^{1-\rho} \sqrt{\frac{h(R)}{\varphi[1-\psi(R)]}} \frac{dR}{R} < \infty,$$

(1) J. DUFRESNOY, *C. R. Acad. Sc.*, t. 213, 1941, p. 393.

pour une h -plénitude de points a de K , la longueur de la courbe décrite par $f(z)$ lorsque z décrit la courbe $L_\psi[1 - |z| = \psi(|z - a|)]$, est finie, et $f(z)$ tend vers une limite unique finie α lorsque z tend vers a dans le domaine Δ_ψ limité par L_ψ .

7. Nous allons maintenant indiquer une autre méthode qui permet l'étude directe des courbes L de C_1 restant rectifiables dans la transformation $\zeta = f(z)$. Nous fixerons à l'avance la *forme* des courbes L , ce qui nous permettra de mieux préciser l'ensemble des courbes exceptionnelles de forme donnée.

Soit tout d'abord $L(r)$ la longueur de la courbe décrite par $f(z)$ lorsque z décrit le cercle $|z| = r$. En appliquant à $L^2(r)$ l'inégalité de Schwarz, on a

$$L^2(r) = \left[\int_0^{2\pi} |f'(r e^{i\theta})| r d\theta \right]^2 \leq 2\pi r \int_0^{2\pi} |f'(r e^{i\theta})|^2 r d\theta,$$

$$(5) \quad \int_{r_0}^1 L^2(r) \varphi(r) \frac{dr}{r} \leq \int_{r_0}^1 \int_0^{2\pi} \varphi(r) |f'(r e^{i\theta})|^2 r dr d\theta \leq M.$$

Soit $H(r)$ une fonction positive, continue, non décroissante quelconque dans l'intervalle $r_0 \leq r < 1$ telle que

$$\int_{r_0}^\rho H(r) dr \rightarrow +\infty, \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 1.$$

On peut dire que les valeurs de r pour lesquelles $L^2(r) \varphi(r) > \varepsilon H(r)$ forment un ensemble exceptionnel e_ε très rare au voisinage de $r = 1$. Précisons cette expression : quels que soient ε et ε' , on peut trouver un nombre η assez petit pour que

$$\int_{1-\eta}^1 L^2(r) \varphi(r) dr < \varepsilon \varepsilon'.$$

L'ensemble e_ε est mesurable (puisque la fonction $\varphi(r)$ est mesurable) et si l'on désigne par $e_{\varepsilon, \eta}$ la portion de e_ε comprise dans l'intervalle : $1 - \eta \leq r \leq 1$,

$$\int_{e_{\varepsilon, \eta}} H(r) dr < \varepsilon'.$$

En particulier si $H(r) = \frac{1}{1-r}$, on peut dire que $L(r) \sqrt{\frac{\varphi(r)}{1-r}} \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow 1$ si l'on néglige un ensemble de valeurs de r sur lequel $\int_{r_0}^1 \frac{dr}{1-r}$ est aussi petit qu'on le veut.

(On pourrait dire : en négligeant un ensemble d'épaisseur logarithmique gauche nulle au point $r=1$). Il est à remarquer que la convergence que nous venons de définir est plus forte que la convergence *approximative* définie par M. Denjoy. Celle-ci en effet correspond au cas où la mesure $m(\varepsilon, \eta)$ de la portion $e_{\varepsilon, \eta}$ de l'ensemble exceptionnel satisfait à $\frac{m(\varepsilon, \eta)}{\eta} \rightarrow 0$ si $\eta \rightarrow 0$, ε étant fixé, et on a évidemment

$$\frac{1}{\eta} m(\varepsilon, \eta) = \frac{1}{\eta} \int_{e_{\varepsilon, \eta}} dr < \int_{e_{\varepsilon, \eta}} \frac{dr}{1-r}.$$

8. Soit maintenant $l(\rho, \theta)$ la longueur de la courbe décrite par le point $\zeta = f(z)$ lorsque z décrit le segment de rayon $\text{Arg } z = \theta$, $r_0 \leq |z| \leq \rho$. En vertu de l'inégalité de Schwarz, on aura

$$l^2(\rho, \theta) = \left[\int_{r_0}^{\rho} |f'(r e^{i\theta})| dr \right]^2 \leq \int_{r_0}^{\rho} \varphi(r) |f'(r e^{i\theta})|^2 r dr \int_{r_0}^{\rho} \frac{dr}{r \varphi(r)},$$

$$(6) \quad \int_0^{2\pi} l^2(\rho, \theta) d\theta \leq \frac{M}{r_0} \int_{r_0}^{\rho} \frac{dr}{\varphi(r)} = \frac{M}{r_0} \Phi(\rho).$$

Si la fonction $\Phi(\rho)$ est bornée lorsque $\rho \rightarrow 1$, c'est-à-dire si l'intégrale $\int_{r_0}^1 \frac{dr}{\varphi(r)}$ est convergente, il résulte de l'inégalité (6) que $l(\rho, \theta)$ reste bornée, et, puisque c'est une fonction croissante de ρ , a une limite finie si $\rho \rightarrow 1$, θ étant fixé, excepté au plus pour un ensemble de valeurs de θ de mesure linéaire nulle. Alors la courbe décrite par $f(z)$ lorsque z décrit un rayon non exceptionnel ($\text{Arg } z = \theta$) est rectifiable et aboutit en un point α bien déterminé. Le même résultat n'aurait été obtenu, si l'on était passé par l'intermédiaire de la limitation de $|f(z)|$, que dans l'hypothèse plus restrictive

$$\int_{r_0}^1 \frac{dr}{\sqrt{(1-r)\varphi(r)}} < \infty. \quad (\text{considérer le cas } \varphi(r) = (1-r) \log^2(1-r)).$$

On montrerait plus généralement que, pour une plénitude de valeurs de θ , la longueur de la courbe décrite par $\zeta = f(z)$, lorsque z décrit la courbe $L_k(\theta) : \text{Arg} z = \theta + k(1 - |z|)$, $r_0 \leq |z| \leq 1$, est finie quel que soit le nombre k donné ($-\infty < k < +\infty$). Plus précisément si l'on désigne par $l_0(\rho, \theta) = l(1, \theta) - l(\rho, \theta)$ la longueur de l'arc $\widehat{\zeta, \alpha}$ décrit par ζ lorsque z décrit l'arc $\widehat{z, a}$ de $L_k(\theta)$ défini par $\rho \leq |z| \leq 1$ et si l'on pose $\Phi_0(\rho) = \Phi(1) - \Phi(\rho)$, on aura

$$l_0(\rho, \theta) = o[\sqrt{\Phi_0(\rho)}].$$

9. Dans toute la suite de cette étude nous supposerons, pour une raison de commodité, que la fonction $f(z)$ est définie et holomorphe dans la bande de plan B de la variable $z = x + iy$ définie par $x_0 \leq x < \infty$ et satisfait à une condition d'aire de la forme

$$(7) \quad \int_0^{t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) |f'(x + iy)|^2 dx dy = \int_0^{t_0} \psi(x) dS(x) < M < \infty,$$

$\psi(x)$ étant une fonction positive mesurable de x et $S(x)$ l'aire décrite par $f(z)$ lorsque z décrit la bande : $x \leq \text{R}(z) \leq x_0$.

Si nous posons $w = re^{i\theta} = \frac{z-1}{z+1}$, la variable w décrit la région comprise entre deux cercles tangents au point $w = -1$. Lorsque z tend vers un point $a = it$ de l'axe $y'y$ ($-\infty < t < +\infty$), w tend vers le point $b = \frac{t+i}{t-i}$ de la circonférence $K(|w|=1)$; $1 - |w|$ est un infiniment petit équivalent à $\frac{x}{1+t^2}$, et $|w - b|$ à $\frac{2|z-a|}{1+t^2}$. Nous pourrions donc appliquer les résultats de l'étude précédente à la fonction $f(z) = F(w)$. Pour montrer comment se transforment les énoncés, reprenons la démonstration du paragraphe précédent.

Soit $l(\xi, t)$ la longueur de la courbe décrite par $\zeta = f(z)$ lorsque $z = x + iy$ décrit le segment $y = t$, $x_0 \leq x \leq \xi$,

$$(8) \quad l^2(\xi, t) = \left[\int_{\xi}^{x_0} |f'(x + it)| dx \right]^2 \leq \int_{\xi}^{x_0} |f'(x + it)|^2 \psi(x) dx \int_{\xi}^{x_0} \frac{dx}{\psi(x)},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} l^2(\xi, t) dt \leq M \int_{\xi}^{x_0} \frac{dx}{\psi(x)} = M\Psi(\xi).$$

Si la fonction $\psi(x)$ peut être choisie de manière que

$$(9) \quad \Psi(0) = \int_0^{x_0} \frac{dx}{\psi(x)} < \infty$$

pour une plénitude de points $a = it$ de l'axe $y'y$, $l(\xi, t)$ a une limite finie lorsque $\xi \rightarrow 0$, et la courbe décrite par ζ lorsque z décrit le segment $y = t$, $x_0 \geq x \geq 0$, est rectifiable et aboutit en un point α bien déterminé. Il en est alors de même des images des segments $L_k(t)$ définis par $y = t = kx$, $x_0 \geq x \geq 0$, k étant fixé ($-\infty < k < +\infty$).

10. Soit maintenant $a = it$ un point donné de $y'y$. Nous désignerons par $c_{\rho, a}$ la demi-circonférence $|z - a| = \rho$, $|\text{Arg}(z - a)| < \frac{\pi}{2}$, et par $\lambda(\rho, \theta_0, a)$ la longueur de la courbe décrite par $\zeta = f(z)$ lorsque z décrit l'arc de $c_{\rho, a}$ défini par $|\text{Arg}(z - a)| \leq \theta_0$. En appliquant l'inégalité de Schwarz, on aura

$$\begin{aligned} \lambda^2(\rho, \theta_0, a) &= \left[\int_{-\theta_0}^{+\theta_0} |f'(a + \rho e^{i\theta})| \rho d\theta \right]^2 \\ &\leq \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \psi(\rho \cos \theta) |f'(a + \rho e^{i\theta})|^2 \rho d\theta \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{\rho d\theta}{\psi(\rho \cos \theta)}. \end{aligned}$$

Posons $g(\rho, \theta_0) = \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{\rho d\theta}{\psi(\rho \cos \theta)}$,

$$(10) \quad \int_0^R \frac{\lambda^2(\rho, \theta_0, a)}{g(\rho, \theta_0)} d\rho \leq \int_0^R \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \psi(\rho \cos \theta) |f'(a + \rho e^{i\theta})|^2 \rho d\rho d\theta \leq \mu(R, a) \leq M,$$

en désignant toujours par $\mu(R, a)$ la charge portée par le cercle de centre a de rayon R .

Applications. — Supposons que $g(\rho, \theta_0)$ reste borné, et par conséquent ait une limite $g(\rho)$ lorsque $\theta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, soit

$$(11) \quad g(\rho) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho d\theta}{\psi(\rho \cos \theta)} < \infty.$$

a. L'inégalité (10) montre qu'en tout point a : $\int_0^R \frac{\lambda^2(\rho, \theta_0, a)}{g(\rho)} d\rho \leq M$, donc $\lambda(\rho, \theta_0, a)$ tend vers une limite finie $\bar{\lambda}(\rho, a)$ lorsque $\theta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, excepté au plus pour un ensemble e de valeurs de ρ sur lequel

$$(12) \quad \int_e \frac{d\rho}{g(\rho)} = 0.$$

C'est-à-dire que, pour une plénitude de valeurs de ρ , la courbe transformée de $c_{\rho, a}$ (du moins des arcs de $c_{\rho, a}$ contenus dans B) est rectifiable et a une longueur finie. Si l'on remarque que les intégrales (9) et (11) sont simultanément convergentes ou divergentes, nous trouvons un résultat voisin de celui du paragraphe précédent.

Si $R \rightarrow 0$, $\int_0^R \frac{\lambda^2(\rho, a)}{g(\rho)} d\rho \rightarrow 0$ (car $\mu(R, a) \rightarrow 0$).

Ceci montre que $\lambda(\rho, a) \rightarrow 0$ si $\rho \rightarrow 0$, en négligeant un ensemble e satisfaisant à (12); ce qui est intéressant lorsque

$$\int_\varepsilon^R \frac{d\rho}{g(\rho)} \rightarrow +\infty \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Nous retrouvons un mode de convergence déjà rencontré (plus forte que la convergence approximative).

b. En tout point a d'une h -plénitude de $y'y$, le rapport $\frac{\mu(R, a)}{h(R)}$ est borné par un nombre $m(a)$. Donc on a

$$(13) \quad \frac{1}{h(R)} \int_0^R \frac{\lambda^2(\rho, a)}{g(\rho)} d\rho < m(a).$$

$H(\rho)$ étant une fonction positive mesurable quelconque de ρ , il résulte de (13) que le rapport $\frac{\lambda^2(\rho, a)}{H(\rho) g(\rho)}$ est borné, excepté au plus pour un ensemble e de valeurs de ρ tel que

$$(14) \quad \frac{1}{h(R)} \int_{e_R} H(\rho) d\rho = 0,$$

e_R désignant la portion de e contenue dans l'intervalle $0 \leq \rho \leq R$.

Mais, en remplaçant $\psi(x)$ par une fonction $\psi_1(x)$ telle que $\frac{\psi_1(x)}{\psi(x)} \rightarrow \infty$ et que l'intégrale (7) reste convergente, on voit, en appliquant le calcul précédent à la fonction $\psi_1(x)$, que

$$(15) \quad \text{si } \rho \rightarrow 0, \quad \lambda(\rho, a) = o[\sqrt{g(\rho) \Pi(\rho)}]$$

en négligeant un ensemble e de valeurs de ρ satisfaisant à (14).

Nous trouvons un mode de convergence généralisant la convergence approximative. En particulier si $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $H(\rho) = 1$, nous pouvons dire que $\frac{\lambda^2(\rho, a)}{g(\rho)} \rightarrow 0$ approximativement (au sens de M. Denjoy) pour une plénitude de points a , ou plus généralement, si $g(\rho, \theta_0)$ n'est pas nécessairement borné, que pour θ_0 fixé, $\frac{\lambda^2(\rho, \theta_0, a)}{g(\rho, \theta_0)} \rightarrow 0$.

Si les intégrales (9) et (11) convergent, il en résulte que les limites de $f(z)$ sur les segments $L_n(t)$ aboutissant au point $a = ut$ (voir § 9) sont, pour une plénitude de valeurs de t , indépendantes de k : donc $f(z)$ a une limite unique α si $z \rightarrow a$ dans un angle d'approximation [$|\text{Arg}(z - a)| < \theta_0$].

Extensions possibles.

11. D'après une méthode indiquée par M. Dufresnoy ⁽¹⁾, ces résultats peuvent s'étendre aux fonctions *méromorphes* dans la couronne $C'(r_0 \leq |z| < 1)$ à condition de remplacer partout les mots « aire », « longueur » et « dérivée » par « aire sphérique », « longueur sphérique » et « dérivée sphérique » et « limite finie » par « limite finie ou infinie ». Il faut pourtant faire une restriction. On ne connaît pas, en effet, pour l'aire sphérique, de théorème comparable à celui de M. Bieberbach. Le lemme de M. Dufresnoy ⁽²⁾ permet de montrer que, si $S(z_n)$ est l'aire sphérique décrite par $f(z)$ lorsque z décrit le cercle γ_n de centre z_n et de rayon $\frac{1-r_n}{2}$ (voir § 4),

$$\frac{1-r_n}{2} \frac{|f'(z_n)|}{1+|f(z_n)|^2} \leq \sqrt{\frac{S(z_n)}{1-S(z_n)}}$$

⁽¹⁾ C. R. Acad. Sc., t. 213, 1941, p. 393.

⁽²⁾ C. R. Acad. Sc., t. 212, 1941, p. 662.

ou en posant $\delta(z) = \frac{(1-r)|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$,

$$\frac{\delta^2(z_n)}{4+\delta^2(z_n)} \leq S(z_n) \leq \mu\left(\frac{3}{2}, |z_n - a|, a\right) \times \frac{1}{h\varphi(r_n)}.$$

Donc pour une h -plénitude de points a de \mathbb{K}

$$\frac{\delta^2(z)}{4+\delta^2(z)} = o\left[\frac{h(|z-a|)}{\varphi(r)}\right].$$

Le premier membre étant toujours inférieur à 1, cette inégalité ne sera intéressante que si $\frac{h(|z-a|)}{\varphi(r)}$ reste borné dans les conditions de variation de z envisagées. Alors le premier membre est un infiniment petit équivalent à $\frac{\delta^2(z)}{4}$ et l'on a une généralisation de (4), valable pour la dérivée première seulement

$$(16) \quad \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} = o\left[\frac{\sqrt{h(|z-a|)}}{(1-r)\sqrt{\varphi(r)}}\right].$$

Le cas $\varphi(r) = 1-r$ correspond aux fonctions méromorphes à caractéristique bornée. Les limitations obtenues ne permettent pas de démontrer le théorème de Fatou. Il ne faut pas s'en étonner, car $f(z)$ peut avoir une limite radiale (finie ou infinie) sans que la longueur sphérique de la courbe décrite par $f(z)$ lorsque z décrit le rayon Oa ($\text{Arg } z = \theta_0$) soit finie. Par contre en prenant $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, pour une plénitude de points a de \mathbb{K} ,

$$\frac{(1-r)|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \rightarrow 0 \quad \text{si } z \rightarrow a \text{ angulairement } \left(\frac{|z-a|}{1-r} \text{ borné}\right).$$

Si l'on admet que $f(z)$ a une limite α lorsque $z \rightarrow a$ sur le rayon Oa , on en déduit que $f(z)$ a même limite lorsque $z \rightarrow a$ dans un angle d'approximation, sans utiliser la représentation canonique de $f(z)$, quotient de deux fonctions bornées auxquelles on applique le théorème de Montel-Lindelöf.

Les limitations obtenues pour les longueurs des courbes décrites par le point $\zeta = f(z)$ s'étendent sans difficulté aux courbes décrites par le point représentatif de $f(z)$ sur la sphère de Riemann.

12. L'aire décrite par $f(z)$ n'est pas la seule fonction additive d'ensemble qui puisse servir pour l'étude de $f(z)$. Nous nous contenterons de donner un exemple :

Supposons connue une fonction $\tilde{\varphi}(r)$ mesurable positive telle que

$$(17) \quad \int_{r_0}^1 \int_0^{2\pi} \varphi(r) |f'(r e^{i\theta})| r dr d\theta = \int_{r_0}^1 \varphi(r) L(r) dr < M,$$

$L(r)$ étant la longueur de la courbe décrite par $f(\bar{z})$ quand z décrit le cercle $|z| = r$. Alors, à tout ensemble quadratiquement mesurable e de la couronne $C_1(r_0 \leq |z| \leq 1)$, nous attacherons la charge

$$\mu(e) = \iint_e \varphi(r) f'(z) d\omega.$$

THÉORÈME. — *Nous allons montrer que, pour une h-plénitude de points a de K ,*

$$(18) \quad f'(z) = o \left[\frac{h(|z - a|)}{(1 - r)^2 \varphi(r)} \right],$$

les fonctions $h(R)$ et $\varphi(r)$ devant satisfaire aux mêmes conditions de régularité de croissance que précédemment.

La seule difficulté de la démonstration consiste à trouver une borne supérieure de $|f'(z_n)|$ au moyen de la charge $\mu(\gamma_n)$ portée par le cercle γ_n , de centre z_n et de rayon $\frac{1-r_n}{2}$. Posons, dans γ_n , $z = z_n + \rho e^{i\theta}$,

$$\mu(\gamma_n) = \iint_{\gamma_n} \varphi(r) |f'(z)| d\omega \geq h \varphi(r_n) \int_0^{\frac{1-r_n}{2}} \int_0^{2\pi} |f'(z_n + \rho e^{i\theta})| \rho d\rho d\theta,$$

d'où

$$\mu(\gamma_n) \geq h \varphi(r_n) \int_0^{\frac{1-r_n}{2}} \lambda(\rho) d\rho,$$

$\lambda(\rho)$ désignant la longueur de la courbe décrite par $f(z)$ quand z décrit la circonférence $|z - z_n| = \rho$. Or la surface de Riemann, décrite par $f(z)$ lorsque z décrit le cercle $|z - z_n| \leq \rho$, a une aire

$$S(\rho, z_n) \geq \pi \rho^2 |f'(z_n)|^2,$$

et la longueur $\lambda(\rho)$ de son contour satisfait à

$$\lambda^2(\rho) \geq 4\pi\delta(\rho, z_n) \geq 4\pi^2\rho^2 |f'(z_n)|^2,$$

d'où

$$\mu(\gamma_n) \geq k\varphi(r_n) \int_0^{\frac{1-r_n}{2}} |f'(z_n)| \times 2\pi\rho d\rho = k\varphi(r_n) \frac{(1-r_n)^2}{4} |f'(z_n)|,$$

or

$$\mu(\gamma_n) \leq \mu\left(\frac{3}{2}|z_n - a|, a\right) \leq m(a)h\left(\frac{3}{2}|z_n - a|\right) < m(a)k_1 h(|z_n - a|).$$

En appliquant ces deux inégalités à une fonction $\varphi_1(r)$ telle que $\frac{\varphi_1(r)}{\varphi(r)} \rightarrow \infty$ lorsque $r \rightarrow 1$, et satisfaisant aux mêmes conditions que $\varphi(r)$, on voit que

$$\frac{(1-r)^2 |f'(z)| \varphi(r)}{h(|z-a|)} \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } r \rightarrow 1. \quad \text{c. q. f. d.}$$

La même méthode donne également une limitation des dérivées d'ordre quelconque de $f(z)$

$$f^{(p)}(z) = o\left[\frac{h(|z-a|)}{(1-r)^{p+1}\varphi(r)}\right].$$

En particulier, pour une plénitude de points a [$h(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$],

$$f^{(p)}(z) \frac{(1-r)^{p+1}}{|z-a|} \varphi(r) \rightarrow 0.$$

EXEMPLE. — Si $L(r)$ est bornée, nous pouvons prendre pour $\varphi(r)$ n'importe quelle fonction positive telle que

$$\int_{r_0}^1 \varphi(r) dr < \infty.$$

Pour une plénitude de points a , lorsque $z \rightarrow a$ dans un angle d'approximation, on aura

$$f'(z) = o\left[\frac{1}{(1-r)\varphi(r)}\right], \quad \text{d'où si } \varphi(r) = (1-r)^{1-\delta}, \quad f'(z) = o[(1-r)^{-\delta}],$$

quel que soit $\delta > 0$. Mais dans ce cas le théorème de Fatou, applicable à $f'(z)$, montre que $f'(z)$ a une limite unique finie lorsque $z \rightarrow a$ angulairement, pour une plénitude de points a de \mathbf{K} .

CHAPITRE II.

APPLICATIONS A LA REPRÉSENTATION CONFORME.

13. Nous allons maintenant nous limiter au cas des fonctions $\zeta = f(z)$ méromorphes et univalentes dans le demi-plan droit $D(x > 0)$ de la variable $z = x + iy$. La fonction $f(z)$ réalise la représentation conforme de D sur un domaine simplement connexe Δ du plan de la variable $\zeta = \xi + i\eta$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer $f(z)$ holomorphe et bornée dans une bande $B(0 < x \leq x_0)$: on remplacerait au besoin $f(z)$ par $\frac{1}{f(z) - f(z_1)}$, z_1 étant un point intérieur au demi-plan $x > x_0$. L'aire décrite par $f(z)$ quand z décrit B est alors bornée par un nombre M , et nous pouvons appliquer les résultats du chapitre précédent en faisant $\psi(x) = 1$. Mais nous allons voir que la nouvelle hypothèse d'univalence permet de les préciser et de les interpréter géométriquement comme des propriétés de la représentation conforme.

Nous ferons fréquemment appel dans cette étude au théorème de Kœbe (voir P. MONTEL * [2], p. 52), d'un point de vue que M. Wolff * [1] a introduit avec succès dans ce genre de recherches.

Si la fonction $f(z)$ est holomorphe et univalente dans le cercle $|z| < R$, pour $|z| \leq kR$ ($k < 1$), on a

$$\frac{1-k}{(1+k)^2} \leq \left| \frac{f'(z)}{f'(0)} \right| \leq \frac{1+k}{(1-k)^2},$$

en particulier (si $k = \frac{1}{2}$), le rapport $\left| \frac{f'(z)}{f'(0)} \right|$ reste compris entre deux constantes absolues K, K' , lorsque $|z| \leq \frac{R}{2}$.

Nous appliquerons ceci à une fonction $f(z)$ holomorphe univalente dans un domaine D , de la façon suivante : si z_0 est un point intérieur à D situé à la distance d de la frontière

$$|z - z_0| \leq \frac{d}{2} \quad \text{entraîne} \quad K \leq \left| \frac{f'(z)}{f'(z_0)} \right| \leq K'.$$

Correspondance entre les frontières.

14. Soit $a = it$ un point quelconque de l'axe $y'y$ limitant D. Étudions $f(z)$ au voisinage de $z = a$.

Si $\lambda(\rho, \theta_0, a)$ désigne la longueur de l'image dans la représentation conforme de l'arc de cercle $|z - a| = \rho, |\text{Arg}(z - a)| \leq \theta_0$ (contenu dans B si $\rho \leq x_0, \theta_0 < \frac{\pi}{2}$), nous aurons

$$(19) \quad \int_0^R \lambda^2(\rho, \theta_0, a) \frac{d\rho}{\rho} < \pi\mu(R, a) < \pi M \quad (R \leq x_0).$$

Si θ_0 croit jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, $\lambda(\rho, \theta_0, a)$ qui est une fonction croissante de θ_0 tend vers une limite finie $\lambda(\rho, a)$ excepté au plus pour un ensemble ε de valeurs de ρ sur lequel $\int_\varepsilon \frac{d\rho}{\rho} = 0$, et l'on a

$$(20) \quad \int_0^R \lambda^2(\rho, a) \frac{d\rho}{\rho} \begin{cases} < \pi M, & \text{si } R \leq x_0; \\ \rightarrow 0, & \text{si } R \rightarrow 0. \end{cases}$$

Donc $\lambda(\rho, a) \rightarrow 0$ si $\rho \rightarrow 0$ en négligeant un ensemble e de valeurs de ρ tel que si e_R désigne la portion de e contenue dans l'intervalle $0 \leq \rho \leq R$

$$\int_{e_R} \frac{d\rho}{\rho} \rightarrow 0 \quad \text{si } R \rightarrow 0.$$

THEOREME. — *Nous pourrions donc trouver une suite infinie décroissante ρ_n de valeurs de ρ telle que $\rho_n \rightarrow 0$ et $\lambda(\rho_n, a) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.*

Nous pourrions même imposer à la suite ρ_n la condition supplémentaire $\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} \rightarrow 1$, mais ceci ne nous servira pas pour le moment.

Si en effet il n'existait pas de telle suite, on pourrait trouver deux nombres positifs : k, ε , et une suite infinie d'intervalles disjoints δ_i : $\rho'_i \geq \rho \geq \rho''_i$, sur lesquels $\lambda(\rho, a) > \varepsilon$, et tels que $\log \frac{\rho'_i}{\rho''_i} > k > 0$.

Alors

$$\int_{\rho'_i}^{\rho'_i} \lambda^2(\rho, a) \frac{d\rho}{\rho} > \sum_{i=1}^{i=n} \int_{\rho''_i}^{\rho'_i} \lambda^2(\rho, a) \frac{d\rho}{\rho} > nk\varepsilon^2.$$

et l'intégrale (20) ne saurait être bornée. Donc la suite existe.

15. La suite ρ_n étant déterminée, les demi-cercles $c_{\rho_n, a} (|z - a| = \rho_n, |\text{Arg}(z - a)| < \frac{\pi}{2})$ ont pour images des coupures rectifiables q_n du domaine Δ , joignant deux points accessibles de la frontière de Δ . (Un point frontière est accessible s'il existe un arc simple de Jordan intérieur à Δ aboutissant en ce point; à fortiori les extrémités d'une coupure rectifiable de longueur finie sont accessibles.) Deux coupures quelconques ne peuvent avoir aucun point commun intérieur à Δ puisqu'il y a correspondance biunivoque entre l'intérieur de Δ et l'intérieur de D . Ces coupures définissent une suite de domaines emboîtés $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \Delta_{n+1} \supset \dots$, Δ_n étant le domaine décrit par $f(z)$ lorsque z décrit l'intérieur du demi-cercle $c_{\rho_n, a}$. Chaque coupure q_n sépare la précédente q_{n-1} de la suivante q_{n+1} . Tout point intérieur à Δ finit par être, lorsque n est assez grand, extérieur à Δ_n . Les fermetures $\overline{\Delta}_n$ des domaines Δ_n ont en commun un ensemble E continu de points frontières de Δ que nous appellerons d'après M. Carathéodory * [1, p. 323] un *bout* (Ende) de la frontière Γ . Soit α un point d'accumulation quelconque de l'ensemble des coupures q_n ; α appartient à E ; on peut extraire de la suite q_n une suite partielle q_{n_i} de coupures tendant vers α (puisque la longueur de q_n tend vers zéro). La suite q_{n_i} définit le même bout E : or M. Carathéodory montre qu'un bout E défini par une suite de coupures convergeant vers un point α est indécomposable (il n'existe aucun bout qui soit une partie de E) et il lui donne le nom de *bout premier* (Primende). Le point α est dit *principal*.

Si une suite de points z_p tend vers a dans B , pour p assez grand z_p est intérieur à $c_{\rho_{n_i}, a}$, donc $f(z_p)$ est dans Δ_{n_i} . Donc les points d'accumulation de la suite z_p sont sur E : à un point a de $y'y$ correspond un bout premier $E(a)$.

Réciproquement si une suite de points de $\Delta : \zeta_p = f(z_p)$ tend vers un bout premier E de Γ , la suite z_p tend vers un point déterminé a de $y'y$: car on peut définir le bout au moyen de coupures q'_n convergeant vers un point α , limitant des domaines Δ'_n à l'extérieur desquels il n'existe qu'un nombre fini de points de la suite ζ_p ; un raisonnement devenu classique (voir P. MONTEL * [1, p. 39]) montre que les coupures c'_z du domaine D qui correspondent aux q'_n convergent vers un point a de $y'y$. C. Q. P. D.

Nous voyons ainsi comment s'introduisent très simplement les notions posées par M. Carathéodory, et nous retrouvons le

THEOREME. — *Il y a correspondance biunivoque entre les points a , de l'axe $y'y$ limitant D et les bouts premiers E de la frontière Γ de Δ .*

16. Poussons l'analyse un peu plus loin en étudiant $\lambda(\rho, \theta_0, a)$ pour $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$.

Soit ρ' tel que $\rho \geq \rho' \geq \rho \left(1 - \frac{\cos \theta_0}{2}\right)$. Nous allons montrer que $\frac{\lambda(\rho', \theta_0, a)}{\lambda(\rho, \theta_0, a)}$ est supérieur à un nombre positif fixe.

A tout point $z = a + \rho e^{i\theta} = x + iy$ de $c_{\rho, a}$, nous faisons correspondre le point $z' = a + \rho' e^{i\theta}$ de $c_{\rho', a}$. D'après la façon dont ρ' est choisi, z' est intérieur au cercle de centre z , de rayon $\frac{x}{2}$. Donc

$$\left| \frac{f'(z')}{f'(z)} \right| \geq K; \quad \lambda(\rho', \theta_0, a) = \rho' \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} |f'(a + \rho' e^{i\theta})| d\theta \geq K \frac{\rho'}{\rho} \lambda(\rho, \theta_0, a),$$

$$\frac{\lambda(\rho', \theta_0, a)}{\lambda(\rho, \theta_0, a)} \geq \frac{K}{2}.$$

Nous allons maintenant montrer que si θ_0 reste fixe, $\lambda(\rho, \theta_0, a)$ tend vers zéro avec ρ ; sinon, on pourrait trouver une suite infinie de valeurs de ρ , soit ρ_n , tendant vers zéro, et un nombre ε , tels que $\lambda(\rho_n, \theta_0, a) > \varepsilon$. Posons

$$\rho'_n = \rho_n \left(1 - \frac{\cos \theta_0}{2}\right), \quad \int_{\rho'_n}^{\rho_n} \frac{\lambda^2(\rho, \theta_0, a)}{\rho} d\rho > \frac{K^2}{4} \varepsilon^2 \frac{\cos \theta_0}{2}$$

et l'intégrale (19) ne pourrait tendre vers zéro avec R.

17. Soit alors z_n une suite de points tendant vers $a = it$ (fig. 1) dans un angle $|\text{Arg}(z - a)| \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ telle que $f(z_n) \rightarrow \alpha$. Menons par chaque point z_n les arcs $|z - a| = |z_n - a| = \rho_n$, $|\text{Arg}(z - a)| \leq \theta_0$. Sur une suite quelconque de points z_n'' pris sur ces arcs, $f(z_n'') \rightarrow \alpha$ puisque

$$|f(z_n'') - f(z_n)| < \lambda(\rho_n, \theta_0, \alpha) \rightarrow 0.$$

En particulier on peut prendre $z_n'' = it + \rho_n$, les points z_n'' tendent vers a sur une parallèle à Ox . Or nous savons (Chap. I, § 5)

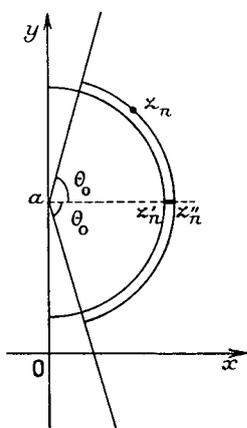


Fig. 1.

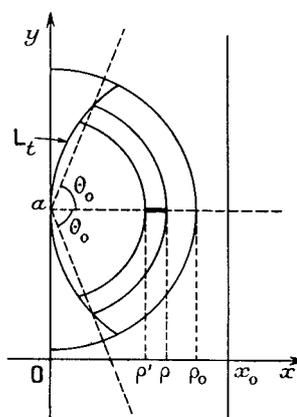


Fig. 2.

que $x f'(z) \rightarrow 0$. Donc la longueur l_n de l'image d'un segment $z_n' z_n''$ de la droite $y = t$ satisfait à

$$l_n = o \left[\log \frac{\rho_n}{\rho_n'} \right] \quad (\rho_n = |z_n'' - a|, \rho_n' = |z_n' - a|, \rho_n' < \rho_n).$$

Donc si $\frac{\rho_n}{\rho_n'}$ est borné $l_n \rightarrow 0$ et $f(z_n')$ tend vers α comme $f(z_n'')$.

Or il résulte de la convergence de l'intégrale (20) que, si $\rho_n \rightarrow 0$, on peut choisir ρ_n' de manière que

$$\frac{\rho_n'}{\rho_n} \rightarrow 1, \quad \lambda(\rho_n', \alpha) \rightarrow 0,$$

par un raisonnement analogue à celui qui a été fait (§ 14). Nous prendrons alors $z_n' = it + \rho_n'$. D'après ce qui précède $f(z_n') \rightarrow \alpha$ et les

coupures q'_n images des demi-cercles $c_{\rho'_n, a}$ convergent vers α . Donc α est un point principal du bout.

Réciproquement, si α est un point principal, il est par définition limite de coupures Q_n définissant le bout (on peut prendre pour Q_n des arcs de cercle de centre α de rayons décroissants). Les images des Q_n dans D sont des coupures C_n limitant une suite de domaines D_n emboîtés. L'ensemble des fermetures \overline{D}_n de ces domaines n'ont en commun que le point a vers lequel convergent les coupures C_n . Prenons, sur chaque coupure C_n , un point z_n ; à la suite z_n correspond une suite $\zeta_n = f(z_n)$ tendant vers α . En particulier on peut choisir les points z_n sur un continu de Jordan arbitraire L issu de a , contenu dans D , puisqu'un tel continu rencontre chaque coupure C_n au moins une fois pour n assez grand. Nous avons le théorème suivant, déjà établi par M. E. Lindelof * [1, p. 28].

THEORÈME. — *L'ensemble des valeurs limites de $f(z)$ lorsque $z \rightarrow a$ sur un continu de Jordan quelconque L contenu dans D contient l'ensemble P des points principaux du bout $E(a)$ et se réduit à P si L est contenu dans un angle $|\text{Arg}(z - a)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ quel que soit $\varepsilon > 0$.*

18. *Remarques.* — *a.* L'ensemble des valeurs limites de $f(z)$ sur un continu L est toujours un continu, donc P est un continu.

b. Il n'est même pas nécessaire pour obtenir tous les points principaux, de prendre un continu L : Soit z_n une suite quelconque de points tendant vers a dans un angle $|\text{Arg}(z - a)| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, telle que, si $\rho_n = |z_n - a|$, on ait : $\frac{\rho_n}{k} < \rho_{n+1} < \rho_n$ ($1 \leq k < \infty$) quel que soit n . Si α est un point principal quelconque, on peut trouver une suite z_p tendant vers a dans l'angle $|\text{Arg}(z - a)| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ telle que $f(z_p) \rightarrow \alpha$. Soit ρ_{n_p} le plus petit nombre de la suite ρ_n au moins égal à $\rho'_p = |z'_p - a|$. On aura $\rho_{n_{p+1}} < \rho'_p \leq \rho_{n_p}$.

On voit facilement que la longueur de l'image du segment $z'_p z_{n_p}$ tend vers zéro [en utilisant la limitation de $|f'(z)|$ du paragraphe 5], donc que $f(z_{n_p}) \rightarrow \alpha$ lorsque $p \rightarrow \infty$; α est donc un point d'accumulation de la suite $f(z_n)$.

THEOREME. — *L'ensemble P des points principaux du bout $E(a)$ est identique à l'ensemble des points limites de la suite $f(z_n)$, pour une suite quelconque z_n tendant vers a dans un angle d'approximation et telle que $\left| \frac{z_n - a}{z_{n+1} - a} \right|$ reste borné.*

COROLLAIRE. — *Si, en particulier, il existe une suite z_n de ce genre sur laquelle $f(z_n)$ ait pour limite unique α , $f(z)$ a même limite sur toute suite tendant vers a dans un angle d'approximation.*

On montrerait dans le même ordre d'idées que si $f(z_n) \rightarrow \alpha$ pour une suite $z_n = x_n + iy_n$ quelconque telle que $\frac{|z_{n+1} - z_n|}{r_n}$ reste borné, $f(z)$ a même limite α si $z \rightarrow a$ dans un angle d'approximation.

19. Signalons, à ce propos, quelques résultats plus généraux concernant les fonctions $f(z)$ supposées seulement holomorphes et bornées dans D au voisinage de $z = a$:

a. Par une méthode ingénieuse, mais un peu longue (qui devient rapide si on utilise la mesure conforme), M. E. Lindelof *[1] a montré que s'il existe dans D un arc de Jordan L aboutissant en a sur lequel $f(z)$ a une seule limite α , $f(z)$ a même limite si $z \rightarrow a$ dans un angle d'approximation.

b. M. Montel *[1, p. 19] a donné de ce fait une démonstration élégante par sa méthode des familles normales. Mais il semble nécessaire de supposer que L est lui-même contenu dans un angle d'approximation. Par contre, sa méthode peut s'étendre facilement, et permet de remplacer le continu L par une suite de points z_n tendant vers a dans un angle $|\text{Arg}(z - a)| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ et telle que $\left| \frac{z_n - a}{z_{n+1} - a} \right| \rightarrow 1$; et même si α est une valeur exceptionnelle (ce qui est toujours le cas pour une fonction univalente) il suffit que $\left| \frac{z_n - a}{z_{n+1} - a} \right|$ reste borné.

L'intégrale de Cauchy permettrait de montrer qu'on peut remplacer L par une suite $z_n = x_n + iy_n$ telle que $\frac{|z_{n+1} - z_n|}{r_n} \rightarrow 0$.

Classification et répartition des bouts.

20. Si le bout $E(a)$ possède un point accessible α , c'est qu'il existe un arc de Jordan Δ contenu dans Δ aboutissant en α . Son image dans D est un arc de Jordan L aboutissant en a sur lequel $f(z)$ a pour limite unique α . De l'étude faite (§ 17) découle le

THÉORÈME (1). — Si le bout $E(a)$ possède un point accessible α , l'ensemble P des points principaux se réduit au point α , et $f(z)$ a pour limite unique α lorsque z tend vers a angulairement.

DÉFINITIONS. — Un bout premier ne peut donc avoir au plus qu'un point accessible α . S'il se réduit au point α , il est dit de *première espèce*. S'il possède d'autres points (points accessoires inaccessibles), il est dit de *deuxième espèce*.

Dans le cas le plus général, P est un continu de points inaccessibles; si E se réduit à P , le bout est dit de *troisième espèce*. S'il y a d'autres points (points accessoires inaccessibles), nous avons le type le plus général de bout, dit de *quatrième espèce*.

Les points accessoires β du bout sont des limites extrêmement rares de $f(z)$. D'une part si $f(z_n)$, pour une suite z_n donnée, n'a pour points limites que des points accessoires,

$$|\text{Arg}(z_n - a)| \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

D'autre part, la longueur de la courbe image du demi-cercle $c_{\rho_n, a}$ ($\rho_n = |z_n - a|$) reste supérieure à un nombre fixe, sans quoi on pourrait extraire de la suite z_n une suite partielle z_{n_p} telle que $\lambda(\rho_{n_p}, a) \rightarrow 0$, et de cette suite une autre suite partielle z_{n_q} sur laquelle $f(z_{n_q})$ ait pour limite un point principal α . Il résulte de la convergence de l'intégrale (20) que l'ensemble e des valeurs de ρ formé par toutes ces suites ρ_n est d'épaisseur logarithmique droite nulle au point $\rho = 0$.

(1) Au moment où je termine ce travail, M. Wolff me fait part d'une démonstration de ce théorème utilisant aussi l'intégrale (20), présentée à l'Académie d'Amsterdam le 31 janvier 1942.

Nous pouvons en déduire le corollaire suivant :

THÉORÈME. — Si $f(z)$ a pour limite unique α sur un ensemble de points z tel que les valeurs de $\rho = |z - a|$ couvrent une infinité d'intervalles disjoints $\rho_n \geq \rho \geq \rho'_n$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{\rho_n}{\rho'_n}$ étant divergente, α est un point principal.

L'énoncé reste valable si certains points z de l'ensemble considéré se trouvent sur la frontière de D : il faut alors supposer que les bouts qui les contiennent convergent vers α .

21. La convergence de l'intégrale (20) nous a montré que $\lambda(\rho, a)$ était finie excepté au plus pour un ensemble e de valeurs de ρ d'épaisseur logarithmique droite nulle au point $\rho = 0$. Or, si $\lambda(\rho, a) < \infty$, les points $i(t \pm \rho)$ de $\gamma'\gamma$ ont pour correspondants sur Γ deux bouts premiers ayant chacun un point accessible (et même accessible par un arc de Jordan rectifiable), donc de première ou deuxième espèce.

THÉORÈME. — L'ensemble A des points de $\gamma'\gamma$, ayant pour images des bouts premiers de Γ ne contenant aucun point accessible par un arc de Jordan rectifiable, est d'épaisseur logarithmique nulle en tout point : c'est-à-dire que l'intégrale $\int_A \frac{dy}{|j-t|}$ est nulle, quel que soit t fixé.

Rappelons (d'après les résultats du § 6) que cet ensemble A est de h -mesure nulle pour toute fonction $h(R)$ telle que

$$\int_0^R \frac{\sqrt{h(R)}}{R} dR < \infty.$$

22. Limites de $f(z)$ sur des courbes de forme donnée. — Le lemme de Cartan-Ahlfors nous permet de montrer que pour une h -plénitude de points $a = it$ de $\gamma'\gamma$

$$(21) \quad \frac{1}{h\left(\frac{3R}{2}\right)} \int_0^R \lambda^2(\rho, a) \frac{d\rho}{\rho} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } R \rightarrow 0,$$

[on ne suppose pas nécessairement que $\frac{h\left(\frac{3R}{2}\right)}{h(R)}$ soit borné].

Pour simplifier, on peut remplacer dans (21) $h\left(\frac{3R}{2}\right)$ par $h(2R)$ puisque $h(R)$ est croissante. Nous supposons, par contre, que $h(0) = 0$.

Soit $a = it$ un point non exceptionnel et L_t (fig. 2) la courbe d'équation polaire $\cos\theta = h(2\rho)$ décrite par le point

$$z = a + \rho e^{i\theta} = x + iy \quad \text{pour } 0 \leq \rho \leq \rho_0, \quad -$$

ρ_0 étant choisi assez petit pour que $h(2\rho_0) \leq 1$. L_t est formée de deux arcs symétriques par rapport à la droite $y = t$. Soit D_t le domaine limité par L_t et le cercle $|z - a| = \rho_0$ qui contient le segment $s(y = t, 0 < x < \rho_0)$. Désignons par $\lambda_t(\rho, a)$ la longueur de la courbe décrite par le point $\zeta = f(z)$ lorsque z décrit l'arc du cercle $|z - a| = \rho$ ($\rho < \rho_0$) contenu dans D_t . Considérons une autre valeur $\rho' < \rho$ et comparons $\lambda_t(\rho, a)$ et $\lambda_t(\rho', a)$

$$\lambda_t(\rho, a) = \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} |f'(a + \rho e^{i\theta})| \rho d\theta, \quad \lambda_t(\rho', a) = \int_{-\theta'_0}^{+\theta'_0} |f'(a + \rho' e^{i\theta})| \rho' d\theta,$$

on pose $\cos\theta_0 = h(\rho)$, $\cos\theta'_0 = h(\rho')$; $\rho' < \rho$ entraîne $\theta'_0 > \theta_0$.

Choisissons d'autre part

$$\rho' \geq \rho \left(1 - \frac{\cos\theta_0}{2}\right), \quad \text{c'est-à-dire } \rho' \geq \rho \left[1 - \frac{h(2\rho)}{2}\right].$$

D'après le théorème de Kœbe, on voit que si $|\theta| < \theta_0$, on a

$$\frac{f'(a + \rho' e^{i\theta})}{f'(a + \rho e^{i\theta})} > \mathbf{k},$$

d'où

$$\lambda_t(\rho', a) \geq \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} |f'(a + \rho' e^{i\theta})| \rho' d\theta \geq \mathbf{k} \frac{\rho'}{\rho} \lambda_t(\rho, a) \geq \frac{\mathbf{k}}{2} \lambda_t(\rho, a).$$

Nous allons montrer que $\lambda_t(\rho, a)$ tend vers zéro avec ρ .

Sinon on pourrait trouver une suite infinie $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots$ tendant vers zéro, telle que $\lambda_t(\rho_n, a)$ reste supérieure à un nombre fixe $\varepsilon > 0$.

Soit

$$\rho'_n = \rho_n \left[1 - \frac{h(2\rho_n)}{2}\right];$$

on aurait

$$\int_{\rho'_n}^{\rho_n} \lambda_i^2(\rho, a) \frac{d\rho}{\rho} \geq \frac{K^2}{4} \times \varepsilon^2 \times \frac{h(2\rho_n)}{2},$$

ce qui est contraire à (21).

Soit alors $z_n = it + \rho_n e^{i\theta_n}$ une suite de points tendant vers $a = it$, contenue dans le domaine D_i . Posons $z_n'' = it + \rho_n$. La longueur de l'image de l'arc du cercle $|z - a| = \rho_n$ joignant z_n à z_n'' dans D_i tend vers zéro. Donc $f(z_n'') - f(z_n) \rightarrow 0$. Or les limites de la suite $f(z_n'')$, puisque z_n'' tend vers a sur la droite $y = t$, ne peuvent être que des points principaux du bout $E(a)$.

Remarquons que la courbe L_i est une courbe quelconque convexe vers la gauche, tangente en a à l'axe $y'y$ et symétrique par rapport à la droite $y = t$. La fonction $h(R)$ détermine la forme des courbes L_i , et réciproquement; pour que le rapport $\frac{h(R)}{R}$ reste borné inférieurement lorsque $R \rightarrow 0$ (seul cas intéressant, voir § 3), il faut que la plus petite courbure de L_i au point a soit non nulle.

THÉORÈME. — *L'axe imaginaire contient une h-plénitude de points $a = it$ tels que $f(z)$ n'ait pour points limites que des points principaux de $E(a)$ lorsque z tend vers a dans le domaine D_i limité par la courbe L_i , convexe vers la gauche, d'équation polaire*

$$\cos \theta = h(2\rho) \quad (z = a + \rho e^{i\theta}).$$

En particulier si le bout premier $E(a)$ est de première ou deuxième espèce et possède un point accessible α , $f(z)$ tend vers α lorsque z tend vers a dans D_i .

Or nous savons justement qu'aux points a considérés, d'après le théorème fondamental,

$$(22) \quad f'(z) = o \left[\frac{\sqrt{h(\rho)}}{x} \right];$$

donc si

$$(23) \quad \int_0^{\rho_0} \sqrt{h(\rho)} \frac{d\rho}{\rho} < \infty,$$

la longueur de l'image du segment s est finie, et le bout $E(a)$ possède un point α accessible par un arc de Jordan rectifiable.

23. COROLLAIRE. — Si l'intégrale (23) est convergente, l'axe imaginaire contient une h -plénitude de points $a = it$ tels que $f(z)$ ait une limite unique α lorsque z tend vers a dans D_t .

En particulier pour $h(R) = kR$ ($k > 0$ quelconque) nous retrouvons un théorème de M. Wolff ^[4].

THÉORÈME. — L'axe imaginaire contient une plénitude de points $a = it$ tels que $f(z)$ ait une limite unique α lorsque z tend vers a dans un cercle quelconque tangent en a à $y'y$.

M. Denjoy ^[2] avait démontré le résultat suivant : Pour tout point a d'une plénitude de l'axe imaginaire, les images des courbes $C_{\gamma,a}(|z - a|^\gamma = x, 1 \leq \gamma < 2)$ sont rectifiables.

Notre méthode directe, toujours fondée sur l'inégalité de Schwarz, permet de préciser ce qui se passe pour $\gamma = 2$.

THÉORÈME. — L'axe imaginaire contient une plénitude de points a pour lesquelles la longueur $l_k(\rho, \rho', a)$ de l'image d'un arc du cercle $|z - a|^2 = kx$ ($k > 0$ quelconque) compris entre les cercles $|z - a| = \rho$, $|z - a| = \rho'$ ($\rho' < \rho$) satisfait à

$$l_k^2(\rho, \rho', a) = o \left[\log \frac{\rho}{\rho'} \right].$$

Ces résultats sont beaucoup plus précis que ceux qu'on pourrait déduire de la limitation connue de $|f'(z)|$ (§ 5)

$$(24) \quad |f'(z)| = o \left[\frac{\sqrt{|z - a|}}{x} \right];$$

ils correspondent, en effet, non pas à une limitation de $|f'(z)|$, quantité qui peut osciller beaucoup sur une courbe C aboutissant en a , mais à une limitation de la valeur moyenne de $|f'(z)|^2$ sur la courbe C .

Malgré ces résultats plus précis, nous ne pouvons affirmer que les images des cercles $|z - a|^2 = kx$ aient une longueur finie pour une plénitude de points a . Le théorème de M. Wolff, qui nous montre que ces images sont des arcs de Jordan aboutissant en des points α déterminés (mais pas nécessairement rectifiables), semble difficile à améliorer.

Signification géométrique des résultats.

24. La limitation obtenue pour $|f'(z)|$ et celle qu'on en déduit par intégration

$$(25) \quad f(z) = o[\sqrt{z-a}],$$

valable dans un angle d'approximation pour une plénitude A , de points a de l'axe $y'y$, semblent suggérer l'existence, sur l'ensemble π , des points α accessibles correspondants de la frontière Γ de Δ , d'un angle d'accessibilité de sommet α intérieur à Δ et d'ouverture au moins égale à $\frac{\pi}{2}$. M. Denjoy *[3] a montré l'inexactitude de cette hypothèse en construisant des domaines n'admettant en aucun point frontière, excepté sur un ensemble dénombrable, d'angle d'accessibilité d'ouverture positive.

Nous montrerons cependant qu'il existe des arcs : $|\zeta - \alpha| = \rho$, $\theta' < \text{Arg}(\zeta - \alpha) < \theta''$ intérieurs à Δ , la différence $\theta'' - \theta'$ étant aussi voisine de $\frac{\pi}{2}$ que l'on veut pourvu que ρ soit assez petit. Cette étude faisant appel à l'inégalité de M. Ahlfors sera développée seulement au Chapitre IV (§ 39).

Mais la question se pose alors de préciser l'importance de l'ensemble exceptionnel π sur Γ (correspondant à l'ensemble A de $y'y$ de mesure linéaire nulle). Il est facile de comprendre que l'on ne puisse rien dire sur π en général au point de vue métrique : si Γ a une aire positive, comme c'est possible, M. Denjoy ayant montré que π , a une aire nulle, π a une aire positive. *C'est donc le mécanisme de la représentation conforme qui fait correspondre à l'ensemble π d'aire positive un ensemble A de mesure linéaire nulle pouvant être considéré comme exceptionnel* : et cela justement parce qu'au voisinage des points considérés la dérivée de la fonction $\varphi(\zeta)$ inverse de $f(z)$ prend des valeurs infiniment petites d'un ordre convenable.

Par contre les propriétés topologiques se conservent dans la représentation conforme, à condition de prendre pour éléments des bouts premiers au lieu de points, et de modifier la notion de voisinage : ainsi l'ensemble π , de bouts premiers est partout dense sur Γ et possède

la puissance du continu. Mais pour ce genre de propriétés l'étude directe semble préférable.

25. THEOREME. — *Il existe un ensemble π_2 partout dense (topologiquement) sur Γ en chaque point α duquel existe un cercle d'accessibilité γ , intérieur à Δ , dont la circonférence passe par α .*

Démonstration. — Soit E un bout premier quelconque de Γ . Un voisinage topologique de E est limité par une coupure q que nous pouvons supposer être un arc de cercle centré en un point principal quelconque de E ; q isole un domaine δ dont la frontière contient E . Soit γ l'un des cercles de plus grand rayon contenus dans δ . La circonférence de γ a au moins deux points communs avec la frontière de δ et ne la traverse pas. Ces points ne peuvent être tous les deux sur l'arc de cercle q (extrémités exclues) sans que la circonférence γ contienne l'arc q tout entier. Donc l'un au moins des deux points, soit α , est sur la frontière de Δ (α peut être l'une des extrémités de q) et le point α répond aux conditions.

CONSEQUENCE. — *Pour tout point a de l'ensemble A_2 de $y'y$ correspondant à π_2 , $|f'(z)|$ est borné lorsque z tend vers a angulairement.*

En effet (voir Chap. III, lemme II, § 34), le domaine Δ contient un domaine valable qui est le cercle γ ayant même point frontière α . Le rapport $\left| \frac{\zeta - \alpha}{z - a} \right|$ reste borné dans les conditions de variation de z , d'où l'on déduit la propriété de $f'(z)$ au moyen de l'intégrale de Cauchy.

26. Supposons que la frontière Γ de Δ ne comporte que des bouts de première espèce (c'est-à-dire des points accessibles et pas de points accessoires), ou, selon une définition de M. Denjoy (1), que Γ soit un *continu cyclique* (ce serait une courbe simple de Jordan si tous les points étaient simples au sens de M. Carathéodory). Alors, pour tout point α de Γ , tout point topologiquement voisin de α est voisin au sens ordinaire (défini par la métrique euclidienne). L'ensemble π_2 est

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 243, 1941, p. 975.

partout dense sur Γ . Choisissons dans π_2 un ensemble dénombrable de points partout denses sur Γ , $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ auxquels correspondent les cercles $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ de rayons $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots$. Soit d'autre part $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ une suite de nombres positifs tendant vers zéro en décroissant. Pour chaque valeur de n , traçons le cercle C_n de centre α_n , de rayon $\varepsilon_n \rho_n$. De tout point α de Γ intérieur à C_n , on voit le cercle γ_n sous un angle au moins égal à $2\theta_n$ ($\sin \theta_n = \frac{1}{1 + \varepsilon_n}$). Si α est intérieur à une infinité de cercles C_n , on pourra trouver une infinité de cercles de la suite γ_n , intérieurs à Δ , et vus de α sous des angles tendant vers π . Il en résulte qu'au point α il existe une suite infinie de secteurs d'accessibilité S_ρ

$$\rho'_\rho < |\zeta - \alpha| < \rho''_\rho, \quad \theta'_\rho < \text{Arg}(\zeta - \alpha) < \theta''_\rho,$$

tels que

$$\rho''_\rho \rightarrow 0, \quad \frac{\rho'_\rho}{\rho''_\rho} \rightarrow 0, \quad \theta''_\rho - \theta'_\rho \rightarrow \pi.$$

C'est beaucoup plus qu'on ne peut affirmer aux points de l'ensemble π_1 . Or, l'ensemble des points de Γ intérieurs à une infinité de cercles C_n forme, d'après les définitions de M. Denjoy, un résiduel R de Γ .

THÉORÈME. — *Si Γ est un continu cyclique, il y a un résiduel de points α de Γ en chacun desquels existe une suite infinie de secteurs d'accessibilité S_ρ intérieurs à Δ .*

27. Pour terminer, démontrons une propriété géométrique des continus bornés Γ les plus généraux limitant un domaine simplement connexe Δ , se rattachant assez étroitement à nos considérations sur l'aire et précisant une observation de M. Denjoy (1).

THÉORÈME. — *Étant donné un nombre $\varepsilon > 0$ quelconque, il est possible de trouver sur Γ une chaîne fermée de points $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (α_{n+1} étant confondu avec α_1), progressant sur Γ dans un sens invariable (déterminé par la représentation conforme de Δ sur D), et telle que l'on puisse joindre*

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 243, 1941, p. 976. M. Denjoy m'a signalé une démonstration directe de ce théorème faisant appel à la topologie.

chaque couple de points consécutifs α_i, α_{i+1} par un arc de Jordan rectifiable Λ_i contenu dans Δ , de longueur l_i satisfaisant à $\sum_{i=1}^n l_i^2 < \varepsilon$.

Démonstration. — Δ peut contenir le point à l'infini, mais puisque Γ est borné, si l'on représente conformément sur Δ le demi-plan droit $D(x > 0)$ au moyen de la fonction $\zeta = f(z)$, $f(z)$ reste bornée au voisinage de l'axe $y'y$, donc à l'extérieur d'un segment de cercle K_0 défini par $x \geq x_0, |\zeta| \leq \rho_0$ (fig. 3).

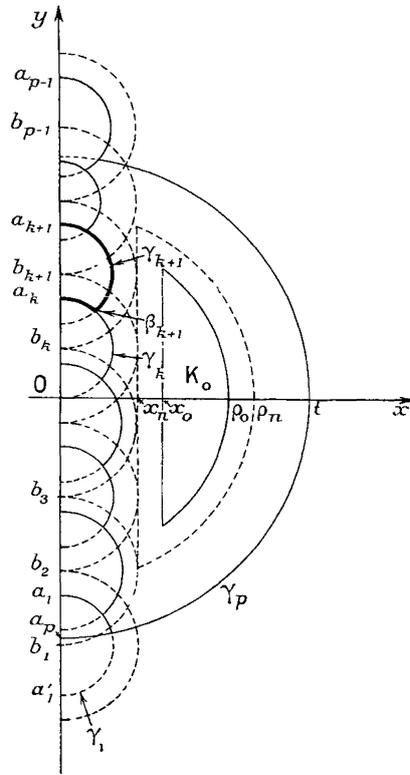


Fig. 3.

Soit de même K_n le segment de cercle ($x \geq x_n, |\zeta| \leq \rho_n$), x_n et ρ_n étant deux suites monotones positives ($x_n \rightarrow 0, \rho_n \rightarrow \infty$). L'aire S_n décrite par $f(z)$ lorsque z décrit le domaine $(K_n - K_0)$ croît avec l'indice n ,

mais reste bornée, et tend vers une limite S lorsque $n \rightarrow \infty$. $S - S_n$ représente, selon une définition déjà donnée, la charge portée par le domaine $D_n = D - K_n$. Pour n assez grand (soit $n > N$), on aura $S - S_n < \frac{\varepsilon}{60}$. Soient $\mu(\rho_n, \infty)$ la charge portée par le domaine $C(|z| > \rho_n, x > 0)$ et $\lambda(\rho, \infty)$ la longueur de l'image du demi-cercle $|z| = \rho$ contenu dans D . L'inégalité de Schwarz montre que

$$\int_{\rho_n}^{\infty} \lambda^2(\rho, \infty) \frac{d\rho}{\rho} < \pi \mu(\rho_n, \infty).$$

Donc on peut trouver un nombre t $\rho_n \leq t \leq 2\rho_n$ tel que

$$\lambda^2(t, \infty) \leq \mu(\rho_n, \infty) \times \frac{\pi}{\log 2} < 5\mu(\rho_n, \infty),$$

t étant déterminé, on recouvre l'intervalle $(-it, +it)$ de $y'y$ d'intervalles égaux de longueur x_n d'extrémités b_1, b_2, \dots, b_{p-1}

$$\left(\frac{b_1}{i} < -t, \frac{b_{p-1}}{i} > t \right).$$

En chaque point b_k on a, d'après (19),

$$\int_0^{x_n} \lambda^2(\rho, b_k) \frac{d\rho}{\rho} < \pi \mu(x_n, b_k),$$

$\mu(x_n, b_k)$ étant la charge portée par le domaine $C_k(|z - b_k| < x_n, x > 0)$ et $\lambda(\rho, b_k)$ la longueur de l'image du demi-cercle $|z - b_k| = \rho$ contenu dans D . Donc, on peut trouver dans l'intervalle $\frac{x_n}{2} < \rho < x_n$ une valeur ρ_k telle que

$$\lambda^2(\rho_k, b_k) < \frac{\pi}{\log 2} \mu(x_n, b_k) < 5\mu(x_n, b_k).$$

Soient γ_k ($1 \leq k \leq p-1$) les demi-cercles $|z - b_k| = \rho_k, x > 0$, de diamètres $a'_k a_k$ portés par l'axe imaginaire ($a'_k = b_k - i\rho_k, a_k = b_k + i\rho_k$) et γ_p le demi-cercle $|z| = t, x > 0$, de diamètre $a'_p a_p$ ($a_p = -it, a'_p = +it$). Nous poserons $a_{p+1} = a_1, a'_{p+1} = a'_1, \gamma_{p+1} = \gamma_1$.

Deux demi-cercles consécutifs γ_k, γ_{k+1} ($1 \leq k \leq p$) se coupent toujours en un point β_{k+1} . Soit L_k la coupure constituée par l'arc $\widehat{a_k \beta_{k+1}}$ de γ_k

et l'arc $\widehat{\beta_{k+1} a_{k+1}}$ de γ_{k+1} ; la longueur l_k de son image Λ_k dans la représentation conforme satisfait à

$$l_k' < |\gamma(\rho_k, b_k) + \gamma(\rho_{k+1}, b_{k+1})|^2 < 2[\gamma^2(\rho_k, b_k) + \gamma^2(\rho_{k+1}, b_{k+1})].$$

$$\sum_1^p l_k^2 < 4 \sum_{k=1}^{p-1} \gamma^2(\rho_k, b_k) + 4\gamma^2(t, \infty) < 60 \sum_{k=1}^{p-1} \mu(x_k, b_k) + 20\mu(\rho_n, \infty).$$

Or, tout point du domaine D_n est au plus intérieur à la fois à deux demi-cercles C_k ($k \leq p-1$) et à C . La somme des charges portées par ces domaines est donc au plus égale à $3\mu(D_n)$, c'est-à-dire à $3(S - S_n)$

$$\sum_{k=1}^p l_k^2 < 60(S - S_n) < \varepsilon.$$

Aux points a_1, a_2, \dots, a_p de $\gamma'\gamma$ correspondent des points accessibles $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ de Γ répondant aux conditions puisque les images Λ_k des coupures L_k sont des arcs simples de Jordan rectifiables intérieurs à Δ .

CHAPITRE III.

ÉTUDE LOCALE DIRECTE DE LA REPRÉSENTATION.

28. Nous allons passer à l'étude locale directe et géométrique de la représentation conforme au voisinage d'un point accessible α de la frontière Γ du domaine Δ . Par deux transformations homographiques sur les variables z et ζ respectivement, nous pouvons nous ramener au cas où le point α et son correspondant a sur la frontière $\gamma'\gamma$ de D sont à l'infini. Soit $\zeta = f(z)$ la fonction représentant D sur Δ et $z = \varphi(\zeta)$ la fonction inverse. Le bout premier $E(\infty)$ contient, en général, outre le point accessible α à l'infini, un continu de points accessoires inaccessibles. Remarquons que le point $\zeta = \infty$ peut être multiple et appartenir à d'autres bouts premiers : le point α est déterminé par ses voisinages topologiques, images des voisinages de a .

La méthode que nous employons suppose connus les principaux résultats relatifs à la mesure conforme.

DÉFINITION. — Soit ζ_0 un point intérieur au domaine Δ , γ un ensemble de points, ou, plus exactement, de bouts premiers de la frontière Γ de Δ . Si, dans la représentation conforme de Δ sur le cercle $C(|\omega| \leq 1)$ effectuée de manière qu'à ζ_0 corresponde le point $\omega = 0$, l'ensemble γ a pour correspondant un ensemble k de la circonférence $K(|\omega| = 1)$ mesurable et de mesure μ , nous dirons que μ est la mesure conforme ⁽¹⁾ de γ vu de ζ_0 dans Δ , soit $\mu = m(\zeta_0, \gamma, \Delta)$.

La mesure conforme est un invariant dans toute représentation conforme. Il est évident, par une transformation homographique sur la variable ω , que, si γ est mesurable par rapport à un point ζ_0 de Δ , il est mesurable par rapport à tout point intérieur à Δ .

Si $\bar{\gamma}$ est le complémentaire par rapport à Γ de l'ensemble γ ,

$$m(\zeta_0, \bar{\gamma}, \Delta) = 2\pi - m(\zeta_0, \gamma, \Delta).$$

Si l'on représente Δ sur le demi-plan droit $D(x > 0)$ et si l'on prend pour γ l'ensemble de bouts de Γ qui correspond à un segment $a'a$ de l'axe $y'y$, γ est mesurable dans Δ et l'on a

$$m(\zeta, \gamma, \Delta) = 2 \left| \operatorname{Arg} \frac{z - a}{z - a'} \right|,$$

z et ζ étant deux points correspondants dans D et Δ .

PREMIÈRE INÉGALITÉ. — *Principe de l'agrandissement du domaine* ⁽²⁾. Si Δ' est un domaine contenant Δ dont la frontière Γ' a en commun avec Γ un ensemble γ mesurable dans Δ' , alors l'ensemble γ est mesurable dans Δ et l'on a

$$(26) \quad m(\zeta, \gamma, \Delta) \leq m(\zeta, \gamma, \Delta') \quad (\zeta \text{ intérieur à } \Delta).$$

DEUXIÈME INÉGALITÉ ⁽³⁾. — Si Δ est un domaine simplement connexe

⁽¹⁾ La mesure harmonique (R. NEVANLINNA *^[1], p. 37) est le quotient par 2π de la mesure conforme, appelée aussi angle conforme.

⁽²⁾ Le premier énoncé de ce principe (dans le cas où γ est un arc de frontière) se trouve dans le Mémoire de M. P. Montel *^[1], en note, p. 31. Pour des références plus détaillées, voir R. NEVANLINNA *^[1], p. 63.

⁽³⁾ M. OSTROWSKI *^[1], p. 430, déduit cette inégalité d'un théorème de Milloux-Schmidt-Nevanlinna, donnant la solution du problème de Carleman-Milloux. (Voir R. NEVANLINNA *^[1], p. 96.)

ne contenant pas à son intérieur le point $\zeta = \infty$, γ un ensemble mesurable dans Δ de points frontières de Δ contenus dans le cercle $\Omega(|\zeta| \leq \delta)$, et ζ_0 un point quelconque de Δ tel que $|\zeta_0| = \rho > \delta$, on a

$$(27) \quad m(\zeta_0, \gamma, \Delta) \leq 8 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \sqrt{\frac{\delta}{\rho}} < 8 \sqrt{\frac{\delta}{\rho}} < 4\pi \sqrt{\frac{\delta}{\rho}},$$

l'égalité n'ayant lieu que si Δ est constitué par la portion de plan extérieure au cercle Ω , coupée suivant la demi-droite $\operatorname{Arg} \zeta = \operatorname{Arg} \zeta_0 + \pi$, γ étant identique, à un ensemble de mesure nulle près, à la circonférence limitant Ω .

29. Donnons tout d'abord une application du premier principe.

LEMME I. — Si le domaine Δ contient au point $\alpha = \infty$ un secteur d'accessibilité S_0 d'ouverture $2\omega > 0$, défini par $|\zeta| > R_0$, $|\operatorname{Arg} \zeta| < \omega$ et si ζ s'éloigne à l'infini à l'intérieur d'un angle $|\operatorname{Arg} \zeta| < \omega - \varepsilon$, on a

$$(28) \quad \overline{\lim} |\operatorname{Arg} \varphi(\zeta)| < \frac{\pi - \varepsilon}{2}.$$

Démonstration. — On peut supposer, ce que nous ferons souvent, que $\zeta = 0$ est un point accessible de la frontière Γ de Δ qui a pour correspondant $z = 0$, sinon on s'y ramènerait par des translations.

Soit ζ un point intérieur au secteur S_0 , et $z = \varphi(\zeta)$ son correspondant dans D (fig. 4). Désignons par β le premier point de rencontre de la demi-droite Ou ($\operatorname{Arg} \zeta = \omega$) avec Γ lorsqu'on va du point $\beta_0 = R_0 e^{i\omega}$ intérieur à Δ vers le point frontière $\zeta = 0$; β est un point frontière accessible de Δ , soit b son correspondant sur $\gamma' \gamma$, et inversement soient γ^+ et γ^- les branches complémentaires de frontières de Δ , déterminées par leur voisinage, correspondant respectivement aux demi-droites $b\gamma$, $b\gamma'$,

$$m(\zeta, \gamma^+, \Delta) = 2 \left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arg}(z - b) \right].$$

Considérons la fonction harmonique $m_1(\zeta)$ définie dans le domaine Δ_0 constitué par le plan de ζ coupé suivant la demi-droite indéfinie βu (d'argument ω), par ses valeurs :

$m_1 = 2\pi$, si ζ est sur le côté δ^- de la coupure tourné vers l'intérieur de S_0 (d'argument $\omega - 0$);

$m_1 = 0$, si ζ est sur le côté δ^+ de la coupure tourné vers l'extérieur de S_0 (d'argument $\omega + 0$);

$m_1(\zeta)$ est la mesure conforme de δ^- vu du point ζ dans Δ_0 . Sur δ^- on a $m_1 \geq m$, car $m \leq 2\pi$; sur $\bar{\gamma}$ on a $m_1 \geq m$, car $m = 0$. Donc en tout point ζ du domaine Δ , simplement connexe intérieur à la fois à Δ et Δ_0 , limité par $\bar{\gamma}$ et βu , et par conséquent en tout point du secteur S_0 ,

$$m_1(\zeta) \geq m(\zeta, \gamma^+, \Delta),$$

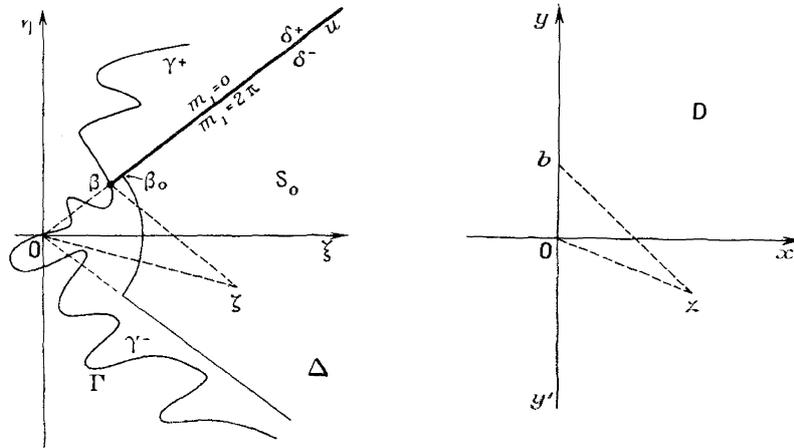


Fig. 4.

$m_1(\zeta)$ s'évalue facilement, si l'on représente Δ_0 sur un demi-plan au moyen de la fonction $Z = \sqrt{\zeta - \beta}$,

$$m_1(\zeta) = 2\pi - \omega + \text{Arg}(\zeta - \beta).$$

Si ζ tend vers ∞ , $z = \varphi(\zeta)$ tend vers l'infini. b et β restant fixes,

$$\text{Arg}(z - b) - \text{Arg} z \rightarrow 0, \quad \text{Arg}(\zeta - \beta) - \text{Arg} \zeta \rightarrow 0.$$

De l'inégalité

$$\text{Arg}(\zeta - \beta) + 2\pi - \omega \geq 2 \text{Arg}(z - b) + \pi,$$

on déduit à la limite

$$\overline{\lim} \left(\text{Arg} z - \frac{1}{2} \text{Arg} \zeta \right) < \frac{\pi - \omega}{2},$$

et si $\text{Arg} \zeta < \omega - \varepsilon$,

$$\overline{\lim} \text{Arg} z < \frac{\pi - \varepsilon}{2}.$$

On démontrerait de même que si $\zeta \rightarrow \infty$ dans le domaine

$$\text{Arg} \zeta > -\omega + \varepsilon,$$

on a

$$\underline{\lim} \text{Arg} z > \frac{\varepsilon - \pi}{2},$$

d'où, au total, l'inégalité annoncée.

Remarquons, puisqu'il s'agit d'une limitation asymptotique, qu'il suffirait de supposer que Δ contient le secteur S_{η}

$$|\zeta| > R_{\eta}, \quad \text{Arg} \zeta < \omega - \eta,$$

η étant aussi petit que l'on veut pourvu que R_{η} soit assez grand; on dit alors que $\alpha = \infty$ est accessible par un angle d'ouverture 2ω .

Ce lemme nous a servi ⁽¹⁾ à montrer que si α est angulairement accessible dans Δ , la fonction $\zeta = f(z)$ a pour limite angulaire unique $\alpha = \infty$; en effet, à un chemin Λ aboutissant en α dans un angle $|\text{Arg} \zeta| < \omega - \varepsilon$, correspond dans D un chemin L allant à l'infini dans l'angle $|\text{Arg} z| < \frac{\pi - \varepsilon}{2}$ sur lequel $f(z)$ a pour limite $\alpha = \infty$. La proposition résulte alors d'un théorème de M. Montel ^[1, p. 19]. Mais nous avons vu (Chap. II, § 20) qu'il n'était pas nécessaire que L soit contenu dans un angle d'approximation et qu'il suffisait que α soit accessible pour être la limite angulaire unique de $f(z)$.

La conservation des angles.

30. *Définitions.* — Nous dirons que la représentation $\zeta = f(z)$ de D sur Δ est *semi-conforme* au point α à l'infini si le long de tout arc de Jordan s'éloignant à l'infini dans une direction d'argument déterminé ψ , $\text{Arg} f(z)$ a une limite θ satisfaisant à

$$0 = \lambda \psi + \mu \quad (\lambda, \mu \text{ const.}).$$

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 212, 1941, p. 977.

Si $\lambda = 1$, la transformation conserve l'angle de deux courbes à l'infini. Si $\lambda \neq 1$, elle le multiplie par le facteur λ .

Nous réserverons le mot de *conforme* pour le cas où il existe une limite c finie et non nulle du rapport $\frac{f(z)}{z}$ lorsque z tend vers l'infini dans un angle $|\text{Arg } z| < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$. Cette limite est la *dérivée angulaire* de $f(z)$. Le domaine Δ est alors dit *valable* au point $\alpha = \infty$. Plus généralement nous dirons que Δ est *valable sur un angle d'ouverture* $\lambda\pi$ si le rapport $\frac{f(z)}{z^\lambda}$ a une limite c ($0 < c < \infty$) lorsque z tend vers l'infini angulairement : il en résulte que $\text{Arg } f(z) - \lambda \text{Arg } z$ a une limite, donc que la représentation est semi-conforme. La réciproque n'est pas vraie.

THEOREME. — Il revient à M. Ostrowski *[1, p. 447], d'avoir trouvé la condition nécessaire et suffisante que doit remplir le domaine Δ pour que sa représentation soit semi-conforme à l'infini, à savoir que :

1° Il existe un intervalle θ_1, θ_2 tel que Δ contienne les secteurs S_ε

$$0_1 + \varepsilon < \text{Arg } \zeta < \theta_2 - \varepsilon, \quad |\zeta| > R_\varepsilon,$$

ε étant aussi petit que l'on veut pourvu que R_ε soit assez grand.

2° Il existe sur la frontière de Δ deux suites de points telles que

$$(29) \quad \begin{cases} \zeta_\nu \rightarrow \infty, & \text{Arg } \zeta_\nu \rightarrow \theta_1, & \frac{\zeta_{\nu+1}}{\zeta_\nu} \rightarrow 1; \\ \zeta'_\nu \rightarrow \infty, & \text{Arg } \zeta'_\nu \rightarrow \theta_2, & \frac{\zeta'_{\nu+1}}{\zeta'_\nu} \rightarrow 1. \end{cases}$$

Alors on a semi-conformité avec

$$\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \frac{\theta_2 - \theta_1}{\pi} \psi.$$

La démonstration de M. Ostrowski (1) est une très belle application de la mesure conforme. Le principe, au moins, en est simple et nous

(1) Une autre démonstration de ce théorème, basée sur l'intégrale de Dirichlet et, à notre avis, moins directe, a été donnée par M. Caleb Gattegno dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1938, I^{re} Partie, p. 12.

a servi de point de départ pour l'étude de cas plus complexes. Nous allons cependant essayer d'en donner ici une démonstration plus intuitive fondée sur une méthode de M. Montel [1, p. 6].

31. *Démonstration.* — S'il y a semi-conformité de la représentation au point α avec $\theta = \lambda\psi + \mu$, nous pouvons toujours nous ramener par la transformation $\zeta' = (\zeta e^{-i\mu})^{\frac{1}{\lambda}}$ au cas $\lambda = 1$, $\mu = 0$. Alors le domaine (que nous désignerons encore par Δ) doit contenir les secteurs S_ε

$$|\operatorname{Arg} \zeta| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad |\zeta| > R_\varepsilon.$$

Nous supposons aussi que $\zeta = 0$ est un point frontière accessible de Δ et correspond à $z = 0$ (ou s'y ramène par des translations). Soit $\zeta = f(z)$, $z = \varphi(\zeta)$ la représentation de D sur Δ et de Δ sur D .

Posons

$$\varphi_R(\zeta) = \frac{\varphi(R\zeta)}{\varphi(R)}, \quad (R = \text{const. positive}).$$

C'est une fonction univalente qui représente sur D le domaine Δ_R homothétique de Δ par rapport à l'origine dans le rapport $\frac{1}{R}$; si $\zeta \rightarrow 0$, $\varphi_R(\zeta) \rightarrow 0$; si $\zeta \rightarrow \infty$, $\varphi_R(\zeta) \rightarrow \infty$; enfin $|\varphi_R(1)| = 1$.

Montrons d'abord que *la condition nécessaire et suffisante pour que la représentation soit semi-conforme à l'infini est que, quel que soit ζ fixé tel que $|\operatorname{Arg} \zeta| < \frac{\pi}{2}$,*

$$\varphi_R(\zeta) \rightarrow \zeta, \quad \text{lorsque } R \rightarrow \infty.$$

La condition est suffisante, car en prenant $\zeta = e^{i\theta}$, on voit que

$$\operatorname{Arg} \varphi(R e^{i\theta}) \rightarrow \theta, \quad \text{si } |\theta| < \frac{\pi}{2};$$

l'angle de deux rayons est conservé, donc aussi l'angle de deux courbes.

La condition est nécessaire, car si $\operatorname{Arg} \varphi(R e^{i\theta}) \rightarrow \theta$ quel que soit θ ($|\theta| < \frac{\pi}{2}$),

$$\operatorname{Arg} \varphi_R(\zeta) \rightarrow \operatorname{Arg} \zeta, \quad \text{donc } \varphi_R(\zeta) \rightarrow \zeta$$

($\operatorname{Arg} \zeta$ est une fonction harmonique uniforme dans Δ).

32. La famille des fonctions $\varphi_R(\zeta)$ est définie, pour R assez grand, dans tout domaine strictement intérieur à l'ensemble limite intérieur restreint des domaines Δ_R , et elle est normale dans ce domaine, puisque les valeurs de $\varphi_R(\zeta)$ tombent dans le demi-plan D . Montrons que les fonctions inverses $f_R(z)$ définies dans D forment aussi une famille normale. Nous savons que $z_R = \varphi_R(1)$ a pour module 1, et d'après notre lemme (où l'on fait $\omega = \frac{\pi}{2}$), on a

$$\overline{\lim} |\operatorname{Arg} z_R| \leq \frac{\pi}{4}.$$

Représentons D sur le cercle C ($|\varpi| \leq 1$) par $\varpi = \frac{z-1}{z+1}$. Au point z_R correspond ϖ_R tel que

$$\overline{\lim} |\varpi_R| \leq \operatorname{tang} \frac{\pi}{8} < \frac{1}{2}.$$

Donc, pour R assez grand,

$$|\varpi_R| < \frac{1}{2}.$$

Posons $f_R[z(\varpi)] = g_R(\varpi)$. La fonction $g_R(\varpi)$ est univalente dans C , prend au point ϖ_R la valeur $\zeta = 1$ et recouvre pour R assez grand le cercle de centre $\zeta = 1$ de rayon $\cos \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ quelconque donné), puisque Δ_R contient les secteurs homothétiques des secteurs S_ε . Elle ne recouvre aucun cercle concentrique de rayon supérieur à 1, puisque $\zeta = 0$ appartient à la frontière de tous les domaines Δ_R . Donc (voir P. MONTEL, [2], p. 50) $|g'_R(\varpi_R)|$ reste compris entre deux nombres positifs indépendants de R , et, d'après le théorème de Kœbe, on aura dans tout cercle C_1 ($|\varpi| < r_1 < 1$) une double limitation

$$0 < k(r_1) < |g'_R(\varpi)| < k'(r_1).$$

De plus, comme $g_R(\varpi_R) = 1$, $|g_R(\varpi)|$ est borné uniformément et les familles $g_R(\varpi)$ et $f_R(z)$ sont normales.

Soit z_0 un point fixe quelconque intérieur à D , on peut enfermer son correspondant ϖ_0 , ainsi que ϖ_R , dans un cercle C_1 fixe. On joint ϖ_0 à ϖ_R par un chemin L complètement intérieur à C_1 sur lequel $|g'_R(\varpi)|$ reste supérieur à $k(r_1) = k_1$. Quel que soit le point $\bar{\varpi}$ sur L , $g_R(\varpi)$ est univalente dans le cercle de centre $\bar{\varpi}$, de rayon $1 - r_1$; donc $g_R(\varpi)$ recouvre le cercle de centre $\bar{\zeta} = g_R(\bar{\varpi})$, de rayon $d = \frac{k_1(1 - r_1)}{4}$.

Au chemin L correspond un chemin Λ_R intérieur à Δ_R , joignant les points $\zeta = 1$ et $\zeta_0 = f_R(z_0)$, et restant à une distance de la frontière de Δ_R supérieure à d , d étant indépendant de R . Donc les points $f_R(z_0)$ ne peuvent s'accumuler que dans un domaine connexe contenu dans l'ensemble limite intérieur complet des Δ_R et contenant $\zeta = 1$.

Si nous considérons une suite partielle convergente $f_{R_n}(z)$, sa limite est, comme l'a montré M. Montel, une fonction univalente $f_0(z)$ qui représente conformément D sur le plus grand domaine connexe δ_0 contenant le point $\zeta = 1$ et contenu dans l'ensemble limite intérieur restreint δ_i des domaines Δ_{R_n} de la suite : car la suite $f_{R_n}(z_0)$ tend, d'après le raisonnement précédent, vers un point ζ_0 de δ_0 quel que soit z_0 . Et réciproquement, si l'on considère la suite des fonctions inverses $\varphi_{R_n}(\zeta)$, elles sont définies, pour n assez grand, dans un domaine donné quelconque strictement intérieur à δ_i (connexe ou non). Dans δ_0 la limite de $\varphi_{R_n}(\zeta)$ est la fonction $\varphi_0(\zeta)$ inverse de $f_0(z)$; dans un autre domaine connexe δ_1 distinct de δ_0 et intérieur à δ_i (s'il en existe), $\varphi_{R_n}(\zeta)$ tend vers une constante imaginaire pure.

Le cas qui nous occupe ici est particulièrement simple : nous voulons, quelle que soit la suite R_n , que

$$\varphi_{R_n}(\zeta) \rightarrow \zeta, \quad f_{R_n}(z) \rightarrow z.$$

L'ensemble δ_0 doit se réduire au demi-plan $\zeta > 0$. Or, si les suites de points de M. Ostrowski n'existaient pas, on pourrait trouver une suite infinie de secteurs S , intérieurs à Δ définis par

$$r_{\nu} < |\zeta| < r_{\nu} e^{\varepsilon}, \quad r_{\nu+1} > r_{\nu} e^{\varepsilon} \quad (\varepsilon \text{ fixé})$$

et l'une des inégalités

$$\frac{\pi}{2} < \text{Arg } \zeta < \frac{\pi}{2} + \theta_0, \quad -\frac{\pi}{2} > \text{Arg } \zeta > -\frac{\pi}{2} - \theta_0,$$

les domaines $\Delta_{r_{\nu}}$ contiendraient un secteur fixe s homothétique des S_{ν} , et pour la suite $\Delta_{r_{\nu}}$ le domaine δ_0 défini précédemment contiendrait, outre le demi-plan ($\zeta > 0$), le secteur s . Réciproquement, si les deux suites ζ_{ν} , ζ'_{ν} de M. Ostrowski existent, Δ_R admet dans sa frontière les suites homothétiques dans le rapport $\frac{1}{R}$, lesquelles ont pour ensemble limite, lorsque $R \rightarrow \infty$, l'axe imaginaire tout entier (à cause des

conditions $\frac{\xi_{\nu+1}}{\xi_\nu} \rightarrow 1, \frac{\xi'_{\nu+1}}{\xi'_\nu} \rightarrow 1$) : donc δ_0 est le même pour toutes les suites R_n et coïncide avec le demi-plan $\xi > 0$.

$\varphi_0(\zeta)$ doit alors représenter δ_0 sur D . Or $\varphi(0) = 0, \varphi(\infty) = \infty, |\varphi_0(1)| = 1$. Donc $\varphi_0(\zeta) \equiv \zeta$ et $\varphi_0(\zeta)$ ne dépend pas non plus de la suite considérée.

C. Q. F. D.

33. A cette étude se rattachent les *théorèmes sur les plis* de M. Ostrowski *[1, p. 449-471]. Le domaine Δ satisfaisant aux conditions du théorème précédent, M. Ostrowski définit le *noyau* Δ^* et les *plis* F_ν du domaine.

Pour $a_0 > 0$ assez grand, la demi-droite $\xi > a_0$ portée par l'axe réel est contenue dans Δ . Pour tout $\rho > a_0$, on désigne par β_ρ le plus grand arc de la circonférence $|\zeta| = \rho$ contenu dans Δ et contenant le point $\zeta = \rho$. Le *noyau* Δ^* de Δ est l'ensemble de tous les points de tous les arcs β_ρ . C'est un domaine simplement connexe dont la frontière est formée de points de Γ et d'un ensemble fini ou dénombrable d'arcs γ_ν de certaines circonférences $|\zeta| = \rho_\nu$. Chacun de ces arcs γ_ν est une coupure de Δ qui isole un domaine simplement connexe F_ν contigu à Δ^* appelé *pli* du domaine.

Si ζ est un point intérieur ou frontière de Δ^* , on pose $\rho(\zeta) = |\zeta|$.

Si ζ est un point intérieur ou frontière d'un pli F_ν , on pose $\rho(\zeta) = \rho_\nu$.

Par la méthode de la mesure conforme, M. Ostrowski démontre le théorème fondamental suivant.

PREMIER THÉORÈME SUR LES PLIS. — Si $\rho(\zeta) \rightarrow \infty, |\varphi(\zeta)| \sim \varphi[\rho(\zeta)]$.

La définition des plis fait jouer un rôle particulier à l'origine. Mais M. Ostrowski montre que si l'on change d'origine, la nouvelle fonction $\rho'(\zeta)$ est équivalente à $\rho(\zeta)$ lorsque $\rho(\zeta) \rightarrow \infty$.

34. En rapprochant ce théorème d'une extension du lemme de Schwarz donnée par M. Julia (1), nous obtenons un lemme dont nous ferons usage dans la suite.

(1) G. JULIA, *Acta Math.*, t. 42, 1920, p. 349-355; pour l'application à la représentation conforme, voir les Mémoires de MM. G. Valiron et C. Carathéodory cités dans l'Introduction, p. 2.

LEMME II. — Si le domaine Δ contient un domaine Δ_1 , admettant aussi $\alpha = \infty$ comme point frontière accessible et valable en ce point sur un angle d'ouverture $m\pi$, et si l'on représente Δ sur D par la fonction $z = \varphi(\zeta)$ avec correspondance des points à l'infini, le rapport $\frac{|\varphi(\zeta)|^m}{\rho(\zeta)}$ reste borné lorsque $\rho(\zeta) \rightarrow \infty$.

Démonstration. — Nous pouvons supposer les axes choisis de telle sorte que Δ_1 contienne les secteurs $S_\varepsilon : |\text{Arg } \zeta| < \frac{m\pi}{2} - \varepsilon, |\zeta| > R_\varepsilon$. D'après le théorème sur les plis, il suffit de démontrer la propriété pour les points $\zeta = \rho$ de l'axe réel. Soit $\zeta = f_1(z)$ une fonction qui représente conformément D sur Δ_1 avec correspondance des points à l'infini, et $z = \varphi_1(\zeta)$ la fonction inverse; Δ_1 étant valable sur un angle d'ouverture $m\pi$, $\frac{f_1(z)}{z^m} \rightarrow \frac{1}{\lambda}$ ($0 < \lambda < \infty$) lorsque $z \rightarrow \infty$ ($|\text{Arg } z| < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$).

La fonction $\varphi(\zeta)$ représente Δ_1 sur un domaine D_1 intérieur à D . La fonction $\varphi[f_1(z)] = \psi(z)$ représente donc D sur le domaine intérieur D_1 . D'après le théorème de M. Julia

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{R[\psi(z)]}{z} = c \quad (0 \leq c < \infty),$$

si

$$\zeta = \rho \rightarrow \infty, \quad z = \varphi_1(\rho) \rightarrow \infty, \quad \text{Arg } z \rightarrow 0, \quad \frac{\varphi(\rho)}{\varphi_1(\rho)} \rightarrow c,$$

et, comme

$$\frac{\varphi_1^m(\rho)}{\rho} \rightarrow \lambda, \quad \frac{|\varphi^m(\rho)|}{\rho} \rightarrow \lambda c^m.$$

C. Q. F. D.

Application à l'étude des limites de $f(z)$.

35. Nous allons appliquer les considérations précédentes à un problème qui nous a déjà occupés (Chap. II, § 22), mais cette fois d'un point de vue local : préciser, selon la configuration géométrique de la frontière Γ de Δ , l'ordre de contact avec $y'y$ des courbes Γ s'éloignant à l'infini dans D sur lesquelles la fonction $\zeta = f(z)$ a pour limite unique $\alpha = \infty$ (l'ordre maximum de contact d'une telle courbe avec l'axe $y'y$ à l'infini est $k = -\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log x}{\log r} + 1$). En supposant que la

représentation de Δ sur D est semi-conforme à l'infini et que Δ contient à son intérieur un domaine Δ' valable au point $\alpha = \infty$, nous avons obtenu le résultat suivant.

THEOREME. — *Si l'on peut former un domaine Δ^* contenu dans Δ admettant dans sa frontière le point $\alpha = \infty$, mais aucun point accessoire du bout $E(\infty)$, en enlevant de Δ une suite de domaines périphériques (poches) Δ_n , séparées de Δ^* par des coupures ρ_n d'extrémités $\alpha_n \beta_n$ sur Γ , la coupure ρ_n étant contenue dans le cercle de centre α_n , de rayon δ_n , et satisfaisant à*

$$(30) \quad \rho_n \rightarrow \infty, \quad \frac{\delta_n}{\rho_n} \rightarrow 0, \quad \delta_n \sqrt{\frac{\rho_n}{R_n}} < \mu \rho_n^{-k} \quad (k > -1)$$

[μ étant une constante > 0 , $R_n = |\alpha_n|$, $\rho_n = \rho(\alpha_n)$].

Alors $\zeta = f(z) \rightarrow \infty$ lorsque $z = x + iy \rightarrow \infty$ dans le domaine $x \geq ay^{-k}$ quel que soit $a > 0$.

Plus généralement, si Δ contient un domaine Δ' valable au point $\alpha = \infty$ sur un angle d'ouverture $m\pi$ (par exemple un secteur angulaire d'accessibilité) la dernière condition (30) doit être remplacée par

$$(31) \quad \delta_n < \mu \sqrt{\rho_n R_n} \rho_n^{-\frac{k+1}{m}} \quad (k > -1).$$

36. *Démonstration.* — Soient (fig. 5) Δ_n la poche séparée de Δ par la coupure ρ_n , et $\Delta'_n = \Delta - \Delta_n$ le domaine simplement connexe restant; Γ_n la portion de la frontière Γ , définie par son voisinage, qui, avec la coupure ρ_n , limite Δ_n , et correspond à un segment s_n de $y'y$ limité aux points a_n, b_n , correspondant respectivement à α_n, β_n ; z'_n l'image dans D du point $\zeta = \rho_n$ de l'axe réel $O\xi$, point qui est contenu dans Δ et Δ'_n dès que ρ_n est assez grand.

D'après les propriétés de la mesure conforme

$$m(\rho_n, \Gamma_n, \Delta) = m(z'_n, s_n, D) = 2 \left| \text{Arg} \frac{z'_n - a_n}{z'_n - b_n} \right| \leq 8 \sqrt{\frac{\delta_n}{|\rho_n - \alpha_n|}},$$

α_n étant sur la frontière de Δ , on a

$$\underline{\lim} \text{Arg} \alpha_n \geq \frac{\pi}{2}, \quad \underline{\lim} \frac{|\rho_n - \alpha_n|}{\rho_n} \geq 1.$$

Puisque

$$\frac{\delta_n}{\rho_n} \rightarrow 0, \quad \frac{b_n}{a_n} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad \text{Arg} \frac{z'_n - a_n}{z'_n - b_n} \rightarrow 0.$$

D'après le premier théorème sur les plis, si l'on pose $r'_n = |z'_n|$, $r_n = |a_n|$, on voit que $\frac{r'_n}{r_n} \rightarrow 1$. D'autre part, la représentation étant semi-conforme, $\text{Arg} z'_n \rightarrow 0$. Donc

$$|\text{Arg}(z'_n - a_n)| \rightarrow \frac{\pi}{4}, \quad |\text{Arg}(z'_n - b_n)| \rightarrow \frac{\pi}{4}.$$

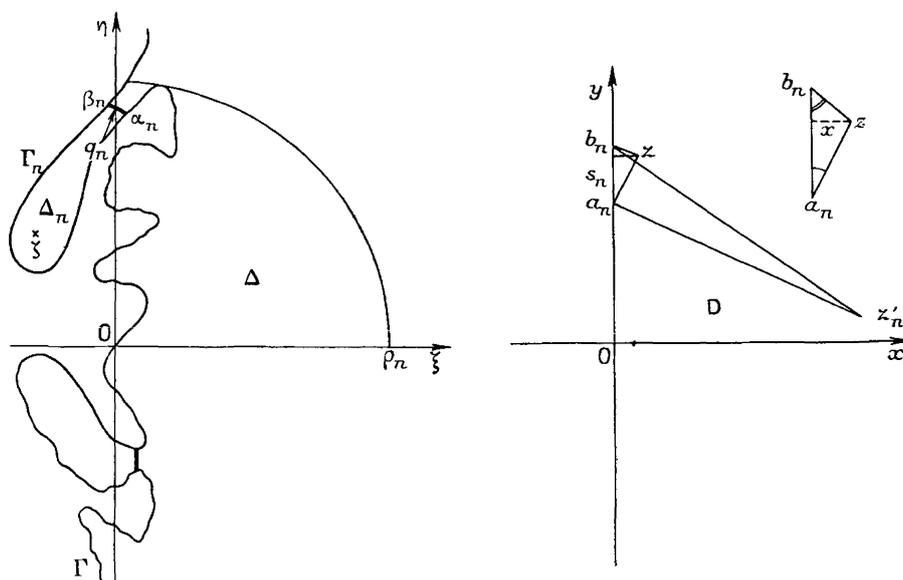


Fig. 5.

Dans le triangle $a_n b_n z'_n$ la longueur l_n du segment s_n est équivalente à $2r'_n \left| \text{Arg} \frac{z'_n - b_n}{z'_n - a_n} \right|$, donc

$$(32) \quad \frac{l_n}{r_n} < 8(1 + \varepsilon_n) \sqrt{\frac{\delta_n}{\rho_n}} \quad (\varepsilon_n \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty).$$

Soit une suite ζ_p de points de Δ tendant vers un point accessoire ω du bout premier $E(\infty)$ à distance finie, $\rho(\zeta_p) \rightarrow \infty$. Dès que p est assez grand, ζ_p ne peut plus tomber dans Δ^* , puisque ce domaine

n'admet plus ω dans sa frontière. Donc ζ_p tombe dans une poche Δ_{n_p} . Il est impossible que l'indice n_p reste borné lorsque $p \rightarrow \infty$, car l'image d'une poche Δ_n est un domaine D_n , contenu dans D , tout entier à distance finie. Or si $\zeta_p \rightarrow \omega$, $z_p \rightarrow \infty$, le point z_p ne peut rester dans un domaine D_{n_p} d'indice borné.

Évaluons la mesure conforme de Γ_n vu d'un point $\zeta = f(z)$ intérieur à Δ_n , dans Δ ; si $|\zeta - \alpha_n| > \delta_n$, on a

$$m(\zeta, \Gamma_n, \Delta) > m(\zeta, \Gamma_n, \Delta_n) = 2\pi - m(\zeta, q_n, \Delta_n) \geq 2\pi - 8\sqrt{\frac{\delta_n}{|\zeta - \sigma_n|}}$$

D'autre part,

$$m(\zeta, \Gamma_n, \Delta) = m(z, \delta_n, D) = 2 \left| \operatorname{Arg} \frac{z - a_n}{z - b_n} \right|.$$

Donc $|\zeta - \alpha_n| > \frac{64}{\pi^2} \delta_n$ entraîne $\left| \operatorname{Arg} \frac{z - a_n}{z - b_n} \right| > \frac{\pi}{2}$, l'angle $\widehat{a_n z b_n}$ est alors le plus grand du triangle $a_n b_n z$; supposons, pour fixer les idées, que $\widehat{a_n}$ soit le plus petit angle de ce triangle

$$\widehat{a_n} \leq \frac{\widehat{a_n} + \widehat{b_n}}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left| \operatorname{Arg} \frac{z - a_n}{z - b_n} \right| < 2\sqrt{\frac{\delta_n}{|\zeta - \sigma_n|}} < \frac{\pi}{4}.$$

Puisque l'angle en z du triangle est obtus, l'ordonnée y de z est comprise entre les ordonnées de a_n et b_n et son abscisse x vérifie

$$x \leq l_n \operatorname{tang} \widehat{a_n} < l_n \frac{4\widehat{a_n}}{\pi}.$$

Appliquons cette inégalité à ζ_p et à la poche Δ_{n_p} ; lorsque $p \rightarrow \infty$, $\zeta_p \rightarrow \omega$ et $\frac{|\zeta_p - \alpha_{n_p}|}{R_{n_p}} \rightarrow 1$

$$x_p < \frac{8}{\pi} l_{n_p} \sqrt{\frac{\delta_{n_p}}{R_{n_p}}} (1 + \varepsilon'_p) \quad (\varepsilon'_p \rightarrow 0);$$

en comparant à (32) on obtient

$$x_p < \frac{64}{\pi} (1 + \varepsilon''_p) r_{n_p} \frac{\delta_{n_p}}{\sqrt{\rho_{n_p} R_{n_p}}} \quad (\varepsilon''_p \rightarrow 0).$$

D'après le lemme II il existe une constante K telle que $r_{n_p} < K\rho_{n_p}$, puisque Δ contient un domaine valable. D'autre part,

$$\left| \frac{y_p}{a_{n_p}} \right| \rightarrow 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left| \frac{y_p}{r_{n_p}} \right| \rightarrow 1,$$

puisque $|y_p|$ est compris entre $|a_{n_p}|$ et $|b_{n_p}|$.

Ces inégalités, jointes à l'hypothèse (30), montrent que $x_p|y_p|^k$ reste borné par un nombre H fini indépendant du point ω lorsque $p \rightarrow \infty$. Donc si z tend vers l'infini dans le domaine $x > H|y|^{-k}$, le point $\zeta = f(z)$ ne peut avoir pour limite aucun point accessoire ω du bout $E(\infty)$ à distance finie et $f(z) \rightarrow \infty$. Mais il résulte alors d'un théorème de M. Montel [1, p. 36], que $f(z)$ a même limite $\alpha = \infty$ lorsque $z \rightarrow \infty$ dans un domaine $x > a|y|^{-k}$ quel que soit $a > 0$.

Si, plus généralement, Δ contient un domaine Δ' valable sur un angle d'ouverture $m\pi$, le raisonnement n'est pas modifié, mais on a $r_{n_p}^m < K\rho_{n_p}$ et, pour arriver à la même conclusion, il faut modifier légèrement l'hypothèse.

Le cas limite $k = -1$ correspond à la convergence angulaire déjà étudiée. La condition (31) n'impose alors rien de plus que la semi-conformité de la représentation; mais, comme nous l'avons vu, cette condition n'est nullement nécessaire. Il semble difficile d'obtenir pour $h > -1$ des conditions à la fois nécessaires et suffisantes.

37. *Exemples.* — Pour $k = 0$ nous obtenons une condition suffisante pour que $f(z)$ ait pour limite unique $\alpha = \infty$ lorsque $z \rightarrow \infty$ dans un demi-plan quelconque ($x > a > 0$), ou, si l'on représente D sur le cercle $C(|\omega| \leq 1)$ et posant $f[z(\omega)] = g(\omega)$, une condition suffisante pour que $g(\omega)$ ait une limite unique lorsque ω tend vers un point de la circonférence $K(|\omega| = 1)$ en restant dans un cercle tangent intérieurement à K en ce point.

La condition est toujours satisfaite si la frontière de Δ est toute entière comprise entre deux droites, par exemple entre $\xi = 0$ et $\xi = -1$, ce qui n'exclut pas l'existence d'un bout premier admettant pour seul point accessible $\alpha = \infty$ et possédant un continu de points accessoires, comme le montrent les deux exemples suivants (fig. 6 et 7).

Dans ces exemples, le domaine Δ est formé par le demi-plan $\xi > -1$ dont on a ôté soit (*fig. 6*), les segments

$$\eta = m(\xi + 1), \quad -1 < \xi \leq 0 \quad (m \text{ entier quelconque});$$

soit (*fig. 7*), le continu

$$\eta = \frac{1}{\xi + 1} \sin \frac{\pi}{\xi + 1}; \quad -1 < \xi \leq 0.$$

Dans les deux cas, le bout E est constitué par la droite $\xi = -1$ en entier. Il suffit de prendre pour coupures ρ_n des segments parallèles à

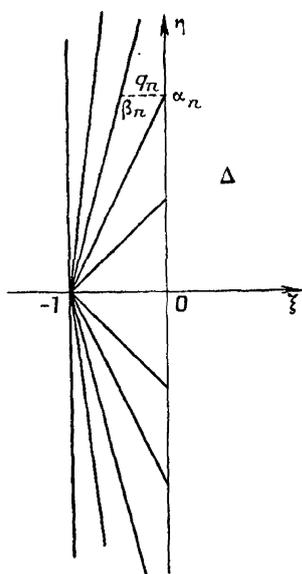


Fig. 6.

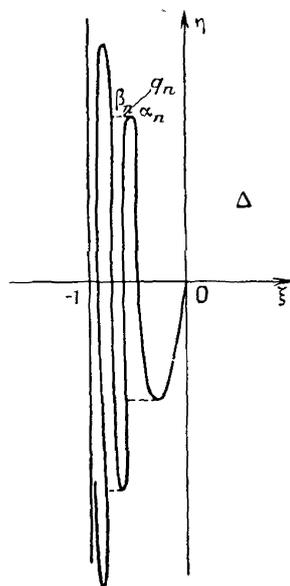


Fig. 7.

l'axe réel; leur longueur est toujours inférieure à 1. On pourrait aussi prendre pour coupures ρ_n les arcs de cercle centrés à l'origine qui limitent les plis : alors Δ^* serait le noyau de Δ . Dans tous les cas, on peut choisir les points α_n de manière que $\rho_n = R_n$ et la condition (30) est satisfaite.

La propriété peut d'ailleurs se démontrer directement comme application d'un théorème de M. Julia étendu par MM. Valiron et

Carathéodory : on sait en effet que, dans ce cas, il existe une constante c ($0 < c < \infty$) telle que

$$c(\zeta + 1) \geq x \geq c\zeta \quad |\zeta = \xi + i\eta = f(x + iy)|.$$

Donc, si $z = x + iy \rightarrow \infty$ dans le demi-plan $x > c$, nécessairement, $\zeta \rightarrow \infty$. Le résultat se déduit alors du théorème de M. Montel.

Plus généralement, si la frontière de Δ est comprise entre les deux courbes

$$\begin{aligned} (C) \quad & \xi = A|\eta|^{-k} \\ (C') \quad & \xi = B|\eta|^{-k} \end{aligned} \quad (A > B, k > -1),$$

les conditions du théorème sont satisfaites. Remarquons que c'était la condition suffisante trouvée par MM. Bessonoff et Lavrentieff ⁽¹⁾ pour que le domaine Δ soit valable.

Il suffit d'ailleurs que Δ contienne le domaine Δ_1 , valable défini par $\xi \geq A|\eta|^{-k}$ et possède une double infinité de points frontières α_n, α'_n (fig. 8), compris entre les courbes CC' , tels que

$$\left. \begin{aligned} \text{Arg } \alpha_n \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_n \rightarrow \infty, \quad R_{n+1} - R_n < \mu R_n^{-k} \quad (R_n = |\alpha_n|) \\ \text{Arg } \alpha'_n \rightarrow -\frac{\pi}{2}, \quad \alpha'_n \rightarrow \infty, \quad R'_{n+1} - R'_n < \mu R'_n{}^{-k} \quad (R'_n = |\alpha'_n|) \end{aligned} \right\} (\mu > 0).$$

En effet, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que le point α_n est une extrémité de l'arc du cercle $|\zeta| = |\alpha_n|$ qui appartient au noyau de Δ , sinon on le remplacerait par une extrémité convenable de cet arc. Alors $\rho_n = |\alpha_n| = R_n$. On prendra $\beta_n = \alpha_{n+1}$ et ρ_n sera la coupure constituée par deux segments parallèles à l'axe réel limités à leurs points de rencontre $\alpha_n^{(1)} \alpha_{n+1}^{(1)}$ avec C , et par l'arc de C qui joint $\alpha_n^{(1)}$ à $\alpha_{n+1}^{(1)}$. La longueur de cette coupure est de l'ordre de $R_{n+1} - R_n$, donc elle satisfait à (30). On opère de même sur les points α'_n .

Remarquons que les suites α_n, α'_n satisfont aux conditions de M. Ostrowski, et que leur existence entraîne la semi-conformité de la représentation; on verra au Chapitre IV qu'elle entraîne même l'existence d'une dérivée angulaire.

⁽¹⁾ *Bull. Soc. Math. France*, t. 38, 1930, p. 175-198.

Pour terminer donnons un exemple distinct des précédents (*fig. 9*).
 Étant données deux suites de points α_n, α'_n sur l'axe imaginaire
 ($\alpha_n = iR_n, \alpha'_n = -iR'_n$) s'éloignant à l'infini et satisfaisant à

$$R_{n+1} - R_n < \mu R_n^{-k}, \quad R'_{n+1} - R'_n < \mu R'_n{}^{-k} \quad (\mu > 0),$$

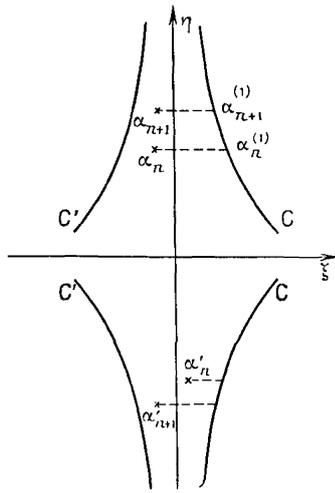


Fig. 8.

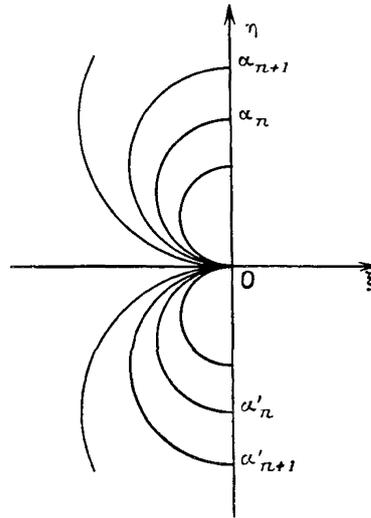


Fig. 9.

le domaine Δ est constitué par le plan de ζ dont on a ôté les coupures
 formées par les demi-cercles

$$\left| \zeta - \frac{\alpha_n}{2} \right| = \frac{R_n}{2} \quad (\zeta < 0), \quad \left| \zeta - \frac{\alpha'_n}{2} \right| = \frac{R'_n}{2} \quad (\zeta < 0),$$

le bout E est formé par l'ensemble des points de l'axe réel négatif $O\zeta'$.
 Les conditions (30) sont satisfaites.

CHAPITRE IV.

CONDITIONS D'EXISTENCE D'UNE DERIVÉE ANGULAIRE.

38. Nous rappellerons tout d'abord les résultats de M. Ahlfors.

Nous supposons toujours, dans ce qui suit, que Δ admet le point
 $\alpha = \infty$ comme point frontière accessible correspondant à $a = \infty$ et le
 point $\beta = 0$ correspondant à $b = 0$.

On pose

$$\sigma = \log \zeta = X + iY, \quad s = \log z = u + iv,$$

$\sigma(\zeta)$ et $s(z)$ sont deux fonctions uniformes respectivement dans Δ et D qui représentent Δ et D sur deux domaines Ω et B . Soit β_ρ le plus grand arc du cercle $|\zeta| = \rho$, contenu dans Δ et coupant un arc de Jordan donné joignant $\beta = 0$ à $\alpha = \infty$. [Dans le cas où Δ contient les secteurs $S_\varepsilon(|\text{Arg} \zeta| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon, |\zeta| > R_\varepsilon)$, donc pour ρ_0 assez grand la demi-droite $\eta = 0, \xi > \rho_0$, l'axe β_ρ sera choisi de manière à couper cette demi-droite pour $\rho > \rho_0$; lorsque ρ varie cet arc engendre le noyau Δ^* de Δ .] Soit b_ρ la coupure du domaine D image de β_ρ dans la transformation $z = \varphi(\zeta)$. Θ_ρ et Γ_ρ seront les coupures correspondantes des domaines Ω et B . On désigne par $\Theta(\rho)$ la longueur de la coupure Θ_ρ ; par $u_2(\rho)$ et $u_1(\rho)$ respectivement le maximum et le minimum de $u = \log r$ sur la coupure Θ_ρ .

Alors si

$$\rho_2 > \rho_1 \quad \text{et} \quad \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho \Theta(\rho)} > 2,$$

on a la première inégalité

$$(33) \quad u_1(\rho_2) - u_2(\rho_1) \geq \pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho \Theta(\rho)} - 4\pi.$$

Cette formule se démontre à l'aide de l'inégalité de Schwarz. Jointe à une deuxième inégalité qui donne une limitation en sens inverse, mais, dans des cas plus restreints, et dont nous ne nous servirons pas ici, elle a permis à M. Ahlfors d'établir le théorème suivant.

THÉORÈME. — *Pour qu'il existe une dérivée angulaire*

$$c = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\rho}{r} \quad (0 < c < \infty).$$

A. *Il est nécessaire que l'intégrale*

$$(34) \quad \int_1^\rho \frac{\pi - \Theta(\rho)}{\Theta(\rho)} \frac{d\rho}{\rho}$$

soit bornée supérieurement et que pour tout domaine $\bar{\Delta}$ contenu dans Δ , symétrique par rapport à l'axe réel, pour lequel la fonction associée $\bar{\Theta}(\rho)$

est à variation totale bornée, l'intégrale

$$(35) \quad \int_1^{\rho} \frac{\pi - \overline{\Theta}(\rho)}{\overline{\Theta}(\rho)} \frac{d\rho}{\rho}$$

soit bornée inférieurement.

B. Il suffit que si l'on désigne par μ_ν le maximum de $\frac{\pi}{2} - |\text{Arg } \zeta|$ sur la frontière de Δ pour $K^\nu \leq |\zeta| \leq K^{\nu+1}$, K étant une constante positive quelconque supérieure à 1, et si l'on pose

$$\begin{aligned} \lambda_\nu &= \mu_\nu & \text{si } \mu_\nu \geq 0, \\ \lambda_\nu &= 0 & \text{si } \mu_\nu < 0, \end{aligned}$$

la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu$ converge ⁽¹⁾ ainsi que l'intégrale

$$(36) \quad \int_1^{\infty} [\Theta(\rho) - \pi] \frac{d\rho}{\rho}$$

39. Citons, comme application de la première inégalité, l'interprétation géométrique des résultats du Chapitre II. Nous avons vu que, pour une plénitude de points a de $\gamma' \gamma$, lorsque $z \rightarrow a$ dans un angle d'approximation $f(z)$ a une limite $\alpha(a)$ et

$$f'(z) \sqrt{z-a} \rightarrow 0, \quad \frac{f(z) - \alpha}{\sqrt{z-a}} \rightarrow 0.$$

Par les transformations homographiques $z_1 = \frac{1}{z-a}$, $\zeta_1 = \frac{1}{\zeta - \alpha}$ on se ramène au cas où $\zeta = f(z) \rightarrow \infty$, lorsque $z \rightarrow \infty$ ($|\text{Arg } z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$). Alors

$$\frac{f(z)}{\sqrt{z}} \rightarrow \infty, \quad \log \rho - \frac{1}{2} \log r \rightarrow \infty,$$

(1) M. Grootenboer a montré qu'on pouvait remplacer cette condition par la suivante, un peu plus générale : λ_ν étant défini dans l'intervalle $\rho_\nu \leq |\zeta| \leq \rho_{\nu+1}$ il suffit que les séries $\sum_1^{\infty} \lambda_\nu$ et $\sum_1^{\infty} \lambda_\nu \log \frac{\rho_{\nu+1}}{\rho_\nu}$ convergent.

d'après l'inégalité d'Ahlfors

$$\int_1^R \frac{\Theta(\rho) - \pi}{\Theta(\rho)} \frac{d\rho}{\rho} \rightarrow +\infty, \quad \text{lorsque } R \rightarrow \infty.$$

Donc, quel que soit R_0 , on ne peut avoir constamment pour $R > R_0$: $\Theta < \frac{\pi}{2}$. Autrement dit, il existe une infinité de valeurs de ρ pour lesquelles Δ contient un arc β_ρ du cercle $|\zeta| = \rho$ de mesure supérieure à $\frac{\pi}{2}$. Et plus précisément, la valeur moyenne de $\Theta(\rho)$ calculée en prenant $\log \rho$ pour variable, dans l'intervalle $1 \leq \rho \leq R$, a une limite inférieure au moins égale à $\frac{\pi}{2}$ lorsque $R \rightarrow \infty$.

40. *Propriétés de l'intégrale de Poisson.* — Soit

$$F(z) = G(x, y) + iH(x, y)$$

une fonction holomorphe dans le demi-plan droit D et sur sa frontière $y'y (x \geq 0)$ dont la partie réelle $G(x, y)$ prend sur l'axe $y'y$ une suite continue de valeurs, soit $g(y)$. L'intégrale de Poisson (1) transformée donne

$$F(z_0) - F(1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{z_0 - iy} - \frac{1}{1 - iy} \right) g(y) dy.$$

Supposons maintenant que $F(z)$ soit holomorphe seulement dans l'intérieur de D et pas nécessairement sur $y'y$. On considère alors la fonction continue $g_\varepsilon(y) = G(\varepsilon, y)$ et l'intégrale

$$(37) \quad F(z_0) - F(1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{z_0 - iy} - \frac{1}{1 - iy} \right] g_\varepsilon(y) dy,$$

indépendante de ε dès que $\varepsilon < x_0$.

Supposons que $G(x, y)$ soit bornée et tende vers une limite $g(y)$ lorsque, y restant fixe, x tend vers zéro, pour toute valeur de y , excepté au plus pour un ensemble E de points $a = iy$ de l'axe $y'y$ tel que

$$\int_E \frac{y dy}{1 + y^2} = 0$$

(1) Voir FATOU, *Acta Mathematica*, t. 30, 1906, p. 360.

Si l'on fait tendre ε vers zéro, l'intégrale (37) existe à la limite comme intégrale de Lebesgue, car la limite de $g_\varepsilon(y)$ est une fonction $g(y)$ bornée, de première catégorie, donc mesurable, et définie en tout point de $y'y$ étranger à E. Bornons-nous à considérer

$$(38) \quad H(x_0, 0) - H(1, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{1}{x_0^2 + y^2} - \frac{1}{1 + y^2} \right] [g(y) - g(-y)] y \, dy.$$

Pour que $H(x_0, 0)$ ait une limite finie lorsque x_0 tend vers l'infini, il faut et il suffit que l'intégrale de Lebesgue

$$\int_0^\infty |g(y) - g(-y)| \frac{y \, dy}{1 + y^2} \quad \text{soit convergente.}$$

On voit que dans cette intégrale on peut négliger l'ensemble E.

41. Appliquons ces considérations à la fonction

$$F(z) = i \log \frac{f(z)}{z} = i \log \frac{\rho}{r} - (\text{Arg } \zeta - \text{Arg } z),$$

$f(z)$ étant toujours la fonction qui représente conformément D sur Δ ; on a

$$|\text{Arg } \zeta - \text{Arg } z| < 3\pi.$$

D'après les résultats du Chapitre II (§ 21)⁽¹⁾, si z tend vers un point $a = it$ de l'axe $y'y$ sur une parallèle à Ox , le point $\zeta = f(z)$ tend vers un point accessible de la frontière de Δ à distance finie ou infinie, excepté au plus pour un ensemble E de points de $y'y$ tel que

$$\int_E \frac{dy}{y} = 0, \quad \text{donc à fortiori} \quad \int_E \frac{dy}{1 + y^2} = 0.$$

Si $f(z)$ a une dérivée angulaire $c = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \frac{|f(x_0)|}{x_0}$, $\log \frac{|f(x_0)|}{x_0}$ tend vers la limite finie $\log c$ lorsque x_0 tend vers l'infini. Pour cela il faut et il suffit que si l'on pose

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{Arg} \frac{f(x + it)}{it} = -g(t),$$

⁽¹⁾ On applique le résultat ici au voisinage de $a = \infty$, ce qui est possible, parce que $f(z)$ est définie dans le demi-plan D entier et qu'on étudie les limites de $f(z)$ sur la sphère de Riemann.

l'intégrale (39) $\int_1^\infty [g(y) - g(-y)] \frac{dy}{y}$ converge.

[$g(t)$ existe si le point $a = it$ n'appartient pas à E].

Si le domaine Δ est symétrique par rapport à l'axe réel,

$$g(y) = -g(-y) = \frac{i}{2}[\pi - \Theta(y)]$$

(notations de M. Ahlfors).

D'après une remarque de M. Ahlfors il est suffisant, pour l'existence d'une dérivée angulaire, que le rapport $\frac{|f(z)|}{|z|}$ reste borné inférieurement et supérieurement lorsque z tend vers l'infini sur un chemin L contenu dans un angle $|\text{Arg } z| < \frac{\pi}{2} - \epsilon$, par exemple sur l'axe réel; donc il suffit que l'intégrale (39) soit bornée en module.

Conditions suffisantes.

42. Pour qu'un domaine Δ soit valable, il suffit qu'il contienne un domaine valable Δ_1 et soit contenu dans un domaine valable Δ_2 : car si Δ contient un domaine valable Δ_1 , nous avons vu (lemme II, Chap. III) que le rapport $\frac{|\varphi(\zeta)|}{|\rho(\zeta)|}$ est borné angulairement, et l'on montrerait de même que si Δ est contenu dans un domaine valable Δ_2 , le rapport $\frac{\rho(\zeta)}{|\varphi(\zeta)|}$ est borné. La condition cherchée se décompose ainsi en deux parties.

Comme domaine Δ_1 nous prendrons un domaine simplement connexe, symétrique par rapport à l'axe réel, contenu dans le demi-plan droit $\xi > 0$ et limité par un arc de Jordan. Pour qu'un tel domaine soit valable, il faut et il suffit que l'intégrale, toujours positive,

$$(39') \quad \int_1^\infty \left[\frac{\pi}{2} - \text{Arg } f(iy) \right] \frac{dy}{y} = \int_1^\infty g(y) \frac{dy}{y}$$

soit bornée.

Pour former Δ_1 (fig. 10), nous nous donnons une suite positive croissante quelconque $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\nu, \dots (\rho_\nu \rightarrow \infty)$ et nous désignons comme précédemment par μ_ν le maximum de $\frac{\pi}{2} - |\text{Arg } \zeta|$ sur la frontière de Δ pour $\rho_\nu \leq |\zeta| \leq \rho_{\nu+1}$, par λ_ν le plus grand des nombres 0 et μ_ν .

Δ_1 sera l'intérieur de la région formée par la réunion des secteurs $\rho_v \leq |\zeta| \leq \rho_{v+1}$, $|\text{Arg} \zeta| \leq \frac{\pi}{2} - \lambda_v$. La frontière de Δ_1 est une ligne brisée formée d'arcs des cercles $|\zeta| = \rho_v$ et de segments des demi-droites $|\text{Arg} \zeta| = \frac{\pi}{2} - \lambda_v$. Dans la représentation conforme de Δ_1 sur D [$\zeta = f_1(z)$; $z = \varphi_1(\zeta)$] réalisée de manière que les points à l'infini et

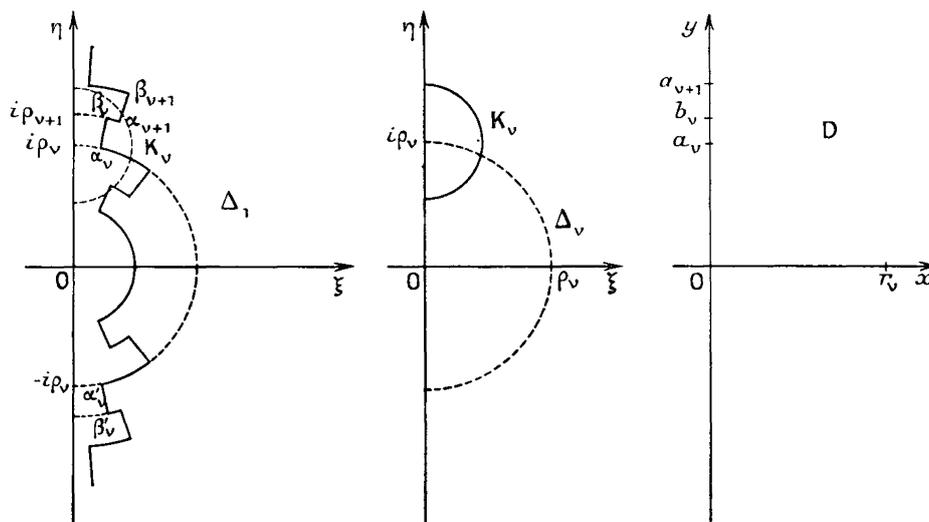


Fig. 10.

les axes réels se correspondent, il y a correspondance continue entre les frontières. Posons

$$\alpha_v = \rho_v e^{i(\frac{\pi}{2} - \lambda_v)}, \quad \beta_v = \rho_{v+1} e^{i(\frac{\pi}{2} - \lambda_v)}, \quad u_v = \lambda_v + \frac{\rho_{v+1} - \rho_v}{\rho_v}.$$

Considérons le segment $\alpha_v \beta_v$ de la frontière de Δ_1 . Il est dans le cercle $\Gamma_v : |\zeta - iR_v| \leq \rho_v u_v$, d'autre part l'arc $\beta_v \alpha_{v+1}$ de la frontière de Δ_1 est intérieur au moins

$$\begin{aligned} &\text{à } \Gamma_v && \text{si } \lambda_v \geq \lambda_{v+1}, \\ &\text{à } \Gamma_{v+1} && \text{si } \lambda_v \leq \lambda_{v+1}. \end{aligned}$$

Donc, tout point frontière de Δ_1 tombe au moins dans un cercle Γ_v ou dans son symétrique par rapport à l'axe réel. Soit Δ_v le domaine formé des points du demi-plan droit ($\xi > 0$) extérieurs à Γ_v .

D'après les propriétés de la mesure conforme, si σ_ν est un arc de frontière de Δ_1 contenu dans Γ_ν , K_ν la demi-circonférence ($|\zeta - i\rho_\nu| = \rho_\nu u_\nu$, $\xi > 0$) qui limite Δ_ν , et ζ un point intérieur à la fois à Δ_ν et Δ_1 , on a

$$m(\zeta, \sigma_\nu, \Delta_1) \leq m(\zeta, K_\nu, \Delta_\nu).$$

Appliquons cette inégalité au point $\zeta = \rho_\nu$ de l'axe réel, intérieur à Δ_1 et Δ_ν si ν est assez grand,

$$m(\rho_\nu, K_\nu, \Delta_\nu) = 4 \operatorname{Arg} \frac{1 - i(1 - u_\nu)}{1 - i(1 + u_\nu)} = 4 \operatorname{Arc} \operatorname{tang} \frac{2u_\nu}{2 - u_\nu^2}.$$

Dès que u_ν est inférieur à 1 on a

$$m(\rho_\nu, \sigma_\nu, \Delta_1) < 8u_\nu.$$

Le domaine Δ_1 est un domaine « sans plis » dont la représentation sur D est semi-conforme à l'infini si $\lambda_\nu \rightarrow 0$. Alors, d'après le théorème sur les plis de M. Ostrowski (§ 33), si l'on pose

$$r_\nu = \varphi_1(\rho_\nu), \quad a_\nu = \varphi_1(\alpha_\nu), \quad b_\nu = \varphi_1(\beta_\nu),$$

on voit que

$$\frac{|a_\nu|}{r_\nu} \rightarrow 1, \quad \frac{|b_\nu|}{r_\nu} \rightarrow 1,$$

en outre, si $u_\nu \rightarrow 0$,

$$\frac{\rho_{\nu+1}}{\rho_\nu} \rightarrow 1, \quad \frac{r_{\nu+1}}{r_\nu} \rightarrow 1.$$

Soit s_ν le segment de l'axe $y'y$ correspondant à l'arc σ_ν . Il est vu du point $\zeta = r_\nu$ de l'axe réel sous un angle φ_ν

$$\varphi_\nu = \frac{1}{2} m(r_\nu, s_\nu, D) = \frac{1}{2} m(\rho_\nu, \sigma_\nu, \Delta_1) < 4u_\nu.$$

Donc $\varphi_\nu \rightarrow 0$ et la longueur l_ν de s_ν est équivalente à $\sqrt{2} r_\nu \rho_\nu$, d'où

$$l_\nu < 4\sqrt{2} r_\nu u_\nu (1 + \varepsilon_\nu) \quad (\varepsilon_\nu \rightarrow 0).$$

Sa longueur logarithmique, soit $d_\nu = \int_{s_\nu} \frac{dy}{y}$, est limitée par

$$d_\nu < 4\sqrt{2} u_\nu (1 + \varepsilon'_\nu) \quad (\varepsilon'_\nu \rightarrow 0),$$

donc $d_\nu < 6u_\nu$ pour ν assez grand (soit $\nu > \nu_0$). D'autre part, sur σ_ν le maximum de $\frac{\pi}{2} - \text{Arg } \zeta$ est λ_ν ,

$$\int_{\sigma_\nu} g(y) \frac{dy}{y} < 6u_\nu \lambda_\nu.$$

Tout point de la frontière de Δ_1 appartient au moins à un arc σ_ν ou à son symétrique σ'_ν par rapport à l'axe réel, donc les segments s_ν recouvrent le demi-axe positif Oy

$$\int_{\rho_0}^{\infty} g(y) \frac{dy}{y} < 6 \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \lambda_\nu u_\nu = 6 \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \lambda_\nu^2 + 6 \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \lambda_\nu \frac{\rho_{\nu+1} - \rho_\nu}{\rho_\nu}.$$

Posons $\log \frac{\rho_{\nu+1}}{\rho_\nu} = \delta_\nu$. La convergence de l'intégrale (39') est assurée si les deux séries $\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^2$ et $\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \delta_\nu$ sont convergentes.

THÉORÈME I. — *Si les deux séries $\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^2$ et $\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \delta_\nu$ sont convergentes, le domaine Δ_1 est valable.*

EXEMPLE. — Soit Δ le domaine obtenu en enlevant du demi-plan $\xi > 0$ les arcs de cercle

$$|\zeta| = R_\nu, \quad |\text{Arg } \zeta| \geq \frac{\pi}{2} - \theta_\nu, \quad \left(R_\nu \rightarrow \infty, \theta_\nu \rightarrow 0, \frac{R_{\nu+1}}{R_\nu} > K > 1 \right).$$

M. Wolff (1) a démontré, dans ce cas particulier, que la condition nécessaire trouvée par M. Ahlfors, à savoir la convergence de la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \theta_\nu^2$, était aussi suffisante. Ce résultat nous apparaît comme une application du théorème I : donnons-nous en effet une suite ε_ν décroissant assez vite pour que la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \theta_\nu \varepsilon_\nu$ soit convergente, et

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 200, 1935, p. 630. M. Ahlfors avait trouvé comme condition suffisante la convergence de la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \theta_\nu$.

satisfaisant en outre à $\varepsilon_\nu < \frac{1}{2} \log \frac{R_{\nu+1}}{R_\nu}$. On prendra

$$\rho_{2\nu} = R_\nu e^{-\varepsilon_\nu}, \quad \rho_{2\nu+1} = R_\nu e^{+\varepsilon_\nu}, \quad \text{d'où } \delta_{2\nu} = 2\varepsilon_\nu, \quad \lambda_{2\nu} = \theta_\nu, \quad \lambda_{2\nu+1} = 0.$$

43. Nous prendrons pour domaine Δ_2 la réunion de Δ et du demi-plan droit $\xi > 0$. Supposons que le domaine Δ satisfasse aux conditions (29) de semi-conformité de M. Ostrowski (avec $\theta_2 = -\theta_1 = +\frac{\pi}{2}$). On peut donc trouver sur sa frontière deux suites infinies de points ζ_n, ζ'_ν telles que

$$\begin{aligned} |\zeta_n| = R_n \rightarrow \infty, \quad \text{Arg } \zeta_n \rightarrow +\frac{\pi}{2}, \quad |\zeta'_\nu| = R'_\nu \rightarrow \infty, \quad \text{Arg } \zeta'_\nu \rightarrow -\frac{\pi}{2}; \\ \log \frac{R_{n+1}}{R_n} = \delta_n \rightarrow 0, \quad \log \frac{R'_{\nu+1}}{R'_\nu} = \delta'_\nu \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Les deux suites peuvent être ordonnées de manière que

$$R_{n+1} > R_n, \quad R'_{\nu+1} > R'_\nu, \quad \text{donc } \delta_n > 0, \quad \delta'_\nu > 0.$$

Cherchons à quelles conditions supplémentaires doivent satisfaire ces suites pour que le domaine Δ_2 soit valable. Posons

$$\begin{aligned} \theta_n = \begin{cases} \text{Arg } \zeta_n - \frac{\pi}{2} & \text{si } \text{Arg } \zeta_n > \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{si } \text{Arg } \zeta_n < \frac{\pi}{2}; \end{cases} \\ \theta'_\nu = \begin{cases} -\text{Arg } \zeta'_\nu - \frac{\pi}{2} & \text{si } \text{Arg } \zeta'_\nu < -\frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{si } \text{Arg } \zeta'_\nu > -\frac{\pi}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Considérons le plus grand arc (supérieur à π) du cercle $|\zeta| = R_n$ contenu dans Δ_2 . Soit α_n l'extrémité de cet arc qui a un argument positif; c'est un point accessible de la frontière du noyau de Δ_2 . On définirait de même le point α'_ν d'argument négatif

$$|\alpha_n| = R_n, \quad \frac{\pi}{2} \leq \text{Arg } \alpha_n \leq \frac{\pi}{2} + \theta_n; \quad |\alpha'_\nu| = R'_\nu, \quad -\frac{\pi}{2} \geq \text{Arg } \alpha'_\nu \geq -\frac{\pi}{2} - \theta'_\nu.$$

Nous désignerons par q_n (fig. 11) la coupure du domaine Δ_2 formée par les deux arcs de cercle

$$|\zeta| = R_n, \quad \frac{\pi}{2} \leq \text{Arg} \zeta \leq \text{Arg} \alpha_n; \quad |\zeta| = R_{n+1}, \quad \frac{\pi}{2} \leq \text{Arg} \zeta \leq \text{Arg} \alpha_{n+1},$$

et du segment de l'axe imaginaire joignant les points iR_n, iR_{n+1} . Cette coupure isole une poche Ω_n du domaine Δ_2 située dans le demi-

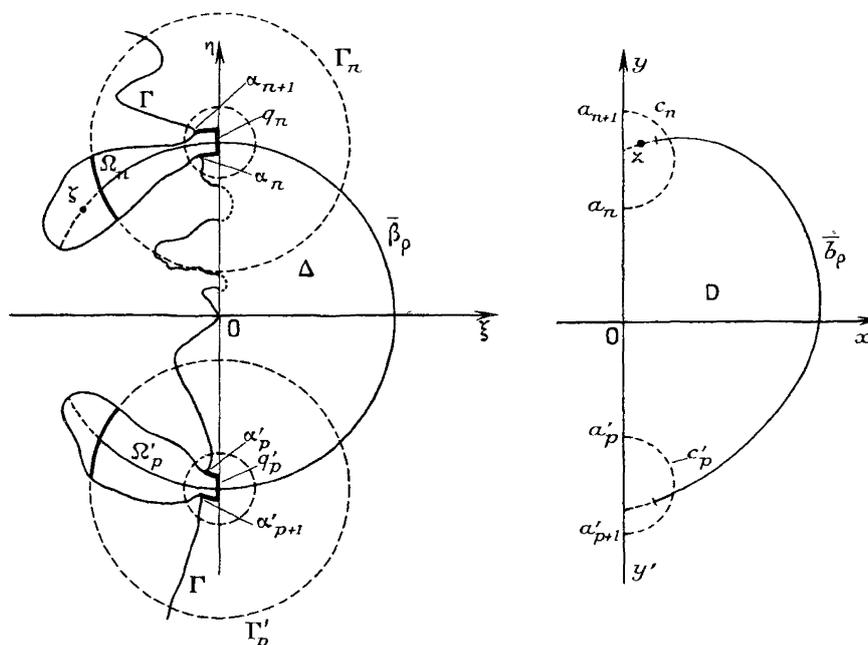


Fig. 11.

plan $\xi < 0$. Le cercle $|\zeta - iR_n| \leq R_n \rho_n$ contiendra la coupure ρ_n si l'on prend

$$\rho_n = \theta_n + \theta_{n+1} + \frac{R_{n+1} - R_n}{R_n}.$$

S'il existe un point ζ intérieur à Ω_n et extérieur au cercle Γ_n : $|\zeta - iR_n| \leq 16R_n \rho_n$, on aura, en désignant par γ_n la portion de frontière de Δ qui, avec q_n , limite Ω_n [par application des inégalités (26) et (27)],

$$m(\zeta, \gamma_n, \Delta_2) > m(\zeta, \gamma_n, \Omega_n) = 1 - m(\zeta, q_n, \Omega_n) > 2\pi - 4\pi \sqrt{\frac{R_n \rho_n}{16R_n \rho_n}} = \pi.$$

Donc si z, a_n, a_{n+1} sont les points correspondant respectivement à $\zeta, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ dans la représentation conforme de Δ_2 sur D [réalisée par $\zeta = f_2(z), z = \varphi_2(\zeta)$, avec correspondance des points à l'infini], on verra du point z le segment s_n de l'axe $y'y$ joignant les points a_n, a_{n+1} sous un angle φ_n

$$\varphi_n = \frac{1}{2} m(z, s_n, D) = \frac{1}{2} m(\zeta, \gamma_n, \Delta_2) > \frac{\pi}{2}.$$

Donc z est intérieur au demi-cercle c_n tracé sur s_n comme diamètre et contenu dans D .

On opère de même avec les points α'_p, α'_{p+1} et pour toutes les valeurs de n et p , on ôte du domaine Δ_2 tous les points, s'il en existe, intérieurs à une poche $\Omega_n(\Omega'_p)$ et extérieurs au cercle correspondant $\Gamma_n(\Gamma'_p)$; soit $\overline{\Delta_2}$ le domaine restant, limité par des arcs $\overline{\gamma'_n}, \overline{\gamma'_p}$ des circonférences Γ_n, Γ'_p et des portions de frontière de Δ_2 ; soit \overline{D} le domaine intérieur à D qui correspond à $\overline{\Delta_2}$ dans la transformation $z = \varphi_2(\zeta)$. Les arcs de la frontière de \overline{D} correspondant aux arcs $\overline{\gamma'_n}$ sont intérieurs au demi-cercle c_n .

Reprenons pour le domaine $\overline{\Delta_2}$ la démonstration de la première inégalité de M. Ahlfors *[1, p. 8]. La coupure $\overline{\beta}_\rho$ sera le plus grand arc (supérieur à π) du cercle $|\zeta| = \rho$ contenu dans $\overline{\Delta_2}$ et $\overline{\Theta}(\rho)$ sa mesure en radians. L'image de $\overline{\beta}_\rho$ dans la transformation $z = \varphi_2(\zeta)$ est une coupure \overline{b}_ρ du domaine \overline{D} portée par la coupure b_ρ image de β_ρ et n'en différant que par deux petits arcs contenus respectivement dans deux demi-cercles c_n, c'_p , les indices n et p étant déterminés par $R_n \leq \rho < R_{n+1}, R'_p \leq \rho < R'_{p+1}$.

La coupure \overline{b}_ρ sépare l'origine du point à l'infini dans D . Donc a_{n+1} est sur Oy , a'_{p+1} sur Oy' .

Posons

$$a_n = ir_n \quad (r_n > 0), \quad a'_p = -ir'_p \quad (r'_p > 0),$$

$$d_n = \log \frac{r_{n+1}}{r_n}, \quad d'_p = \log \frac{r'_{p+1}}{r'_p}.$$

Lorsque $\rho \rightarrow \infty$,

$$r_n \rightarrow \infty, \quad r'_p \rightarrow \infty, \quad \frac{r'_p}{r_n} \rightarrow 1.$$

Faisons les transformations $\sigma = \log \zeta = X + iY$, $s = \log z = u + iv$ (fig. 12); la coupure b_ρ a pour image une coupure \bar{T}_ρ du domaine \bar{B} transformé de \bar{D} , de longueur $\bar{l}(\rho)$, et portée par la coupure T_ρ de la bande $B(|v| < \frac{\pi}{2})$, transformée de b_ρ , de longueur $l(\rho)$ [$l(\rho) \geq \bar{l}(\rho)$].

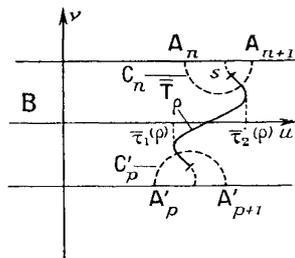


Fig. 12.

Soit $A_n = \log a_n$, $A'_\rho = \log a'_\rho$. Nous allons montrer que les extrémités de la coupure \bar{T}_ρ sont contenues respectivement dans les demi-cercles C_n, C'_ρ tracés sur les segments S_n (joignant A_n, A_{n+1}) et S'_ρ (joignant $A'_\rho, A'_{\rho+1}$) comme diamètres, de rayons respectifs $\frac{d_n}{2}, \frac{d'_\rho}{2}$ et contenus dans B . Soit en effet P le demi-plan $v < \frac{\pi}{2}$, z un point intérieur au demi-cercle C_n , et $s = \log z$,

$$m(s, S_n, P) \geq m(s, S_n, B) = m(z, s_n, D),$$

or

$$m(s, S_n, P) = 2 \operatorname{Arg} \frac{s - A_n}{s - A_{n+1}}, \quad m(z, s_n, D) = 2 \operatorname{Arg} \frac{z - a_n}{z - a_{n+1}} > \pi.$$

Donc s est intérieur au demi-cercle C_n .

De même si z' est intérieur au demi-cercle C'_ρ , $s' = \log z'$ est intérieur à C'_ρ . On applique ceci aux extrémités de b_ρ . C. Q. F. D.

Désignons par

$\omega(\rho)$ l'oscillation de $u = \log |\varphi_2(\zeta)|$ sur T_ρ ,

$\bar{\omega}(\rho)$ l'oscillation de $u = \log |\varphi_2(\zeta)|$ sur \bar{T}_ρ ,

$$l^2(\rho) \geq \pi^2 + \omega^2(\rho), \quad \bar{l}^2(\rho) \geq \left[\pi - \frac{d_n + d'_\rho}{2} \right]^2 + \bar{\omega}^2(\rho) \geq \pi^2 - \pi(d_n + d'_\rho) + \bar{\omega}^2(\rho),$$

d'autre part, en appliquant l'inégalité de Schwarz,

$$\bar{r}^2(\rho) = \left[\int_{\bar{\Theta}_0} \left| \frac{ds}{d\sigma} \right| d\lambda \right]^2 \leq \bar{\Theta}(\rho) \times \int_{\bar{\Theta}_0} \left| \frac{ds}{d\sigma} \right|^2 d\lambda,$$

d'où l'inégalité

$$\frac{\pi^2 + \bar{\omega}^2(\rho)}{\bar{\Theta}(\rho)} \leq \frac{\pi(d_n + d'_n)}{\bar{\Theta}(\rho)} + \int_{\bar{\Theta}_0} \left| \frac{ds}{d\sigma} \right|^2 d\lambda,$$

$$\int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\pi^2 + \bar{\omega}^2(\rho)}{\rho \bar{\Theta}(\rho)} d\rho \leq \int_{\rho_1}^{\rho_2} \pi(d_n + d'_n) \frac{d\rho}{\rho \bar{\Theta}(\rho)} + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\bar{\Theta}_\rho} \left| \frac{ds}{d\sigma} \right|^2 dX dY,$$

en posant

$$X_1 = \log \rho_1, \quad X_2 = \log \rho_2.$$

Soient $\bar{r}_1(\rho)$ et $\bar{r}_2(\rho)$ respectivement le minimum et le maximum de $r = |\varphi_2(\zeta)|$ sur \bar{b}_ρ , de même $r_1(\rho)$ et $r_2(\rho)$ le minimum et le maximum de r sur b_ρ

$$r_1(\rho) \leq \bar{r}_1(\rho) \leq \bar{r}_2(\rho) \leq r_2(\rho),$$

$$\bar{\omega}(\rho) = \log \bar{r}_2(\rho) - \log \bar{r}_1(\rho); \quad \omega(\rho) = \log r_2(\rho) - \log r_1(\rho); \quad \omega(\rho) \geq \bar{\omega}(\rho);$$

$$\left. \begin{array}{l} \log \bar{r}_1(\rho) - \log r_1(\rho) < d_n + d'_n \\ \log r_2(\rho) - \log \bar{r}_2(\rho) < d_n + d'_n \end{array} \right\} \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow \infty.$$

En reprenant le calcul d'Ahlfors *[1, p. 9], on a, si $\rho_2 > \rho_1 e^{+\pi}$,

$$\log \bar{r}_1(\rho_2) - \log \bar{r}_1(\rho_1) - \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\pi d\rho}{\rho \bar{\Theta}(\rho)} > -4\pi - \int_{\rho_1}^{\rho_2} (d_n + d'_n) \frac{d\rho}{\rho \bar{\Theta}(\rho)},$$

or, d'après la construction de Δ_2 , on voit facilement que

$$0 \leq \bar{\Theta}(\rho) - \pi \leq 16(v_n + v'_n),$$

$$0 \leq \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\bar{\Theta}(\rho) - \pi}{\rho \bar{\Theta}(\rho)} d\rho \leq \frac{16}{\pi} \int_{\rho_1}^{\rho_2} (v_n + v'_n) \frac{d\rho}{\rho} \leq \frac{16}{\pi} \sum_{n_1}^{n_2} v_n \delta_n + \frac{16}{\pi} \sum_{p_1}^{p_2} v'_p \delta'_p,$$

les indices n_1 et n_2 , p_1 et p_2 dépendant de ρ_1 et ρ_2 . Or

$$v_n = \theta_n + \theta_{n+1} + \frac{R_{n+1} - R_n}{R_n};$$

dès que $\delta_n = \log \frac{R_{n+1}}{R_n}$ est assez petit, on a $v_n \leq \theta_n + \theta_{n+1} + 2\delta_n$.

Si les séries

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \delta_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{n+1} \delta_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2 \\ \sum_{\rho=1}^{\infty} \theta'_\rho \delta'_\rho, \quad \sum_{\rho=1}^{\infty} \theta'_{\rho+1} \delta'_\rho, \quad \sum_{\rho=1}^{\infty} \delta'^2_\rho \end{aligned}$$

convergent, il en est de même de l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \frac{\bar{\Theta}(\rho) - \pi}{\rho \bar{\Theta}(\rho)} d\rho \quad \text{et} \quad \log \rho - \int_1^{\rho} \frac{\pi d\rho}{\rho \bar{\Theta}(\rho)}$$

est borné lorsque $\rho \rightarrow \infty$. Alors

$$\log r_1(\rho) - \log \rho > - \int_1^{\rho} \frac{d_n + d'_\rho}{\rho \bar{\Theta}(\rho)} d\rho + K \quad (K = \text{const.}).$$

Pour montrer que $\log \frac{r_1(\rho)}{\rho}$ reste borné inférieurement lorsque $\rho \rightarrow \infty$, il suffit de montrer la convergence de

$$\int_1^{\infty} (d_n + d'_\rho) \frac{d\rho}{\rho \bar{\Theta}(\rho)} < \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} (d_n + d'_\rho) \frac{d\rho}{\rho}.$$

Alors le domaine Δ_2 sera valable, car on sait déjà, puisqu'il contient le demi-plan $\xi > 0$ (lemme II, § 34), que $\log \frac{|\varphi_2(\xi)|}{\rho(\xi)}$ reste borné supérieurement. Il suffit donc que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \delta_n$ et $\sum_{p=1}^{\infty} d'_p \delta'_p$ convergent.

Nous ne savons pas limiter d_n comme pour le domaine Δ_1 . Mais $\log \frac{|\varphi_2(\xi)|}{\rho(\xi)}$ est borné,

$$\log \frac{\rho_N}{\rho_1} = \sum_{n=1}^N \delta_n, \quad \log \left| \frac{\varphi_2(\alpha_N)}{\varphi_2(\alpha_1)} \right| = \sum_{n=1}^N d_n.$$

Posons

$$\sum_{n=1}^N (d_n - \delta_n) = S_N;$$

S_N est borné, $S_N < A$

$$\sum_{n=1}^N d_n \delta_n = \sum_{n=1}^N \delta_n^2 + \sum_{n=1}^N (d_n - \delta_n) \delta_n,$$

la série $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2$ est supposée converger. Soit B sa somme

$$\sum_{n=1}^N d_n \delta_n < B + \sum_{n=1}^N (S_n - S_{n-1}) \delta_n = B + S_N \delta_N + \sum_{n=1}^{N-1} S_n (\delta_n - \delta_{n+1}),$$

$$\sum_{n=1}^N d_n \delta_n < B + A \left[\delta_{N-1} + \sum_{n=1}^{n-1} |\delta_n - \delta_{n+1}| \right].$$

Pour que la série $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \delta_n$ converge, il suffit donc que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n - \delta_{n+1}|$ convergent.

Mais la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \delta_n$ est conséquence de la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \delta_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n - \delta_{n+1}|$.

THÉORÈME II. — *Pour que le domaine Δ_2 soit valable, il suffit que les six séries suivantes soient convergentes*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \delta_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n - \delta_{n+1}|,$$

$$\sum_{\rho=1}^{\infty} \theta'_\rho \delta'_\rho, \quad \sum_{\rho=1}^{\infty} \delta'^2_\rho, \quad \sum_{\rho=1}^{\infty} |\delta'_\rho - \delta'_{\rho+1}|.$$

Remarquons que les suites ζ_n, ζ'_ρ dont nous sommes partis sont arbitraires; l'existence d'un tel couple de suites suffit pour que Δ_2 soit valable.

44. *Interprétation.* — La convergence des séries $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \delta_n$ et $\sum_{\rho=1}^{\infty} \theta'_\rho \delta'_\rho$ exprime que les points ζ_n, ζ'_ρ sont situés sur une courbe Γ' limitant un domaine Δ' pour lequel l'intégrale (36) converge (on peut prendre pour Γ' la ligne brisée joignant ces points dans l'ordre; Δ' satisfait aux conditions suffisantes de M. Ahlfors). La convergence des séries $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2$

et $\sum_{\rho=1}^{\infty} \delta_{\rho}^2$ exprime que ces points sont assez rapprochés les uns des autres. Enfin la convergence des séries $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n - \delta_{n+1}|$ et $\sum_{\rho=1}^{\infty} |\delta'_{\rho} - \delta'_{\rho+1}|$ est une condition de régularité dans la répartition de ces points, qui est assurée en particulier si les suites δ_n et δ'_{ρ} sont monotones non croissantes.

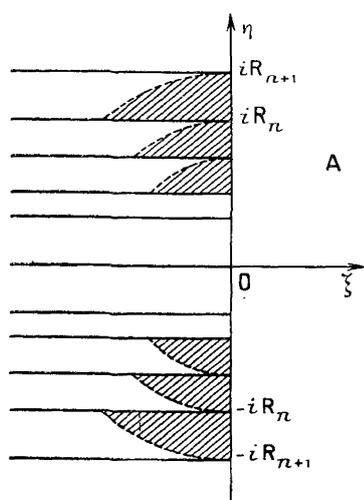


Fig. 13.

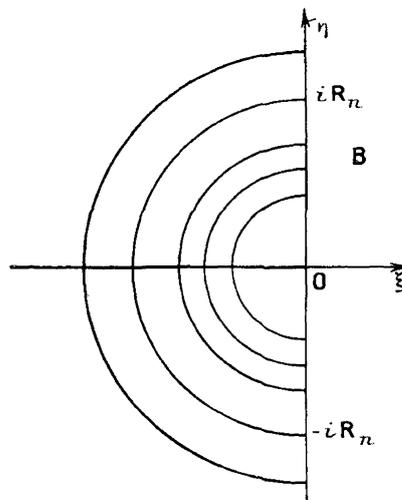


Fig. 14.

EXEMPLES. — Soient A et B les domaines symétriques formés en ôtant du plan $\zeta = \xi + i\eta$, pour A

les demi-droites $\xi < 0, \quad \eta = \pm R_n$;

pour B

les demi-circonférences $\xi < 0, \quad |\zeta| = R_n$ et le demi-axe $\xi < 0, \quad \eta = 0$;

$R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$ étant une suite positive croissante tendant vers l'infini. Si, en posant $\delta_n = \log \frac{R_{n+1}}{R_n}$, les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_{n+1} - \delta_n|$ convergent, les deux domaines A et B sont valables.

Pour le domaine A, avec les notations de M. Ahlfors, on a,

$$\begin{aligned} \text{si } R_n \leq \rho < R_{n+1}, & \quad \Theta(\rho) - \pi = 2 \arccos \frac{R_n}{\rho}; \\ \text{si } \rho = R_{n+1}, & \quad \Theta(R_{n+1}) = \Theta(R_n) = \pi. \end{aligned}$$

Il existe deux constantes positives k et k' telles que

$$\int_{R_n}^{R_{n+1}} [\Theta(\rho) - \pi] \frac{d\rho}{\rho} > k \left[\arccos \frac{R_n}{R_{n+1}} \right] > k' \delta_n^{\frac{1}{2}}.$$

La condition suffisante de M. Ahlfors [convergence de l'intégrale (36)] exigerait donc la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{\frac{1}{2}}$ ce qui est plus restrictif que la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2$. Quant à la convergence de l'intégrale (35), ici équivalente à la convergence de l'intégrale (36), elle n'est nécessaire, d'après l'étude de M. Ahlfors, que si la fonction $\Theta(\rho)$ est à variation totale bornée, ce qui exige déjà que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos \frac{R_n}{R_{n+1}}$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\delta_n}$ converge.

Pour le domaine B, on a

$$\begin{aligned} \Theta(\rho) = \pi, & \quad \text{s'il existe une valeur de } n \text{ telle que } \rho = R_n; \\ \Theta(\rho) = 2\pi, & \quad \text{dans le cas contraire.} \end{aligned}$$

Donc, l'intégrale

$$\int_1^{\rho} [\Theta(\rho) - \pi] \frac{d\rho}{\rho} = \pi \log \rho$$

est toujours divergente lorsque $\rho \rightarrow \infty$, et les critères de M. Ahlfors sont ici inefficaces.

THÉORÈME (résumé). — *Si le domaine Δ satisfait aux conditions du théorème I, le rapport $\frac{|\varphi(\zeta)|}{\rho(\zeta)}$ reste borné lorsque $\zeta \rightarrow \infty$.*

Si le domaine Δ satisfait aux conditions du théorème II, le rapport $\frac{\rho(\zeta)}{|\varphi(\zeta)|}$ reste borné lorsque $\zeta \rightarrow \infty$.

Si le domaine Δ satisfait à la fois aux conditions I et II, il est valable (1).

L'inégalité d'Ahlfors ainsi affinée permet dans certaines applications d'obtenir des résultats plus précis, par exemple dans la démonstration du théorème de M. Denjoy sur le nombre des valeurs asymptotiques des fonctions entières. Supposons que la fonction entière $F(\zeta)$ ait une limite lorsque ζ décrit un continu Γ tel que celui représenté sur la figure 15, possédant une double infinité de points ζ_n, ζ'_n satisfaisant

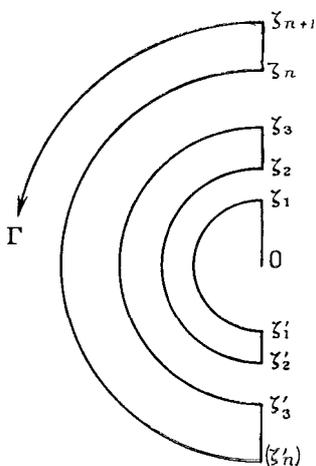


Fig. 15.

aux conditions du théorème II. Le domaine Δ formé des points du plan extérieurs à Γ est contenu dans un domaine valable Δ_2 . Si le domaine Δ est sans plis, on peut le représenter conformé-
ment sur le demi-plan D de manière que $\frac{|\zeta|}{|\varphi(\zeta)|}$ reste borné. La fonction $G(z) = F[f(z)]$ est définie dans D et satisfait aux conditions du théorème de Lindelöf. On a donc, si $M(\rho)$ désigne le maximum

(1) Dans une première étude, fondée uniquement sur la mesure conforme (*C. R. Acad. Sc.*, t. 212, 1941, p. 977), nous avons établi des conditions du même type, mais plus restrictives.

de $|F(\zeta)|$ sur le cercle $|\zeta| = \rho$, $\liminf \frac{\log M(\rho)}{\rho} > 0$. La fonction $F(\zeta)$ est d'ordre 1 au moins, alors que l'ordre minimum fourni par les conditions de M. Ahlfors est seulement $\frac{1}{2}$.

Discussion des résultats. Conditions nécessaires.

45. Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une dérivée angulaire est la convergence de l'intégrale (39). Or, à notre connaissance, les conditions géométriques suffisantes établies jusqu'ici reviennent à la convergence *absolue* de cette intégrale : c'est bien ce qui se passe dans le cas, le plus fréquemment étudié, où le domaine Δ est contenu dans le demi-plan $\xi > 0$ et où l'on a

$$g(y) > 0, \quad g(-y) < 0,$$

ou si le domaine Δ contient ce demi-plan [$g(y) < 0, g(-y) > 0$]. Ces conditions sont donc trop restrictives. Nous allons montrer qu'elles permettent une conclusion plus précise que l'existence d'une dérivée angulaire.

THÉOREME. — *La convergence absolue de l'intégrale (39) est la condition nécessaire et suffisante pour que, si $z = x$ tend vers l'infini sur l'axe réel, la fonction $\log \frac{|f(x)|}{x}$ ait non seulement une limite finie, mais une variation totale finie.*

Démonstration. — Examinons d'abord les deux cas particuliers :

a. Δ est contenu dans le demi-plan $\xi > 0$. D'après (38) on a

$$\log \frac{|f(x_1)|}{x_1} - \log \frac{|f(x_0)|}{x_0} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{y}{x_1^2 + y^2} - \frac{y}{x_0^2 + y^2} \right] [g(y) - g(-y)] dy,$$

donc, si $x_1 > x_0$,

$$\log \frac{|f(x_1)|}{x_1} - \log \frac{|f(x_0)|}{x_0} \leq 0,$$

la fonction $\log \frac{|f(x)|}{x}$ est non croissante.

b. Δ contient le demi-plan $\xi > 0$. On aura cette fois, si $x_1 > x_0$,

$$\log \frac{|f(x_1)|}{x_1} - \log \frac{|f(x_0)|}{x_0} \geq 0,$$

la fonction $\log \frac{|f(x)|}{x}$ est non décroissante.

Dans le cas général, puisque l'intégrale (39) est absolument convergente, on peut la différentier sous le signe \int .

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \log \frac{|f(x)|}{x} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{y}{1 + y^2} \right] [g(y) - g(-y)] dy, \\ |\Phi'(x)| &\leq \frac{2x}{\pi} \int_0^\infty \frac{y |g(y) - g(-y)| dy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \int_0^\infty |\Phi'(x)| dx &< \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{y |g(y) - g(-y)|}{x^2 + y^2} \\ &< \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{y |g(y) - g(-y)|}{1 + y^2} dy < \infty. \end{aligned}$$

La variation totale de $\Phi(x)$ est bornée.

C. Q. F. D.

46. L'exemple de M. Ahlfors nous a montré, dans un cas particulier, la portée du théorème I. Pour discuter les résultats du théorème II, nous nous placerons dans le cas d'un domaine Δ sans plis, contenant le demi-plan $\xi > 0$, symétrique par rapport à l'axe réel et limité par un arc de Jordan continu, auquel cas $g(y) = -g(-y) < 0$, et sur la frontière $\varphi = |f(iy)| = |f(-iy)|$ est fonction continue non décroissante de $y > 0$.

Enfin nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME. — $G(X)$ étant une fonction continue non négative pour $X = 0$, si l'intégrale $\int_0^\infty G(X) dX$ est convergente, on peut trouver une suite croissante de valeurs de $X : X_1, X_2, \dots, X_n, \dots (X_n \rightarrow +\infty)$ telle que les séries $\sum_{n=1}^\infty (X_{n+1} - X_n)^2 e_t \sum_{n=1}^\infty (X_{n+1} - X_n) G(X_{n+1})$ soient simultanément convergentes.

Démonstration. — Remarquons d'abord que si l'on connaît une suite X_n relative à une fonction $H(X)$ constamment supérieure à $G(X)$, la même suite convient pour $G(X)$. Nous allons déterminer une suite X_n relative à la fonction $H(X)$ égale, pour chaque valeur de X , au plus grand des deux nombres $G(X)$ et $\frac{1}{X^2}$. L'intégrale (40) $\int_1^\infty H(X) dX$ est évidemment convergente. La suite X_n sera déterminée par récurrence (fig. 16) :

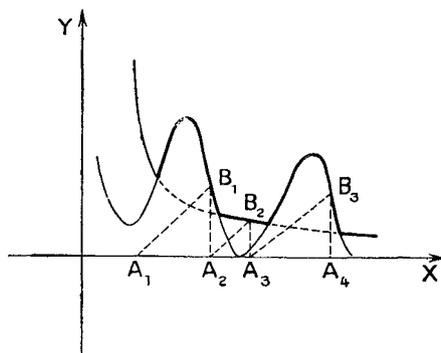


Fig. 16.

X_n étant supposé connu, nous prendrons pour X_{n+1} l'abscisse du premier point de rencontre B_n de la demi-droite $Y = X - X_n$ ($X > X_n$), issue du point A_n d'abscisse X_n de l'axe OX , avec la courbe $Y = H(X)$. Soit A_{n+1} la projection de B_n sur OX . Le triangle $T_n(A_n A_{n+1} B_n)$ est tout entier dans la région définie par $0 \leq Y \leq H(X)$, $X > 0$.

Son aire est $\frac{1}{2} (X_{n+1} - X_n) H(X_{n+1})$. Or $G(X_{n+1}) \leq H(X_{n+1}) = X_{n+1} - X_n$. On prendra $X_1 \geq 1$ quelconque. La somme des aires des triangles T_n est bornée par l'intégrale (40). La convergence des deux séries en résulte immédiatement. Il suffit de montrer que X_n tend vers l'infini. Or $X_{n+1} - X_n = H(X_{n+1}) \geq X_{n+1}^{-2}$. Donc X_n ne peut avoir aucune limite finie. C. Q. F. D.

De la convergence de l'intégrale $\int_1^\infty g(y) \frac{dy}{y}$, nécessaire à l'existence d'une dérivée angulaire, on déduit alors l'existence d'une suite croissante $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ ($y_n \rightarrow \infty$) telle que si l'on pose

$$\theta_n = g(y_n), \quad d_n = \log \frac{y_{n+1}}{y_n},$$

les séries $\sum_{n=1}^\infty d_n \theta_{n+1}$ et $\sum_{n=1}^\infty d_n^2$ convergent.

Soit

$$\zeta_n = \varphi(iy_n) = R_n e^{i\left(\theta_n + \frac{\pi}{2}\right)}, \quad \zeta'_n = \varphi(-iy_n) = R_n e^{-i\left(\theta_n + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Posons

$$\delta_n = \log \frac{R_{n+1}}{R_n}$$

La méthode de la mesure harmonique permet de montrer que le rapport $\frac{\delta_n}{d_n}$ reste borné lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_{n+1} \delta_n$ convergent. Or, d'après le théorème II, il suffit, pour que le domaine Δ soit valable, qu'il existe sur sa frontière une suite de points ζ_n (auxquels on associe leurs symétriques ζ'_n) pour lesquels les trois séries $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_{n+1} \delta_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_{n+1} - \delta_n|$ soient convergentes. *Seule la convergence de la troisième série pourrait donc ne pas être nécessaire : mais c'est une condition de régularité qu'il semble difficile d'éliminer.*

Vu et approuvé :

Paris, le 28 avril 1942.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
PAUL MONTEL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 28 avril 1942.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
GILBERT GIDEL.

