

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

R. DELTHEIL

Sur la théorie des probabilités géométriques

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1920, p

http://www.numdam.org/item?id=THESE_1920__22__1_0

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

N° D'ORDRE : 1660

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PAR M. R. DELTHEIL

MAÎTRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

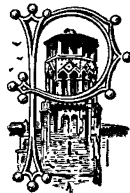
1^{re} THÈSE. — SUR LA THÉORIE DES PROBABILITÉS GÉOMÉTRIQUES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le décembre 1920, devant la Commission d'examen.

MM. PAINLEVÉ, *Président.*

ÉMILE BOREL, }
VESSIOT, } *Examineurs.*



TOULOUSE

IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE ÉDOUARD PRIVAT

Librairie de l'Université.

14, RUE DES ARTS, 14 (SQARE DU MUSÉE, TOULOUSE)

1920

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

<i>Doyen</i>	N.	
<i>Doyen honoraire</i>	P. APPELL.	
<i>Professeurs honoraires</i>	}	P. PUISEUX.
		VÉLAIN.
		BOUSSINESQ.
<i>Professeurs</i>	}	LIPPMANN Physique.
		BOUTY Physique.
		E. PICARD Analyse supérieure et algèbre supér.
		Gaston BONNIER Botanique.
		KOENIGS Mécanique physique et expérimentale
		GOURSAT Calcul différentiel et calcul intégral.
		HALLER Chimie organique.
		JOANNIS Chimie (Enseignement P. C. N.).
		JANET Electrotechnique générale.
		WALLERANT Minéralogie.
		ANDOYER Astronomie.
		PAINLEVÉ Mécan. analytique et mécan. céleste.
		HAUG Géologie.
		H. LE CHATELIER Chimie générale.
		Gabriel BERTRAND Chimie biologique.
		M ^{me} P. CURIE Physique générale.
		CAULLERY Zoologie (Evolution des êtres organisés).
		C. CHABRIÉ Chimie appliquée.
		G. URBAIN Chimie minérale.
		Emile BOREL Physique mathématique et calcul des probabilités-
		MARCHIS Aviation.
		Jean PERRIN Chimie physique.
		G. PRUVOT Zoologie, anatomie, physiol. compar.
		MATRUCHOT Botanique.
		ABRAHAM Physique.
		CARTAN Mécanique rationnelle.
		Cl. GUICHARD Géométrie supérieure.
		MOLLIARD Physiologie végétale.
		LEBESGUE Application de l'analyse à la géométrie.
		LAPICQUE Physiologie.
		GENTIL Géographie physique.
		VESSIOT Calcul différentiel et calcul intégral.
COTTON Physique théor. et Physique céleste.		
DRACH Mathématiques générales.		
N. Histologie.		
N. Zoologie. Anatom. et physiol. comp.		
<i>Professeurs adjoints</i>	}	LEDDC Physique.
		HÉROUARD Zoologie.
		Léon BERTRAND Géologie.
		Rémy PERRIER Zoologie (Enseignement P. C. N.).
		LESPIEAU Chimie.
		SAGNAC Physique (Enseignement P. C. N.).
		PEREZ Zoologie (Evolution des êtres organisés).
		RABAUD Biologie générale.
		PORTIER Physiologie.
BLAISE Chimie organique.		
PÉCHARD Chimie (Enseignement P. C. N.).		
<i>Secrétaire</i>	D. TOMBECK.	

SUR LA
THÉORIE DES PROBABILITÉS GÉOMÉTRIQUES

A MON MAÎTRE

M. ÉMILE BOREL

*Hommage affectueux
et reconnaissant.*

R. DELTHEIL

PREMIÈRE THÈSE

SUR LA THÉORIE DES PROBABILITÉS GÉOMÉTRIQUES

INTRODUCTION

La théorie des probabilités discontinues conduit à dénombrer, parmi des cas possibles en nombre fini et également vraisemblables, ceux qui réalisent certaines conditions et sont dits cas favorables. La condition d'égle vraisemblance des cas envisagés est fondamentale; seule, elle permet de faire rentrer chaque problème concret dans le cadre de la théorie mathématique. Il ne subsiste ensuite que les difficultés du dénombrement pour lequel interviennent les ressources de l'Analyse combinatoire et les propositions fondamentales du Calcul des Probabilités proprement dit.

Lorsque les cas envisagés forment un ensemble infini ayant la puissance du continu, les deux questions se posent dans le même ordre. Il convient d'une part de préciser ce que devient, pour chaque cas concret, le principe de l'égalité des chances, « à la lumière duquel, écrivait Tannery, s'évanouissent les paradoxes »; la malice bien connue de Joseph Bertrand, relative à un problème élémentaire sur les cordes d'un cercle, a fortement mis en évidence cette nécessité. D'autre part, une fois le problème bien posé, le dénombrement des cas, ou plus exactement leur sommation, conduit à des calculs d'intégrales souvent laborieux, qu'il est rarement possible de pousser jusqu'au bout.

Dans les deux ordres d'idées, les résultats obtenus, quelque brillants que soient certains d'entre eux, sont assez isolés: la théorie des probabilités continues est connue par de curieuses propositions particulières plutôt que par des méthodes générales. Une étude systématique peut n'être pas sans intérêt et sans utilité: le présent travail apporte à cette étude une contribution où sont envisagées successivement les deux étapes du problème, en ce qui concerne surtout les probabilités continues dites géométriques. Il se compose naturellement de deux parties.

Envisageant dans la première Partie la « probabilité élémentaire » selon le point de vue de Poincaré qui fait intervenir dans sa définition une fonction positive arbitraire, je me suis surtout attaché aux problèmes pour lesquels cette fonction arbitraire est imposée, à un facteur constant près bien entendu, par la considération des domaines superposables pour lesquels cette probabilité doit rester la même. Dans le chapitre I^{er}, j'ai essayé de poser la question sous une forme générale, en considérant l'invariance de la probabilité élémentaire vis-à-vis d'un groupe donné, fini et continu, de transformations. Les conclusions de cette étude sont susceptibles de nombreuses applications, dont les plus élémentaires sont examinées au chapitre II, qui traite des problèmes simples de la Géométrie euclidienne : il contient un résumé très rapide des élégants résultats de *Barbier* et de *Crofton*. Le chapitre III est consacré aux questions de Géométrie cayleyenne à deux et à trois dimensions ; parmi les types de probabilité élémentaire qui y sont définis figure celle relative à la position d'un corps solide dans l'espace ordinaire, qui est obtenue en appliquant les équations du chapitre I^{er} au groupe paramétrique du groupe des mouvements. Le chapitre se termine par quelques aperçus sur la Géométrie réglée et le groupe conforme de l'espace.

Je me suis attaché dans la deuxième Partie aux problèmes de probabilités géométriques sur une figure (F) formée par n points pris au hasard dans un domaine (D) à un nombre quelconque de dimensions. La probabilité P pour que (F) réalise certaines conditions « intrinsèques » peut être envisagée soit comme fonction du domaine (D), soit comme fonction des conditions imposées : et la considération d'une variation infiniment petite, soit des données, soit du domaine, peut permettre d'écrire des relations différentielles intéressantes. J'ai surtout cherché dans le chapitre IV à appliquer ce point de vue à la détermination même de P : et j'ai abordé deux exemples. Le premier, relatif à la distance de deux points intérieurs à une sphère de l'espace à m dimensions, est remarquable par la simplicité des résultats obtenus : ceux-ci admettent pour m très grand des valeurs asymptotiques conformes aux caractères connus de la configuration d'un domaine sphérique à un très grand nombre de dimensions. Le deuxième est le problème célèbre du quadrilatère de Sylvester ; en reprenant les calculs relatifs à certains cas simples j'ai obtenu quelques résultats nouveaux et en particulier discuté le problème pour un domaine ayant la forme d'un quadrilatère convexe quelconque.

Enfin le chapitre V contient quelques aperçus sur la notion de probabilité géométrique, pour une figure formée de n points, comme *fonction de ligne* dans le plan. J'ai défini les dérivées du premier et du second ordre sur la frontière du domaine envisagé. La *première variation* de P s'exprime sous une forme simple qui m'a permis d'établir la propriété du triangle de rendre minima la probabilité envisagée dans le problème de Sylvester. La même expression fournit une propriété fondamentale des courbes *extrémales* du plan vis-à-vis d'un problème de probabilités géomé-

triques, lorsque les courbes extrémales existent : j'ai examiné l'exemple du problème de Sylvester et effectué le calcul de la *deuxième variation* dans ce cas particulier.

C'est pour moi un agréable devoir que de remercier ici mes maîtres, M. Borel qui m'a indiqué le sujet de ces recherches et n'a cessé de s'intéresser à leurs progrès, et M. Vessiot qui m'a témoigné sa bienveillance par ses conseils et ses précieuses indications.

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE PREMIER

[1] Soient E E' deux ensembles continus d'éléments géométriques de même espèce, tels que chaque élément de E' appartienne à E . Le problème est le suivant : un élément étant pris au hasard dans E , quelle est la probabilité pour qu'il appartienne à E' ?

Soient x_1, x_2, \dots, x_n les paramètres définissant un élément : le principe des probabilités totales nous conduit avec Poincaré à dire que cette probabilité est le rapport des valeurs de l'intégrale :

$$J = \underbrace{\int \dots \int}_n F(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

étendue à E' et à E respectivement. La fonction F n'est assujettie, en dehors des conditions rendant possible la définition de J , qu'à être supérieure ou égale à zéro. L'élément différentiel

$$dJ = F(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

sera commodément dénommé *probabilité élémentaire*.

Il est clair qu'en général à chaque fonction F correspondra une valeur différente pour la probabilité cherchée : il semble donc *a priori* qu'en introduisant la fonction arbitraire F , Poincaré n'a pas eu d'autre but que de nous montrer toute l'étendue de notre ignorance.

Mais il existe des problèmes pour lesquels le résultat du calcul est le même quelle que soit la fonction F , ceci, bien entendu, sous des réserves, d'ailleurs très larges, de continuité. Poincaré a lui-même donné des exemples très suggestifs : la probabilité pour qu'un nombre x pris au hasard entre a et b soit rationnel, la probabilité limite pour que l'aiguille de la roulette s'arrête sur une couleur donnée. Appliquant ensuite ses méthodes au problème de la position des petites planètes sur le zodiaque, il montre que leur répartition actuelle est uniforme quelle que soit

la distribution initiale des paramètres définissant le mouvement moyen de chacune d'elles ⁽¹⁾. Poincaré n'a donc témoigné ses exigences, selon l'expression même de M. Borel, que pour se donner la joie intellectuelle de les satisfaire : il ne s'est montré sceptique que pour accroître la portée des résultats qui ont pu conserver, malgré ce scepticisme, toute leur certitude.

[2] Il y a cependant bien des problèmes de probabilités géométriques sur la solution desquels tout le monde est d'accord, et qui ne conduisent pas à un résultat indépendant du type de probabilité élémentaire utilisé pour les résoudre. L'un d'entre eux, le célèbre *Problème de l'Aiguille* par lequel Buffon doit être considéré comme le fondateur de la théorie, a été l'objet d'une vérification expérimentale minutieuse, et l'expérience a remarquablement confirmé la solution classique ⁽²⁾.

Dans les problèmes de cette catégorie, la probabilité élémentaire est imposée par la condition fondamentale suivante :

Le résultat du calcul doit rester indépendant d'un déplacement arbitraire de toute la figure considérée.

S'il s'agit par exemple de la probabilité pour qu'un point du plan pris au hasard dans un certain domaine satisfasse à certaines conditions, la probabilité élémentaire

$$F(x, y) dx dy$$

exprimée avec des coordonnées rectangulaires, doit rester inchangée par l'opération

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b. \end{aligned}$$

Et comme

$$dx dy = dx' dy',$$

il faut que $F(x, y) = F(x', y')$, ce qui exige $F = \text{const.}$, le groupe des déplacements du plan étant *transitif*.

On prendra donc pour probabilité élémentaire l'élément d'aire $dx dy$.

⁽¹⁾ Poincaré, *Calcul des probabilités*, 1912, p. 147 à 152.

⁽²⁾ L'intérêt de l'expérience avait été signalé par Laplace, celle-ci aboutissant à une détermination expérimentale du nombre π . Laplace avait même indiqué des conditions d'optimum qui ont été fort contestées par la suite, et d'ailleurs avec raison. Quoi qu'il en soit, Wolf a pu obtenir, en appliquant la méthode des moindres carrés à 50 séries de chacune 100 épreuves, la valeur $\pi = 3,1596 \pm 0,0524$.

Consulter à ce sujet : Czuber, *Probabilités et moyennes géométriques*, trad. Schuermans, pages 85 et suivantes.

Mais si l'on a affaire à des lignes droites dans le plan, et si l'on écrit

$$ux + vy + 1 = 0$$

l'équation d'une droite, les paramètres u et v sont transformés par le déplacement envisagé plus haut en

$$u' = \frac{u \cos \alpha + v \sin \alpha}{au + bv + 1},$$

$$v' = \frac{-u \sin \alpha + v \cos \alpha}{au + bv + 1}.$$

On obtient ainsi :

$$du' dv' = \frac{du dv}{(au + bv + 1)^2},$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{du' dv'}{[u'^2 + v'^2]^{3/2}} = \frac{du dv}{[u^2 + v^2]^{3/2}}.$$

Il convient donc d'adopter en ce qui concerne les lignes droites la probabilité élémentaire $\frac{du dv}{(u^2 + v^2)^{3/2}}$; et cette façon de procéder permet de choisir immédiatement entre les solutions données par Joseph Bertrand pour son problème sur les cordes d'un cercle.

[3] Considérons d'une manière générale un groupe G de transformations des n variables x_1, x_2, \dots, x_n . Deux domaines de l'espace (x_1, x_2, \dots, x_n) sont dits *équivalents* vis-à-vis du groupe G s'il existe au moins une transformation du groupe qui les amène à coïncider. Cela posé, s'il existe un élément différentiel

$$dJ = F(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

dont l'intégrale admet la même valeur pour deux quelconques domaines équivalents vis-à-vis de G , on pourra, en adoptant dJ comme probabilité élémentaire, définir *par rapport au groupe G* les problèmes de probabilités géométriques sur les éléments (x_1, \dots, x_n) . Les problèmes de la Géométrie élémentaire sont définis par rapport au groupe des mouvements.

L'intégrale

$$\underbrace{\int \dots \int}_n F(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

La condition cherchée est donc

$$F \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \right) + \xi_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \dots + \xi_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0,$$

ce qui s'écrit encore

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial (F \xi_i)}{\partial x_i} = 0,$$

Cette condition a été indiquée par Poincaré comme exprimant une propriété fondamentale du multiplicateur, à propos du système différentiel

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \dots = \frac{dx_n}{\xi_n}.$$

Poincaré établit la formule (2) par un calcul de jacobien. La démonstration qui précède, où intervient le calcul symbolique, m'a été indiquée par M. Vessiot.

Nous pouvons poser, par analogie avec les notations de l'Analyse vectorielle :

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n}.$$

La condition d'invariance de l'élément $F dx_1 dx_2 \dots dx_n$ s'écrit alors :

$$(4) \quad X \cdot \operatorname{Log} F + \operatorname{div} \cdot X = 0.$$

On peut considérer cette équation, si $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une fonction donnée, comme l'équation de définition, au sens de Lie, du groupe *infini* admettant l'invariant intégral J.

[4] Dans le cas particulier où l'on a

$$\operatorname{div} \cdot X = 0,$$

la transformation infinitésimale Xf admet pour élément invariant

$$dJ = dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Le système différentiel

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \dots = \frac{dx_n}{\xi_n}$$

qui entraîne

$$F\omega = \text{const.};$$

donc

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = F(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) dx'_1 dx'_2 \dots dx'_n.$$

Nous obtenons donc, en ce qui concerne le groupe G_r , les *équations de condition* :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 \text{Log } F + \text{div } X_1 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ X_r \text{Log } F + \text{div } X_r = 0 \end{array} \right.$$

qui constituent un système d'équations linéaires aux dérivées partielles. Ce système possède la propriété importante que si F et Φ sont deux solutions de ce système, $\frac{F}{\Phi}$ est un invariant de G_r .

Effectivement, on a quel que soit J :

$$X_J \text{Log } \frac{F}{\Phi} = X_J \text{Log } F - X_J \text{Log } \Phi = 0.$$

Par suite $\frac{F}{\Phi}$ constitue une solution du système

$$X_1 f = 0, \quad X_2 f = 0, \quad \dots, \quad X_r f = 0$$

définissant les invariants de G_r . Cette propriété correspond au fait géométrique suivant, à savoir que si les éléments différentiels

$$F\omega \quad \text{et} \quad \Phi\omega$$

sont invariants par rapport au groupe, leur rapport $\frac{F}{\Phi}$ l'est aussi.

Réciproquement, si F est une solution de (6) et Ω un invariant du groupe, ΩF est une nouvelle solution de (6).

[6] Les groupes qui nous intéressent sont ceux qui possèdent un invariant intégral unique d'ordre n . Ces groupes sont nécessairement, d'après ce qui précède, des groupes *transitifs*. La condition de l'égalité vraisemblance des cas, au point de vue probabilités, semble d'ailleurs incompatible, sans qu'une théorie mathématique vienne préciser pourquoi, avec la considération d'un groupe intransitif.

Un groupe transitif n'ayant pas d'invariant, le système (6), s'il admet une solution F, n'admettra que des solutions de la forme λF , λ étant une constante.

Soient

$$(7) \quad x'_i = f_i[(x), (a)]$$

les équations finies du groupe; si l'on forme le jacobien $\frac{\partial(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ on a moyennant (7) :

$$\frac{\partial(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{F(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)}.$$

Il suit de là que les équations

$$F = 0, \quad \frac{F}{F} = 0$$

sont des *équations invariantes* du groupe. L'étude d'un groupe transitif donné au point de vue qui nous occupe commencera donc utilement par la détermination de ses *variétés invariantes*.

Celles-ci s'obtiennent, comme on sait, en annulant les déterminants d'un même ordre, le plus élevé possible, tirés de la matrice :

$$\left\| \begin{array}{cccc} \xi_{11}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \dots & \xi_{1n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{r1}(x_1, x_2, \dots, x_n) & \dots & \xi_{rn}(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right\|$$

[7] Il est clair que si le groupe G_r défini par les équations (7) admet l'invariant intégral

$$J = \int \dots \int_n F dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

le groupe semblable obtenu par le changement de variables

$$(8) \quad x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

admettra l'invariant intégral

$$\int \dots \int_n F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} dy_1 dy_2 \dots dy_n.$$

Il est possible, d'une infinité de manières, de déterminer les formules (8) de manière que l'invariant intégral nouveau se réduise à

$$\underbrace{\int \dots \int}_n dy_1 dy_2 \dots dy_n.$$

Les variables y , ainsi déterminées sont des variables *équiprobables*.

[8] Tout ce qui précède s'applique évidemment aux groupes à une variable. L'équation de condition unique

$$\frac{d(\xi F)}{dx} = 0$$

relative à une transformation infinitésimale

$$\delta x = \xi(x) \delta t$$

montre que le seul invariant possible est donné par la relation

$$F = \frac{\lambda}{\xi(x)}.$$

Le groupe envisagé est donc nécessairement un groupe à un paramètre : car s'il existait plusieurs transformations infinitésimales, l'existence de l'invariant $\int \frac{dx}{\xi(x)}$ montre qu'elles ne pourraient être indépendantes.

Inversement, tout groupe à un paramètre admet un invariant intégral, obtenu en cherchant la transformation infinitésimale du groupe :

$$\delta x = \xi(x) \delta t$$

et en écrivant l'équation finie du groupe sous la forme canonique

$$\int \frac{dx'}{\xi(x')} = \int \frac{dx}{\xi(x)} + C.$$

La variable équiprobable est précisément la variable canonique y , qui permet d'écrire l'équation du groupe :

$$y' - y + C,$$

comme équation du groupe des *translations*.

[9] Ce résultat pouvait être déduit immédiatement de la considération des types de groupes à une variable donnés par Lie. Les trois types obtenus sont le groupe à un paramètre engendré par la transformation infinitésimale

$$p$$

le groupe à deux paramètres :

$$p, \quad xp$$

et le groupe à trois paramètres :

$$p, \quad xp, \quad x^2p.$$

L'équation de condition $\frac{d(\xi F)}{dx}$ est vérifiée dans le premier cas en prenant $F = \text{Const.}$

L'examen des cas suivants, où interviennent les transformations infinitésimales xp , x^2p , conduit à la solution illusoire

$$F = 0.$$

Définissant groupe J tout groupe qui admet un invariant intégral unique d'ordre égal au nombre des variables, on peut se proposer la recherche de tous les groupes J dans le plan ou dans l'espace à trois dimensions. Un tel groupe définit une sorte de géométrie dans laquelle n'interviendrait que la notion d'aire (pour le plan) ou la notion de volume (pour l'espace). En vertu de la remarque du § 7, on peut se borner à chercher les divers *types* de groupes J; et il suffit pour cela d'utiliser les types de groupes à deux ou à trois variables tels qu'ils sont classés dans les ouvrages spéciaux. En examinant de quelle façon chaque type se comporte vis-à-vis du système des équations de condition (6), on aboutit rapidement à la sélection désirée.

Les résultats sont particulièrement simples dans le cas de deux dimensions. On constate que tous les types de groupes J du plan sont réductibles à un groupe projectif : la détermination des groupes J parmi les sous-groupes du groupe projectif plan, tels qu'ils sont classés dans le troisième volume de Lie-Engel (p. 106 et 107) aboutit au tableau suivant, où chacun d'eux est déterminé par ses transformations infinitésimales :

Groupes J projectifs dans le plan.

		Invariants intégraux.	
A	1.	$p, q, xq, yp, xp - yq$	$\iint dx dy$
	2.	$p, q, xq, xp - yq$	
	3.	$xq, yp, xp - yq$	
	4.	$p, q, xp - yq$	
	5.	p, q, xq	
	6.	p, q	
	7.	$q, p + xq$	
B	1.	$q, xq, axp + byq$	$\iint \frac{dx dy}{x^{\frac{a+b}{a}}}$
	2.	$q, axp + byq$	
	3.	$q, xp + (x + y)q$	$\iint \frac{dx dy}{x^2}$
C	1.	$q, xq, p + yq$	$\iint \frac{dx dy}{e^x}$
	2.	$q, p + yq$	
D	1.	$p + xq, xp + 2yq, (x^2 - y)p + xyq$	$\iint \frac{dx dy}{ 2y - x^2 ^{3/2}}$
	2.	$p + xq, xp + 2yq$	
E	1.	xp, yq	$\iint \frac{dx dy}{xy}$
F	1.	q, xp	$\iint \frac{dx dy}{x}$

Ces groupes ne sont distincts qu'au point de vue projectif : il est clair, par exemple, que E_1 se réduit à A_6 en posant $x' = e^x$, $y' = e^y$. D'autre part, B_2 se réduit à F_1 pour $b = 0$.

Un certain nombre de groupes du tableau précédent sont des groupes de déplacements non-euclidiens par rapport à une certaine conique absolue. Le groupe D_1 correspond à la conique non dégénérée $2y = x^2$, le groupe A_1 à la conique formée par

les points à l'infini dans les directions ox , oy , le groupe B_1 à la conique formée par la droite de l'infini et l'axe oy . Ce fait correspond géométriquement à ce que la notion de longueur entraîne nécessairement la notion d'aire.

On peut se demander si, inversement, la conservation des aires par un groupe de transformations fini, continu, à trois paramètres entraîne nécessairement la coïncidence de ce groupe avec celui des déplacements d'une certaine géométrie quadratique.

L'examen du tableau qui précède fait apercevoir tout de suite qu'il n'en est rien : il existe des groupes J qui ne sont nullement des groupes de déplacements. Par exemple le groupe C_1 , dont les équations finies sont

$$\begin{aligned} X &= x + a, \\ Y &= e^a y + bx + c \end{aligned}$$

admet effectivement, relativement à deux points $M_1 M_2$, un invariant qui n'est autre que $x_1 - x_2$; mais toutes les transformations :

$$\begin{aligned} X &= x, \\ Y &= y + b(x - x_0), \end{aligned}$$

qui font partie de ce groupe, laissent invariants tous les points de la droite $x = x_0$, et déplacent tous les autres points du plan. Ce fait est incompatible avec les axiomes, même les plus généraux de la Géométrie plane⁽¹⁾.

[10] Pour le cas de trois dimensions, la formation d'un tableau analogue à celui du paragraphe précédent ne présenterait pas de difficulté nouvelle : elle exigerait seulement de plus longs calculs. Les exemples de groupes J ne rentrant dans aucune géométrie quadratique sont bien plus nombreux. Deux d'entre eux sont à signaler en raison de leurs variétés invariantes.

1° Si l'on considère une cubique gauche, il existe un groupe projectif à trois paramètres qui admet cette cubique, et par conséquent la développable de ses tangentes, comme variétés invariantes. En prenant les équations de la cubique sous la forme

$$y = x^2, \quad z = x^3$$

on a pour les coefficients des transformations infinitésimales définissant le groupe la matrice suivante :

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 2x & 3y \\ x & 2y & 3z \\ 3x^2 - 2y & 3xy - z & 3xz \end{array} \right\|$$

(1) V. Poincaré, *Bulletin de la Société mathématique*, 1886-87. pages 203 et suiv.

Les équations (6) relatives à ces transformations infinitésimales s'écrivent :

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + 2x \frac{\partial F}{\partial y} + 3y \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \\ x \frac{\partial F}{\partial x} + 2y \frac{\partial F}{\partial y} + 3z \frac{\partial F}{\partial z} = -6F, \\ (3x^2 - 2y) \frac{\partial F}{\partial x} + (3xy - z) \frac{\partial F}{\partial y} + 3xz \frac{\partial F}{\partial z} = -12xF. \end{cases}$$

Elles constituent, par rapport à $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ un système linéaire dont le déterminant est

$$\Delta = 3[4x^3z - 3x^2y^2 + 4y^3 - 6xyz + z^3].$$

Le système (9) est équivalent à la relation

$$\frac{dF}{F} = -\frac{d\Delta}{\Delta},$$

de sorte que le groupe admet l'invariant intégral

$$\iiint \frac{dx dy dz}{\Delta},$$

On peut remarquer que l'équation $\Delta = 0$ représente la développable des tangentes de la cubique invariante.

2° Les transformations infinitésimales :

$$p + 2xq + 3yr, \quad xp + 2yq + 3zr, \quad q + 3xr$$

définissent un groupe admettant comme surface invariante la surface cubique

$$z - 3xy + 2x^2 = 0 \quad (\text{surface de Cayley}).$$

Un calcul tout semblable au précédent met en évidence l'invariant intégral

$$\iiint \frac{dx dy dz}{(z - 3xy + 2x^2)^2}.$$

[11] Je terminerai ce premier Chapitre par une remarque importante. Dans tout ce qui précède, chaque fois qu'il a été question de préciser la forme de la probabilité élémentaire

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m$$

par la considération d'un groupe de transformations, nous n'avons envisagé qu'un groupe relatif aux seules variables x_1, x_2, \dots, x_m , et la probabilité élémentaire n'a été que la généralisation simple de l'*élément de volume*. Cette manière de procéder est la plus simple et la plus naturelle. Elle ne permet cependant d'envisager qu'un seul aspect de la question.

Soit, dans l'espace à $m + p$ dimensions $x_1, x_2, \dots, x_m, z_1, z_2, \dots, z_p$ une variété à m dimensions définie par les équations

$$\begin{aligned} z_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_m), \\ &\dots\dots\dots, \\ z_p &= \varphi_p(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{aligned}$$

La probabilité élémentaire la plus générale relativement à un point de cette variété pourra toujours s'écrire

$$dJ = F(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m.$$

Or, imaginons que F soit assujéti à la condition que dJ reste inchangé par une transformation quelconque d'un groupe G de l'espace $x_1, x_2, \dots, x_m, z_1, z_2, \dots, z_p$, groupe dont d'ailleurs chaque transformation changera la variété considérée en une autre variété (équivalente).

Il ne semble pas que la fonction F puisse être complètement déterminée par des considérations de ce genre, en raison de l'existence des *invariants différentiels*. Si, par exemple, la variété envisagée est une surface dans l'espace à trois dimensions, et si le groupe considéré est le groupe des mouvements, la probabilité élémentaire pourra être le produit de l'élément d'aire par une fonction quelconque des coordonnées intrinsèques que sont, dans le cas général, les quantités φ et $\Delta\varphi$ de la théorie classique des surfaces.

Il y a donc encore une large part d'arbitraire dans ce genre de questions : j'ajoute que cela ne diminue en rien leur intérêt; elles feront l'objet d'un travail ultérieur.

Je me bornerai, dans ce qui suit, à des questions rentrant dans le cadre des idées développées dans ce Chapitre : nous rencontrerons, aussi bien en Géométrie élémentaire qu'en Géométrie selon la métrique Cayleyenne, d'assez nombreuses applications auxquelles nous nous limiterons.



CHAPITRE II

[12] En dehors des points, pour lesquels des coordonnées cartésiennes *quelconques* forment un système de variables équiprobables, les éléments géométriques sur lesquels portent les problèmes qui se posent le plus naturellement sont les droites dans le plan, les droites et les plans dans l'espace. Nous allons déterminer, dans chacun de ces cas, la probabilité élémentaire imposée par l'invariance des résultats vis-à-vis du groupe des mouvements : malgré que le calcul direct par la détermination d'un jacobien soit toujours assez simple, nous appliquerons les équations (6) du chapitre précédent d'une manière systématique.

En ce qui concerne les droites du plan d'équation générale

$$ux + vy + 1 = 0,$$

nous apercevons facilement qu'aux transformations infinitésimales du groupe des mouvements du plan :

$$p, \quad q, \quad xq - yp$$

correspondent sur les variables uv les transformations :

$$u^2 \frac{\partial f}{\partial u} + uv \frac{\partial f}{\partial v}, \quad uv \frac{\partial f}{\partial u} + v^2 \frac{\partial f}{\partial v}, \quad u \frac{\partial f}{\partial v} - v \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Cela posé, la troisième équation de condition :

$$-v \frac{\partial F}{\partial u} + u \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

montre que, si l'invariant intégral

$$\iint F(u, v) du dv$$

existe, on a nécessairement

$$F(u, v) = \varphi(u^2 + v^2).$$

Les deux premières équations de condition se réduisent à une seule, qui peut s'écrire :

$$3\varphi + 2(u^2 + v^2)\varphi' = 0.$$

D'où la probabilité élémentaire déjà signalée au paragraphe 2 :

$$(1) \quad dJ = \frac{du dv}{(u^2 + v^2)^{3/2}}.$$

Si l'on écrit l'équation d'une droite sous la forme canonique :

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0,$$

on a immédiatement

$$dJ = dp d\theta.$$

C'est là la forme classique utilisée dans les travaux de *Crofton* : elle est connue depuis longtemps et a permis d'obtenir des résultats remarquables. L'invariance de l'intégrale

$$\iint \frac{du dv}{(u^2 + v^2)^{3/2}}$$

a été signalée par M. Cartan⁽¹⁾, ainsi que celle de la plupart des intégrales analogues qui seront indiquées dans ce chapitre : M. Cartan ne s'est d'ailleurs pas placé au point de vue des probabilités.

Un calcul en tous points analogue au précédent justifie, pour les plans de l'espace

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

l'emploi de la probabilité élémentaire :

$$(2) \quad dJ = \frac{du dv dw}{(u^2 + v^2 + w^2)^2}$$

qui peut s'écrire

$$dJ = \sin \theta dp d\theta d\varphi$$

si l'on prend l'équation d'un plan sous la forme

$$x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta - p = 0.$$

(1). E. Cartan, *Le principe de dualité et certaines intégrales multiples de l'espace tangentiel et réglé* (Bulletin de la Société mathématique, 1896. p. 140).

Dans l'espace à m dimensions, on justifie de la même manière, pour les plans

$$x_1 \cos \varphi_1 + x_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \dots + x_{m-1} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2} \cos \varphi_{m-1} \\ + x_m \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-1} - p = 0$$

la probabilité élémentaire

$$(3) \quad dJ = \sin^{m-2} \varphi_1 \sin^{m-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2} dp d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_{m-1}$$

vis-à-vis du groupe des déplacements euclidiens. Les expressions (2) et (3) s'écrivent d'ailleurs

$$dJ = dp d\Omega,$$

$d\Omega$ désignant l'élément d'angle solide de l'espace à 3 ou à m dimensions.

[13] En ce qui concerne les droites de l'espace, nous utiliserons les équations

$$\begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q \end{cases}$$

où intervient le nombre minimum de paramètres.

Le groupe des mouvements correspond sur les variables a, b, p, q à un groupe engendré par les transformations infinitésimales :

$$\frac{\partial f}{\partial p}, \quad \frac{\partial f}{\partial q}, \quad a \frac{\partial f}{\partial p} + b \frac{\partial f}{\partial q}, \quad -b \frac{\partial f}{\partial a} + a \frac{\partial f}{\partial b} - q \frac{\partial f}{\partial p} + p \frac{\partial f}{\partial q}, \\ (1 + a^2) \frac{\partial f}{\partial a} + ab \frac{\partial f}{\partial b} + ap \frac{\partial f}{\partial p} + bp \frac{\partial f}{\partial q}, \quad ab \frac{\partial f}{\partial a} + (1 + b^2) \frac{\partial f}{\partial b} + aq \frac{\partial f}{\partial p} + bq \frac{\partial f}{\partial q}.$$

Si nous cherchons un élément différentiel invariant

$$F(a, b, p, q) da db dp dq,$$

nous avons donc six équations de condition. Les premières

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 0,$$

montrent que F ne dépend que de a et b ; la troisième se trouve vérifiée de ce fait. Quant aux rotations, la première conduit à

$$b \frac{\partial F}{\partial a} = a \frac{\partial F}{\partial b},$$

d'où il résulte que

$$F = \varphi(a^2 + b^2).$$

Et les deux dernières donnent une seule équation

$$(1 + a^2 + b^2)\varphi' + 2\varphi = 0.$$

D'où la probabilité élémentaire :

$$(4) \quad dJ = \frac{da db dp dq}{(1 + a^2 + b^2)^2}.$$

L'élément différentiel (4) a une signification géométrique simple. Coupons la droite (Δ) définie par les paramètres a, b, p, q par le plan (Π)

$$ax + by + z = 0$$

qui lui est perpendiculaire. Les droites parallèles à (Δ) découpent dans le plan (Π) l'élément d'aire

$$d\sigma = \frac{dp dq}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

D'autre part, les cosinus directeurs de (Δ) étant

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \quad \beta = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

l'élément d'angle solide balayé par (Δ) quand a et b varient seuls est

$$d\Omega = \frac{da db}{\gamma} = \frac{da db}{(1 + a^2 + b^2)^{3/2}}.$$

On peut donc écrire l'expression (4) sous la forme

$$dJ = d\sigma d\Omega.$$

Ces expressions s'étendent naturellement à l'espace à m dimensions. Une droite de cet espace dépend de $2m - 2$ paramètres. On pourra écrire ses équations

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 x_m + p_1, \\ x_2 &= a_2 x_m + p_2, \\ &\dots \dots \dots \\ x_{m-1} &= a_{m-1} x_m + p_{m-1}. \end{aligned}$$

Dans ces conditions, aux translations du groupe des mouvements correspondent sur $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, p_1, \dots, p_{m-1}$, des transformations infinitésimales qui conduisent à prendre

$$F(a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, p_1, p_2, \dots, p_{m-1})$$

fonction des a seuls. Les rotations où ne figure pas x_m imposent à F la forme

$$F = \varphi(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{m-1}^2)$$

et les rotations où figure x_m conduisent enfin à

$$F = \frac{1}{[1 + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{m-1}^2]^{\frac{m+1}{2}}}$$

D'où la probabilité élémentaire

$$(5) \quad dJ = \frac{da_1 da_2 \dots da_{m-1} dp_1 dp_2 \dots dp_{m-1}}{(1 + a_1^2 + \dots + a_{m-1}^2)^{\frac{m+1}{2}}}$$

qui s'écrit encore

$$dJ = d\sigma d\Omega,$$

$d\Omega$ représentant l'élément d'angle solide, et $d\sigma$ étant, comme élément d'aire d'un plan de l'espace à m dimensions, d'ordre $m - 1$ par rapport aux longueurs.

[14] Nous allons reprendre les probabilités élémentaires (1) (2) (3) (4) et (5) des paragraphes 13 et 14, et les appliquer à la mesure des ensembles les plus simples de droites et de plans que l'on peut définir de façon géométrique.

Le plus simple des ensembles de droites du plan est celui des droites qui coupent un segment rectiligne donné. Nous ne diminuerons pas la généralité en prenant le segment qui va de l'origine au point A d'abscisse positive l sur ox . Définissons une droite quelconque de l'ensemble par les paramètres canoniques p et θ ; l'angle θ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$; et pour chaque valeur de θ , p varie de 0 à $l \cos \theta$.

Nous avons donc

$$\int \int dp d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{l \cos \theta} dp = \pi l.$$

Considérons maintenant un contour polygonal quelconque $ABC \dots KL$: l'ensemble des droites qui rencontrent chaque côté a pour mesure le double de la longueur de ce côté. Dans ces conditions, l'ensemble des droites qui coupent le contour total a pour mesure le double de sa longueur totale, à la condition de compter chacune d'elles pour un nombre de fois égal à celui de ses points d'intersection.

Cette proposition s'étend naturellement à un arc de courbe, fermé ou non, de longueur L . L'intégrale

$$\int \int n dp d\theta$$

étendue aux droites qui rencontrent, chacune en n fois, l'arc de courbe, a pour valeur $2L$. S'il s'agit en particulier d'un contour fermé convexe, chacune de ses sécantes le coupe en deux points. Il s'ensuit que l'on a, pour les sécantes de ce contour,

$$\int \int dp d\theta = L.$$

[15] A défaut d'un historique complet de la théorie des probabilités géométriques, qu'il eût peut-être été légitime de placer en tête de ce travail, je vais très rapidement passer en revue les beaux travaux qui, à propos du problème de l'aiguille, se rattachent aux propositions du paragraphe 14.

Soit un contour convexe (C) , fermé, de longueur L : et soit (C') un contour fermé convexe, de longueur L' et intérieur à (C) . D'après ce qui précède, la probabilité pour qu'une sécante de (C) coupe (C') est

$$P = \frac{L'}{L}.$$

Supposons que (C) soit un cercle de diamètre a et que (C') se réduise à un segment rectiligne de longueur l . La probabilité pour qu'une sécante du cercle coupe le segment est

$$P = \frac{2l}{\pi a}.$$

Il convient en effet de compter deux fois la longueur l . Or, imaginons un parquet régulier dont chaque lame aurait pour largeur a : si on lance sur ce parquet une aiguille de longueur l , et si on considère un disque circulaire de diamètre a entourant l'aiguille, il y a une rainure du parquet qui coupe le disque : la probabilité pour qu'elle coupe l'aiguille est

$$P = \frac{2l}{\pi a}.$$

Telle est la solution donnée par Barbier pour le problème de l'aiguille de Buffon. Un raisonnement ingénieux lui avait permis d'éviter tout calcul, et la considération explicite du groupe des mouvements est inutile à son intuitive explication. Barbier était l'un des auditeurs, comme élève de l'École Normale, du cours de *Lamé* à la Faculté des Sciences en 1860. Ce dernier traitait de diverses généralisations du problème de l'aiguille et envisageait en particulier le cas où l'objet lancé était un disque elliptique. Barbier étendit le résultat obtenu par Lamé au cas général et publia dans le *Journal de Liouville* (1860) un très remarquable mémoire.

[16] Parmi les idées intéressantes contenues dans ce mémoire de Barbier, il convient de signaler tout particulièrement la suivante :

Soit un contour quelconque (C), ouvert ou fermé : la mesure de l'ensemble des droites qui coupent ce contour, sans qu'aucun coefficient soit attribué à chacune d'elles, peut s'obtenir simplement. Imaginons en effet un fil tendu autour de (C) : toute sécante de (C) sera sécante du contour fermé convexe réalisé par le fil et réciproquement. Or ce dernier est coupé en deux points exactement par toute sécante de (C). On a donc

$$\int \int dp d\theta = \lambda$$

en désignant par λ la longueur du fil tendu.

Cette remarque a pour effet de ramener les questions relatives aux droites coupant certains contours à des questions analogues sur des contours convexes. Les résultats importants obtenus dans ce domaine par les continuateurs de Barbier sont exposés par *Sylvester*, le plus illustre d'entre eux, dans un mémoire des *Acta Mathematica* (1891) qui a pour épigraphe : « Squaintly made of chords ».

[17] Soit (Γ) un contour convexe fermé de périmètre L et soit S son aire intérieure. Étant donné deux sécantes de (Γ), quelle est la probabilité pour qu'elles se coupent à l'intérieur du contour ?

Les couples de sécantes de (Γ) forment un ensemble de mesure $\frac{1}{2} L^2$. Quelle est la mesure de l'ensemble des couples dont le point d'intersection est intérieur à (Γ) ? Soit (Δ) l'une des sécantes, C la longueur de la corde AB correspondante : les droites coupant AB ont pour mesure $2C$. L'ensemble des couples dont l'intersection se fait dans (Γ) a donc pour mesure

$$\int \int C dp d\theta.$$

Et comme, si on fait varier θ de 0 à π , on a pour θ donné :

$$\int C dp = S$$

l'intégrale double précédente a pour valeur πS . D'où la probabilité cherchée :

$$\frac{2\pi S}{L^2}.$$

Soit maintenant M un point quelconque intérieur à (Γ) et σ l'aire d'un petit contour convexe entourant le point M : l'ensemble des points d'intersection, intérieurs au contour, des sécantes de (Γ) a pour mesure $\pi\sigma$. Ceci veut dire, selon l'énoncé donné par Crofton, que :

La « densité » des points d'intersection des sécantes de (Γ) est constante et égale à π à l'intérieur du contour.

Si l'on étudie la même « densité » en un point extérieur à (Γ) , le résultat s'obtient simplement en utilisant la méthode du fil tendu de Barbier : c'est

$$\theta - \sin \theta$$

en désignant par θ l'angle sous lequel on voit (Γ) du point considéré. D'où le célèbre théorème de Crofton :

L'intégrale $\int \int (\theta - \sin \theta) dx dy$, étendue à tout le plan en dehors de (Γ) a pour valeur $\frac{1}{2} L^2 - \pi S$,

remarquable par son élégance et sa généralité, et dont plusieurs démonstrations ont été données indépendamment de la théorie des probabilités (*).

[18] Proposons-nous, dans le même ordre d'idées qu'au paragraphe 14, de trouver la mesure de l'ensemble des plans qui coupent un segment rectiligne de l'espace. Nous prendrons le segment qui va de l'origine des coordonnées au point A de cote l sur oz .

(*) Crofton, *Philosophical Transactions*, 1868, p. 181.

V. aussi Serret, *Annales de l'Ecole Normale*, 1869, p. 177.

Hurwitz, *id.*, 1902, p. 389 et suivantes.

Les plans ayant pour équation générale :

$$x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta - p = 0,$$

θ varie de 0 à π , φ de 0 à 2π et p de 0 à $+\infty$. La mesure cherchée a pour expression

$$\mu = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{l \cos \theta} dp = \pi l.$$

On voit que le même raisonnement qu'au paragraphe 14 permet de démontrer que si AB est un arc de courbe quelconque de l'espace, de longueur L, l'intégrale

$$\int \int \int n \sin \theta dp d\theta d\varphi$$

étendue aux plans de l'espace qui coupent AB chacun en n points a pour valeur πL .

L'extension de ce résultat à l'espace à m dimensions est facile à déduire de la probabilité élémentaire (3) du paragraphe 12. L'intégrale :

$$\int n dJ,$$

étendue à tous les plans qui coupent, chacun en n points, l'arc de courbe AB de longueur L dans l'espace envisagé, a pour valeur

$$\frac{L}{m-1} \Omega_{m-1},$$

Ω_{m-1} étant l'aire totale de la sphère de rayon 1 dans l'espace à $m-1$ dimensions.

[19] La mesure de l'ensemble des plans de l'espace à 3 dimensions qui coupent une surface donnée n'a pas jusqu'ici été définie d'une manière aussi simple que celles considérées plus haut. Si l'on a affaire à une surface convexe fermée, cette mesure définit un nouvel élément métrique de la surface : M. Cartan, dans le mémoire cité au paragraphe 12, propose de donner au produit de cette mesure par $\frac{2}{\pi}$ le nom de *périmètre* de la surface. Effectivement, si cette surface se réduit à une portion de plan limitée par une ligne convexe fermée de longueur L, le périmètre ainsi défini devient identique au périmètre de cette ligne.

Cette mesure est l'intégrale de « l'épaisseur » de la surface, c'est-à-dire la distance entre deux plans tangents parallèles, quand ceux-ci prennent toutes les directions

possibles. *Minkowski*, dans ses travaux sur les « corps convexes », a montré que cette intégrale a pour valeur

$$\iint \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) d\sigma,$$

$d\sigma$ étant l'élément d'aire, et R, R' les rayons de courbure principaux. C'est l'intégrale de la demi-courbure moyenne de la surface (*). Ce résultat est immédiatement vérifié dans le cas d'une sphère : la mesure de l'ensemble des plans est $4\pi R$. Le périmètre d'une sphère, au sens de M. Cartan, est donc $8R$.

[20] La même intégrale étendue à une sphère de l'espace à m dimensions a pour valeur $R\Omega_m$, en désignant par Ω_m l'aire de la sphère de rayon 1 dans cet espace. Considérons dans cet espace un réseau de plans parallèles (H) d'équidistance a . Et soit une aiguille de longueur l , moindre que a , mobile au hasard à travers le réseau. Quelle est la probabilité pour qu'à un moment donné l'aiguille traverse un plan (H) ?

L'ensemble des plans qui coupent une sphère de diamètre a a pour mesure $\frac{a}{2} \Omega_m$; celui des plans qui coupent l'aiguille de longueur l a pour mesure $\frac{l}{m-1} \Omega_{m-1}$.

La probabilité cherchée est donc :

$$P = \frac{2l}{(m-1)a} \frac{\Omega_{m-1}}{\Omega_m}.$$

Or, soit

$$J_k = \int_0^\pi \sin^k u du.$$

On peut écrire

$$\Omega_m = 2\pi J_1 J_2 \dots J_{m-2} \quad (^{\circ}).$$

Par suite

$$P = \frac{2l}{(m-1)a J_{m-2}} = \frac{2l}{a \cdot m J_m}.$$

La valeur de P pour $m=2$ est bien $\frac{2l}{\pi a}$. Pour $m=3$, on a $P = \frac{2a}{l}$: il n'est pas absurde d'envisager dans ce cas une vérification expérimentale.

(¹) *Minkowski, Œuvres complètes, t. II, p. 241.*

(²) Voy., par exemple, Borel, *Introduction géométrique à quelques théories physiques*, p. 59 et suiv.

Quelle est la valeur asymptotique de P pour m très grand? Celle de J_m est $\sqrt{\frac{2\pi}{m}}$.
Donc celle de P est

$$P' = \frac{2l}{a \sqrt{2\pi m}}.$$

Elle tend vers zéro lorsque m augmente indéfiniment.

[21] Une autre intégrale relative aux plans qui coupent une portion quelconque de surface est susceptible d'une définition géométrique générale indiquée par Barbier.

Soit (Σ) une portion de surface plane : et soit C la longueur de la corde découpée par (Σ) dans le plan (P) :

$$x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta - p = 0.$$

Proposons-nous de calculer la valeur de l'intégrale :

$$I = \iiint C \sin \theta dp d\theta d\varphi$$

étendue à tous les plans qui coupent (Σ) . Nous ne diminuerons pas la généralité en prenant (Σ) dans le plan xoy . La trace (Δ) du plan (P) a pour équation

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - \frac{p}{\sin \theta} = 0,$$

Pour θ et φ donnés, p varie d'une quantité telle que (Δ) balaie l'aire (Σ) en demeurant parallèle à elle-même. On a donc pour chaque valeur de θ :

$$\frac{I}{\sin \theta} \iint C dp d\varphi = \pi \sigma$$

en désignant par σ l'aire intérieure à (Σ) . On a donc

$$I = \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \iint C dp d\varphi = \pi \sigma \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi^2}{2} \sigma.$$

Ce résultat s'étend à une portion quelconque de surface gauche d'aire S et donne la proposition suivante :

Si le plan P découpe un arc de courbe de longueur λ sur la portion de surface considérée, on a

$$\iiint \lambda \sin \theta dp d\theta d\varphi = \frac{\pi^2}{2} S.$$

Il suit de là que, dans le cas particulier d'une surface convexe fermée, la *valeur moyenne* de λ est

$$\frac{\pi S}{\mathcal{C}},$$

\mathcal{C} désignant le « périmètre » de la surface.

[22] Pour terminer la série des applications élémentaires sur les éléments différentiels définis aux paragraphes 13 et 14, proposons-nous de trouver la mesure de l'ensemble des droites qui coupent l'aire plane (Σ) considérée plus haut : soit μ cette mesure, nous avons

$$\mu = \int \int dp dq \int \int \frac{da db}{(1 + a^2 + b^2)^2}.$$

Le premier facteur est l'aire (σ) elle-même. Quant au deuxième, il s'exprime en posant

$$a = \cos \varphi \cotg \theta, \quad b = \sin \varphi \cotg \theta,$$

par l'intégrale

$$\int \int \sin \theta \cos \theta d\varphi d\theta$$

pour

$$0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

ce qui donne $\mu = \pi\sigma$.

D'où par extension à la portion de surface (S) la formule

$$\int \int \int \int \frac{n da db dp dq}{(1 + a^2 + b^2)^2} = \pi S$$

n étant le nombre des points d'intersection de (s) avec la droite (a, b, p, q).

Si (S) est une surface convexe fermée, on a $n = 2$ pour toutes ses sécantes. Les droites qui la coupent forment donc un ensemble de mesure

$$\mu = \frac{\pi}{2} S.$$

Il suit de là que si l'on considère deux surfaces convexes fermées intérieures l'une à l'autre, la probabilité pour qu'une sécante de l'une rencontre l'autre est le rapport de leurs aires. La probabilité pour qu'un plan sécant de l'une rencontre l'autre est le rapport de leurs périmètres.

CHAPITRE III

[23] Je me propose dans le présent chapitre d'étudier, au point de vue de la probabilité élémentaire dJ qu'ils définissent, quelques groupes de transformations à deux, trois, ou quatre variables, qui peuvent jouer en géométrie, à côté des groupes de déplacements euclidiens, un rôle important.

Le premier est le groupe projectif à trois paramètres d'une conique non dégénérée. Soit la conique (Γ) d'équation

$$x^2 - y = 0.$$

Les équations finies du groupe sont les suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} X = \frac{acy + (ad + bc)x + bd}{c^2y + 2cdx + d^2}, \\ Y = \frac{a^2y + 2abx + b^2}{c^2y + 2cdx + d^2}. \end{cases}$$

D'une manière tout à fait précise, l'opération (1) est une *rotation* non-euclidienne autour du point ω de coordonnées

$$x = \frac{a-d}{2c}, \quad y = -\frac{b}{c}$$

et, à tout point m d'abscisse x sur (Γ) elle fait correspondre le point M de la même courbe ayant pour abscisse

$$(2) \quad X = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Des équations (1) on déduit, en posant $a = 1 + \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$, $d = 1$, les quantités $\alpha \beta \gamma$ étant infiniment petites, les transformations infinitésimales du groupe. Celles-ci sont réunies dans le tableau :

$p + 2xq,$	$xp + 2yq,$	$(2x^2 - y)p + 2xyq$
------------	-------------	----------------------

identique, à l'unité dans laquelle sont exprimés x et y près, au tableau D₁, du paragraphe 9.

Les équations (6) du chapitre I^{er}, relatives à l'invariant intégral

$$\iint F(x, y) dx dy$$

s'écrivent ici :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} + 2x \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ x \frac{\partial F}{\partial x} + 2y \frac{\partial F}{\partial y} = -3F, \\ (2x^2 - y) \frac{\partial F}{\partial x} + 2xy \frac{\partial F}{\partial y} = -6xF. \end{array} \right.$$

On tire immédiatement de là que

$$F = \frac{\lambda}{(y - x^2)^{3/2}}.$$

La probabilité élémentaire vis-à-vis du groupe considéré, ou l'aire non-euclidienne de la Géométrie ayant (Γ) pour absolue peut être prise égale à

$$(3) \quad dJ = \frac{dx dy}{2|y - x^2|^{3/2}}.$$

Cette Géométrie est identique à celle d'une surface à courbure totale constante et négative qui aurait pour élément linéaire :

$$ds^2 = \frac{1}{4(y - x^2)^2} [4y dx^2 - 4x dx dy + dy^2]$$

et par conséquent pour élément d'aire :

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} dx dy = dJ.$$

[24] Cherchons dans la même Géométrie quelle est la probabilité élémentaire pour les *lignes droites*. Nous obtiendrons facilement le tableau des transformations infinitésimales pour les coordonnées u, v définissant la droite :

$$ux + vy + 1 = 0$$

si nous remarquons qu'en vertu de (2) les racines de l'équation

$$vx^2 + ux + 1 = 0$$

subissent les transformations infinitésimales : p, xp, x^2p .

Les transformations correspondantes pour u et v sont celles du tableau

$$(u^2 - 2v) \frac{\partial f}{\partial u} + uv \frac{\partial f}{\partial v}, \quad u \frac{\partial f}{\partial u} + 2v \frac{\partial f}{\partial v}, \quad 2 \frac{\partial f}{\partial u} + u \frac{\partial f}{\partial v},$$

et on en déduit sans difficulté la probabilité élémentaire :

$$dJ = \frac{dv}{|u^2 - 4v|^{3/2}}.$$

Cherchons quelle est dans ces conditions la mesure de l'ensemble des droites qui coupent l'axe oy entre les points A_1 et A_2 d'ordonnées positives γ_1 et γ_2 ; supposons $\gamma_2 > \gamma_1$.

Ce sera

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\frac{1}{\gamma_1}}^{-\frac{1}{\gamma_2}} \frac{du dv}{(u^2 - 4v)^{3/2}},$$

ou, après un calcul simple :

$$\mu = \left| \text{Log} \frac{u + \sqrt{u^2 + \frac{1}{\gamma_2}}}{u + \sqrt{u^2 + \frac{1}{\gamma_1}}} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{\gamma_2}{\gamma_1},$$

c'est-à-dire précisément la *distance cayleyenne* $\overline{A_1 A_2}$. Ce résultat étend à la Géométrie non-euclidienne actuelle une partie importante des propositions des paragraphes 14 et suivants.

[25] Considérons le *groupe paramétrique* du groupe (1). Grâce à la formule (2), nous aurons facilement ses équations finies. Réduisons d'abord le système des quatre paramètres homogènes $a b c d$ à trois paramètres effectifs, en prenant $d = 1$. Formons la quantité

$$X_1 = \frac{\alpha X + \beta}{\gamma X + 1},$$

nous avons

$$X_1 = \frac{a'x + b'}{c'x + 1},$$

moyennant les relations :

$$(4) \quad \begin{cases} a' = \frac{a\alpha + c\beta}{b\gamma + 1}, \\ b' = \frac{b\alpha + \beta}{b\gamma + 1}, \\ c' = \frac{a\gamma + c}{b\gamma + 1}. \end{cases}$$

qui définissent le groupe paramétrique de transformations des variables abc en $a'b'c'$, groupe à trois paramètres $\alpha\beta\gamma$.

Les transformations infinitésimales de ce groupe sont celles du tableau :

$$a \frac{\partial f}{\partial a} + b \frac{\partial f}{\partial b}, \quad c \frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}, \quad ab \frac{\partial f}{\partial a} + b^2 \frac{\partial f}{\partial b} + (bc - a) \frac{\partial f}{\partial c}.$$

Cela posé, examinons si le groupe (4) est un groupe J : s'il en est ainsi, on pourra définir la probabilité pour que la position d'une figure de forme non-euclidienne invariable satisfasse à certaines conditions.

Or, on obtient tout de suite l'invariant intégral :

$$(5) \quad \iint \int \frac{dadbdc}{(a-bc)^2}.$$

L'équation $a - bc = 0$ est une équation invariante du groupe : ce fait est bien naturel, puisque la condition

$$ad - bc \neq 0$$

est indispensable pour que la transformation (2) ne soit pas singulière.

Il est possible de tirer du résultat précédent une conclusion relative à la Géométrie euclidienne ordinaire. On sait en effet que si l'on considère la sphère (S)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

représentée paramétriquement par les équations :

$$(6) \quad x = \frac{1 - \lambda\mu}{\lambda - \mu}, \quad y = \frac{i(1 + \lambda\mu)}{\lambda - \mu}, \quad z = \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu},$$

le groupe des déplacements sur cette sphère, qui correspond au groupe des rotations de l'espace (xyz) autour de l'origine des coordonnées, peut se définir au moyen d'une même substitution linéaire faite sur λ et μ :

$$(7) \quad \lambda' = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + 1}, \quad \mu' = \frac{a\mu + b}{c\mu + 1}.$$

Il en résulte que la probabilité pour qu'une figure de forme invariable sur (S) ou un solide mobile autour de O satisfasse à certaines conditions doit être calculée au moyen de la probabilité élémentaire :

$$dJ = \frac{da db dc}{(a - bc)^2}.$$

Ce résultat aboutit à des expressions simples de dJ si l'on passe des variables $a b c$ à celles d'Olinde Rodrigues ou aux angles d'Euler.

Nous avons en effet en posant :

$$(8) \quad a = \frac{1 - il}{1 + il}, \quad b = \frac{im - n}{1 + il}, \quad c = \frac{im + n}{1 + il}$$

les équations suivantes pour un déplacement quelconque de l'espace $oxyz$ autour du point o :

$$(9) \quad \begin{cases} \Delta x' = (1 + l^2 - m^2 - n^2)x + 2(lm + n)y + 2(ln - m)z, \\ \Delta y' = 2(lm - n)x + (1 - l^2 + m^2 - n^2)y + 2(l + mn)z, \\ \Delta z' = 2(ln + m)x + 2(mn - l)y + (1 - l^2 - m^2 + n^2)z \end{cases}$$

avec

$$\Delta = 1 + l^2 + m^2 + n^2.$$

Les équations (9) sont les formules classiques d'Olinde Rodrigues. Et moyennant les relations (8), la probabilité élémentaire

$$\frac{da db dc}{(a - bc)^2}$$

prend la forme suivante :

$$(10) \quad dJ = \frac{4 dl dm dn}{(1 + l^2 + m^2 + n^2)^2},$$

En introduisant d'autre part les angles d'Euler définis par les relations :

$$l = -\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \frac{\cos \frac{\psi - \varphi}{2}}{\cos \frac{\psi + \varphi}{2}}, \quad m = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \frac{\sin \frac{\psi - \varphi}{2}}{\cos \frac{\psi + \varphi}{2}}, \quad n = \operatorname{tg} \frac{\psi + \varphi}{2}$$

on a l'expression

$$(11) \quad dJ = |\sin \theta| d\varphi d\psi d\theta.$$

Remarquons que si l'on envisage toutes les positions possibles d'un solide autour du point O, l'intégrale J étendue à l'ensemble total de ces positions a une valeur finie.

Les angles φ , ψ et θ varient en effet respectivement de 0 à 2π , de 0 à π , et de 0 à 2π .

On a dans ces conditions

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\psi \int_0^{2\pi} |\sin \theta| d\theta$$

ou

$$J = 8\pi^2.$$

Ce résultat peut s'obtenir d'une manière différente en partant de l'expression (10). Posons en effet

$$\begin{aligned} l &= \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \operatorname{tg} \varphi_1, \\ m &= \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \operatorname{tg} \varphi_1, \\ n &= \cos \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_1, \end{aligned}$$

nous avons

$$dJ = 4 \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi_2 d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3.$$

Donc J est le quadruple de l'aire d'une sphère de rayon 1 dans l'espace à quatre dimensions,

soit

$$J = 4\Omega_4,$$

ou, d'après les formules données au paragraphe 20 :

$$J = 8\pi \int_0^\pi \sin u du \int_0^\pi \sin^2 u du = 8\pi^2.$$

Enfin il est évident que la probabilité élémentaire relative à la position d'un solide mobile dans l'espace avec six degrés de liberté sera

$$\sin \theta d\varphi d\psi d\theta dx_0 dy_0 dz_0,$$

x_0, y_0, z_0 définissant les translations.

[26] De la remarque fondamentale du paragraphe 7 il résulte que l'on peut étendre à une géométrie quadratique quelconque du plan, ayant pour conique absolue une conique non dégénérée, la proposition du paragraphe 23 d'après laquelle l'élément différentiel

$$dJ = \frac{dx dy}{2(y - x^2)^{3/2}}$$

est invariant par rapport au groupe de la conique (Γ) :

$$x^2 - y = 0.$$

Étant donné une conique quelconque non dégénérée $\Phi(x, y) = 0$ du plan, l'élément d'aire non-euclidienne par rapport à cette conique est

$$\frac{\Delta dx dy}{[\Phi(x, y)]^{3/2}}$$

en désignant par Δ le discriminant de la conique.

Si on envisage une conique absolue dégénérée soit en deux points, soit en deux droites, il y a lieu de prendre quelques précautions. Si nous prenons, pour le premier cas, les points cycliques du plan, le groupe projectif qui les conserve est le groupe à quatre paramètres des similitudes. On le définit par les transformations infinitésimales :

$$p, \quad q, \quad xp + yq, \quad -yp + xq.$$

Deux de ses sous-groupes sont à signaler en ce qui concerne l'invariance d'un élément différentiel de la forme $F(x, y) dx dy$; le premier est le groupe à trois paramètres

$$p, \quad q, \quad -yp + xq$$

de la géométrie élémentaire : il conserve l'élément d'aire $dx dy$.

Le deuxième est le groupe des similitudes de centre fixe : si ce centre est l'origine, ce groupe, qui dépend de deux paramètres, est défini par les transformations infinitésimales

$$(12) \quad xp + yq, \quad -yp + xq$$

et il admet l'invariant intégral

$$\iint \frac{dx dy}{x^2 + y^2}.$$

On peut donc envisager une probabilité élémentaire particulière à ce groupe, et elle n'est peut-être pas dépourvue d'intérêt.

Si nous considérons maintenant une conique absolue dégénérée en deux droites, nous pouvons prendre la conique

$$x^2 + y^2 = 0$$

et reprendre les considérations précédentes en transformant dualistiquement.

Le groupe projectif qui conserve ces deux droites est à quatre paramètres : deux de ses sous-groupes sont intéressants au point de vue de l'invariance d'un élément différentiel $F(x, y)dx dy$. Le premier est défini par les trois transformations infinitésimales :

$$xq - yp, \quad x^2p + xyq, \quad xyp + y^2q;$$

il conserve l'élément différentiel

$$\frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Nous l'avons rencontré, avec les variables u et v au lieu de x et y à propos des droites du plan. Le deuxième est identique à son corrélatif (12).

[27] Des particularités analogues se présentent en géométrie à trois dimensions. Il y a lieu de distinguer les cas où la quadrique absolue est dégénérée en une conique, en un cône, ou bien n'est pas dégénérée.

Envisageons d'abord le cas où la quadrique absolue est le cercle imaginaire de l'infini : nous avons le groupe projectif à sept paramètres :

$$p, \quad q, \quad r, \quad xq - yp, \quad yr - zq, \quad zp - xr, \quad xp + yq + zr$$

qui est celui des similitudes. Deux de ses sous-groupes sont à signaler. D'abord le groupe des mouvements, qui admet comme invariant l'élément de volume $dx dy dz$. Ensuite le groupe homogène

$$xq - yp, \quad yr - zq, \quad zp - xr, \quad xp + yq + zr$$

qui admet l'invariant

$$\iiint \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

et peut par conséquent définir une probabilité élémentaire analogue à celle du groupe des similitudes d'origine O dans le plan.

En ce qui concerne maintenant le cas d'une quadrique absolue dégénérée en un cône, nous pouvons prendre le cône

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Les groupes corrélatifs des deux groupes J signalés plus haut sont : pour le premier, le groupe à six paramètres rencontré au chapitre II avec les variables uvw à propos des plans de l'espace : le deuxième, comme dans le plan, est identique à son corrélatif.

[28] Soit maintenant la quadrique absolue non dégénérée :

$$(Q) \quad yz - x = 0$$

Les déplacements non-euclidiens par rapport à cette quadrique forment un groupe à six paramètres. Le tableau des coefficients des Xf est :

$$(13) \quad \left\| \begin{array}{ccc} z & 1 & 0 \\ x & y & 0 \\ xy & y^2 & yz - x \\ y & 0 & 1 \\ x & 0 & z \\ zx & yz - x & z^2 \end{array} \right\|$$

Et l'emploi de la méthode habituelle conduit à l'invariant suivant, élément de volume non-euclidien :

$$(14) \quad dJ = \frac{dx dy dz}{(yz - x)^2}.$$

Nous avons donc là la probabilité élémentaire pour les points. L'équation d'un plan étant

$$ux + vy + wz + 1 = 0,$$

un calcul très semblable à celui du paragraphe 24 conduit, pour les plans, à la probabilité élémentaire $\frac{du dv dw}{(vw - u)^2}$. Ces résultats s'étendent, par substitution linéaire convenable, à une Géométrie quadratique quelconque de quadrique absolue non

dégénérée. Et on aperçoit tout de suite comment il faudrait écrire l'élément de volume analogue à l'élément (14) dans le cas d'une Géométrie quadratique de l'espace à m dimensions : ce serait

$$dJ = \frac{\Delta dx_1 dx_2 \dots dx_m}{[\Phi(x_1, x_2, \dots, x_m)]^{\frac{m+1}{2}}},$$

en désignant par $\Phi=0$ l'équation de la quadrique absolue, et Δ le *discriminant* de Φ .

[29] Revenons à la Géométrie définie par le tableau (12) : cherchons la probabilité élémentaire relative aux droites de l'espace

$$\begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{cases}$$

Aux transformations infinitésimales du groupe correspondent les suivantes, sur les paramètres $abpq$:

$$(15) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial q}, & a \frac{\partial f}{\partial a} + b \frac{\partial f}{\partial b} + p \frac{\partial f}{\partial p} + q \frac{\partial f}{\partial q}, \\ (a^2 + bp) \frac{\partial f}{\partial a} + b(a+q) \frac{\partial f}{\partial b} + p(a+q) \frac{\partial f}{\partial p} + (bp+q^2) \frac{\partial f}{\partial q}, \\ -b \frac{\partial f}{\partial a} + (a-q) \frac{\partial f}{\partial p} + b \frac{\partial f}{\partial q}, & b \frac{\partial f}{\partial b} - p \frac{\partial f}{\partial q}, & -p \frac{\partial f}{\partial a} + (a-q) \frac{\partial f}{\partial b} + p \frac{\partial f}{\partial q}. \end{cases}$$

Et les équations (6) du chapitre I^{er} conduisent sans difficulté à l'invariant intégral

$$(16) \quad \iiint \frac{da db dp dq}{[(a-q)^2 + 4bp]^2}.$$

L'équation

$$(a-q)^2 + 4bp = 0$$

est celle du complexe des droites tangentes à la quadrique absolue. Ce complexe est une variété invariante du groupe (15) : il est naturel, d'après les considérations du paragraphe (6) que le premier membre de son équation figure dans l'expression (16) de la probabilité élémentaire relative aux lignes droites.

[30] Nous terminerons ce chapitre par l'étude d'un groupe important de Géométrie réglée : le groupe projectif à dix paramètres d'un complexe linéaire.

En prenant pour équation du complexe (C) :

$$(17) \quad dx + ydz - zdy = 0,$$

on a le tableau suivant pour les transformations infinitésimales du groupe :

$$(18) \quad \begin{cases} q - zp, & r + yp, & p, & yr, & yq - zr, & zq, & 2xp + yq + zr, \\ xq - z(xp + yq + zr), & xr + y(xp + yq + zr), & x(xp + yq + zr). \end{cases}$$

Cherchons, pour les droites

$$x = az + h, \quad y = bz + k$$

le tableau dérivé de (18). On obtient sans difficulté :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial a} - \frac{\partial f}{\partial k}, \quad -b \frac{\partial f}{\partial a} + (a-k) \frac{\partial f}{\partial h} + b \frac{\partial f}{\partial k}, \quad \frac{\partial f}{\partial h}, \\ ab \frac{\partial f}{\partial a} + b^2 \frac{\partial f}{\partial b} + ak \frac{\partial f}{\partial h} + bk \frac{\partial f}{\partial k}, \quad a \frac{\partial f}{\partial a} + 2b \frac{\partial f}{\partial b} + k \frac{\partial f}{\partial k}, \quad \frac{\partial f}{\partial b}, \\ & a \frac{\partial f}{\partial a} + 2h \frac{\partial f}{\partial h} + k \frac{\partial f}{\partial k}, \quad h \frac{\partial f}{\partial a} + (k-a) \frac{\partial f}{\partial b} - h \frac{\partial f}{\partial k}, \\ (bh - a^2) \frac{\partial f}{\partial a} + h(k-a) \frac{\partial f}{\partial h} + b(k-a) \frac{\partial f}{\partial b} + (k^2 - bh) \frac{\partial f}{\partial k}, \\ & ah \frac{\partial f}{\partial a} + h^2 \frac{\partial f}{\partial h} + ak \frac{\partial f}{\partial b} + kh \frac{\partial f}{\partial k}. \end{aligned}$$

Et il en résulte pour les droites l'élément différentiel invariant :

$$(19) \quad \frac{dadbdhdk}{(a+k)^4}$$

qui définit la probabilité élémentaire pour les lignes droites vis-à-vis du groupe (18).

Ce résultat peut se justifier directement de la manière suivante. Considérons la droite :

$$(\Delta) \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

de coordonnées pluckériennes

$$a, b, c, \quad l = cy_0 - bz_0, \quad m = az_0 - cx_0, \quad n = bx_0 - ay_0.$$

Le complexe (C) a pour équation $a + l = 0$. Employons les coordonnées :

$$\lambda = \frac{a-l}{a+l}, \quad \mu = \frac{b+m}{a+l},$$

$$v = i \frac{b+m}{a+l}, \quad \rho = \frac{c-n}{a+l}, \quad \sigma = i \frac{c+n}{a+l}.$$

La droite (Δ) correspond au point de coordonnées $\lambda\mu\nu\rho\sigma$ sur la sphère :

$$\lambda^2 + \mu^2 + v^2 + \rho^2 + \sigma^2 = 1.$$

Or, le complexe (C) correspond à la section de cette sphère par le plan de l'infini de l'espace $\lambda\mu\nu\rho\sigma$. Dans ces conditions, les transformations projectives de l'espace xyz qui conservent les droites du complexe (C) correspondent aux substitutions orthogonales sur les variables $\lambda\mu\nu\rho\sigma$. Le groupe à dix paramètres correspondant conserve donc sur la sphère l'élément d'aire

$$\frac{d\lambda d\mu d\nu d\rho d\sigma}{\lambda},$$

qu'on ramène sans difficulté à la forme (19) en prenant

$$c = 1, \quad z_0 = 0, \quad x_0 = h, \quad y_0 = k.$$

Si, pour terminer, à la droite

$$\begin{cases} x = az + h, \\ y = bz + k \end{cases}$$

nous associons la *sphère*

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2$$

au moyen des formules de la transformation de Lie :

$$\begin{aligned} b &= \alpha + i\beta, & a &= R + i\gamma, \\ h &= \alpha - i\beta, & k &= R - i\gamma, \end{aligned}$$

le résultat établi plus haut en ce qui concerne les droites permet de définir la probabilité élémentaire

$$\frac{4 d\alpha d\beta d\gamma dR}{R^4}$$

pour les sphères de l'espace vis-à-vis du *groupe conforme de l'espace*, que la transformation de Lie fait correspondre au groupe projectif du complexe (C).

DEUXIÈME PARTIE

CHAPITRE IV

[31] La première partie de ce travail ouvre la voie à toute une catégorie de problèmes bien posés, où interviennent des probabilités élémentaires bien déterminées. Nous admettrons, pour tous ceux dont il sera question dans la suite, qu'un système de variables équiprobables x_1, x_2, \dots, x_m a été effectivement déterminé : et nous emploierons le langage géométrique, en considérant une figure (F) de l'espace (x_1, x_2, \dots, x_m) .

Le problème consiste à chercher la probabilité pour que (F) satisfasse à certaines conditions. Cette figure est formée d'un point pris au hasard dans un certain domaine (D), ou bien de n points pris au hasard indépendamment les uns des autres, ou encore d'une infinité de points. C'est surtout le deuxième cas qui nous intéressera.

Nous supposons essentiellement le volume V du domaine (D) fini. Dans ces conditions, la probabilité cherchée P s'écrit

$$P = \frac{U}{V^a},$$

U exprimant la mesure de l'ensemble des cas favorables.

Le calcul de U peut être fort laborieux, même pour des questions tout à fait élémentaires. Le but du présent chapitre est de montrer le parti que l'on peut tirer, dans certains cas, de la notion de *variation infiniment petite* des données du problème. Cette variation pourra porter sur les conditions imposées et aussi modifier la seule quantité U . Elle pourra porter aussi sur le domaine (D) et ainsi modifier simultanément U et V .

[32] Je traiterai d'abord un exemple où vont intervenir simultanément les deux procédés :

Probabilité pour que la distance de deux points pris au hasard à l'intérieur d'une sphère de rayon R de l'espace à m dimensions soit moindre que a ()*.

(*) M. Borel a donné les valeurs de cette probabilité pour quelques domaines simples du plan et de l'espace à 3 dimensions. [Voy. *Bulletin de la Société mathématique*, 1919, p. 119.]

Soient A et B les deux points considérés. La probabilité pour que AB soit compris entre x et $x + dx$ étant $p(x)dx$, nous avons pour la probabilité cherchée :

$$P = \int_0^a p(x) dx.$$

Or

$$p = \frac{U}{V^2},$$

V désignant le volume de la sphère et U un certain numérateur. Examinons quel est l'accroissement de U qui résulte d'un accroissement dR du rayon. Cet accroissement de U correspond à la sommation des segments AB ayant une, ou deux extrémités dans l'espace compris entre les sphères concentriques de rayons R et $R + dR$. Sa partie principale est donc

$$dU = 2\sigma \cdot dV,$$

σ étant l'aire de la calotte sphérique de rayon x centrée sur la surface de la sphère (S) et intérieure à (S).

Comme U est nul pour $x = 2R$, nous voyons que

$$U = 2 \int_{\frac{x}{2}}^R \sigma \frac{dV}{d\rho} d\rho.$$

Or nous avons dans l'espace à m dimensions :

$$V(\rho) = \frac{(\pi\rho^2)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)}, \quad \frac{dV}{d\rho} = \frac{2\pi\rho(\pi\rho^2)^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Il suffit de remplacer ρ par x dans l'expression précédente de $\frac{dV}{d\rho}$ pour avoir la surface Σ de la sphère de rayon x . Quant à la calotte σ , son aire a pour valeur

$$\sigma = \frac{(\pi x^2)^{\frac{m}{2}-1} \pi x}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \Phi\left(\frac{x}{\rho}\right)$$

avec

$$\Phi\left(\frac{x}{\rho}\right) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta} \sin^{m-2} \varphi d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} \varphi d\varphi},$$

l'angle θ étant défini par la condition

$$x = 2\rho \sin \theta.$$

Nous avons donc

$$U = \frac{4\pi^m x^{m-1}}{\left[\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\right]^2} \int_{\frac{x}{2}}^R \rho^{m-1} \Phi\left(\frac{x}{\rho}\right) d\rho$$

et par conséquent

$$(1) \quad p = \frac{U}{V^2} = \frac{m^2 x^{m-1}}{R^{2m}} \int_{\frac{x}{2}}^R \rho^{m-1} \Phi\left(\frac{x}{\rho}\right) d\rho.$$

Une nouvelle intégration donne l'expression générale suivante pour P :

$$(2) \quad P = \frac{m^2}{R^{2m}} \int_0^a \int_{\frac{x}{2}}^R (\rho x)^{m-1} \Phi\left(\frac{x}{\rho}\right) d\rho dx.$$

[33] Le calcul est donc basé sur la détermination préalable de la fonction $\Phi\left(\frac{x}{\rho}\right)$, c'est-à-dire sur le calcul de l'intégrale

$$I = \int_0^{\arccos \frac{x}{2\rho}} \sin^{m-1} \varphi d\varphi,$$

l'intégrale J du dénominateur de $\Phi\left(\frac{x}{\rho}\right)$ étant bien connue en fonction de m .

Examinons d'abord les deux cas simples du cercle et de la sphère :

— Pour $m=2$, on a tout d'abord

$$\Phi\left(\frac{x}{\rho}\right) = 1 - \frac{2\theta}{\pi}$$

et

$$p = \frac{4x}{R^4} \int_{\frac{x}{2}}^R \left(1 - \frac{2\theta}{\pi}\right) \rho d\rho.$$

Posons $x = 2R \sin \alpha$ et intégrons par parties. Nous avons :

$$p = \frac{2x}{R^3} \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) - \frac{x^2}{\pi R^4} \sqrt{4R^2 - x^2}.$$

Le calcul s'achève sans difficulté en utilisant α comme variable d'intégration. On obtient en posant $a = 2R \sin \lambda$:

$$(3) \quad P = \frac{\pi a^2 + 2\lambda(R^2 - a^2) - (2R^2 + a^2) \sin \lambda \cos \lambda}{\pi R^2},$$

— Pour $m = 3$, le calcul est particulièrement simple. On a

$$\Phi\left(\frac{x}{\rho}\right) = 1 - \frac{2x}{\rho},$$

donc

$$p = \frac{9x^2}{R^6} \int_{\frac{x}{2}}^R \rho^2 \left(1 - \frac{2x}{\rho}\right) d\rho = \frac{3x^2}{R^3} - \frac{9x^3}{4R^4} + \frac{3x^3}{16R^6},$$

ce qui conduit à

$$(4) \quad P = \frac{a^3}{R^3} - \frac{9}{16} \frac{a^4}{R^4} + \frac{1}{32} \frac{a^6}{R^6}.$$

Il est à peine nécessaire de remarquer que les expressions (3) et (4) s'annulent avec a et prennent la valeur 1 pour $a = 2R$.

Le calcul peut s'achever dans le cas le plus général, puisqu'on sait développer $\sin^{m-2} \varphi$ suivant les sinus et cosinus des arcs multiples de φ . Mais les résultats sont plus simples pour les *valeurs impaires* de m que pour les valeurs paires.

On peut en effet toujours exprimer, dans ce cas, la fonction $\Phi\left(\frac{x}{\rho}\right)$ sous forme entière en $\frac{x}{\rho}$. Et P est un polynôme de degré $2m$ en $\mu = \frac{a}{R}$. Les résultats sont les suivants pour les cas les plus simples :

$$m = 5. \quad P = \frac{1}{2^5} [512\mu^5 - 400\mu^4 + 50\mu^3 - 3\mu^{10}].$$

$$m = 7. \quad P = \frac{1}{2^{12}} [4.096\mu^7 - 3.920\mu^8 + 784\mu^{10} - 98\mu^{12} + 5\mu^{14}].$$

Ces deux valeurs de P sont, comme il convient, nulles pour $\mu = 0$ et égales à 1 pour $\mu = 2$.

[34] Il peut être intéressant de connaître l'allure de la fonction $\Phi\left(\frac{x}{\rho}\right)$ pour m très grand, de l'ordre de grandeur des nombres qui interviennent dans les théories moléculaires (*).

(*) Borel, *Introduction géométrique à quelques théories physiques*, pp. 55 et suiv.

Le rapport $\frac{J-I}{J}$, si $\Phi = \frac{I}{J}$, admet pour valeur asymptotique

$$\Theta \left[\frac{1}{2} \frac{x}{\rho} \sqrt{\frac{m-3}{2}} \right]$$

en désignant par $\Theta(u)$ la fonction

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-u^2} du.$$

Dans ces conditions, comme le minimum de $\frac{x}{\rho}$ est $\frac{x}{R}$, nous voyons que la fonction Φ reste très petite tant que $\frac{x}{R}$ n'est pas lui-même extrêmement petit. D'une manière précise, il faut que $\frac{x}{R}$ soit inférieur à 10^{-11} , en prenant $m = 10^{24}$, pour que Φ dépasse 10^{-10} .

Il s'ensuit que la courbe

$$y = p \left(\frac{x}{R} \right) \quad (\text{fig. 1})$$

reste extrêmement voisine de l'axe ox , sauf pour les valeurs très petites de l'argument $\frac{x}{R}$. Et par conséquent que P est presque égal à 1 dès que a dépasse les valeurs de l'ordre de $R \cdot 10^{-10}$.

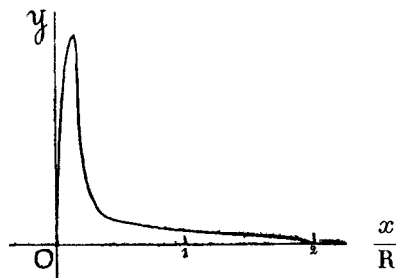


FIG. 1.

La valeur moyenne de AB tend donc vers zéro quand m devient très grand. Ce résultat est à comparer avec ceux indiqués par M. Borel, dans l'ouvrage cité plus haut, au sujet de la configuration d'un domaine sphérique dans l'espace à un très grand nombre de dimensions.

[35] Dans l'exemple que nous venons d'étudier, le domaine (D) est sphérique, la variation envisagée résulte simplement d'un accroissement dR du rayon de la sphère, et les calculs qui en résultent sont de simples intégrations.

On peut se placer d'une manière plus générale au point de vue du Calcul fonctionnel et considérer P comme une fonction de l'hypersurface qui limite le domaine (D).

Dans ce qui suit, nous traiterons de questions pour lesquelles les conditions imposées à la figure (F) sont des conditions *intrinsèques*, c'est-à-dire dépendant seulement de la figure (F) elle-même et demeurant tout à fait indépendantes du domaine (D). Si par exemple la figure (F) est déterminée par deux points A, B intérieurs à une courbe (C) dans le plan, la condition que leur distance est inférieure à a est une condition intrinsèque; mais la condition que le cercle de diamètre AB est tout entier intérieur à la courbe (C) n'est pas une condition intrinsèque.

[36] Considérons dans ces conditions un domaine (D') contenant à son intérieur le domaine (D) : soit V le volume de (D) et V + ΔV le volume de (D'). Examinons ce que l'on peut dire de la variation ΔP de P lorsque l'on passe de (D) à (D').

On a :

$$P + \Delta P = \frac{U + \Delta U}{(V + \Delta V)^n}.$$

Le nouveau numérateur U + ΔU se compose de la mesure des cas favorables qu'il est possible de constituer en prenant :

- n points dans le domaine (D),
- n - 1 points dans (D) et 1 point dans le domaine additionnel (D'') de volume ΔV,
- n - 2 points dans (D) et 2 points dans (D'').
- n points dans (D'').

On a ainsi

$$\Delta U = U_1 + U_2 + \dots + U_n.$$

Or, soit P_k la probabilité de réalisation des conditions du problème par une figure (F) qui serait formée de n - k points pris au hasard dans (D) et de k points pris au hasard dans (D''). On a

$$U_k = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} P_k V^{n-k} (\Delta V)^k.$$

D'où la relation :

$$(P + \Delta P)(V + \Delta V)^n = P \cdot V^n + nP_1 V^{n-1} \Delta V + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} P_k V^{n-k} (\Delta V)^k + \dots + P_n (\Delta V)^n$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$(5) \quad (V + \Delta V)^n \Delta P = nV^{n-1} \Delta V(P_1 - P) + \frac{n(n-1)}{2} V^{n-2} (\Delta V)^2 (P_2 - P) \\ + \dots + (\Delta V)^n (P_n - P).$$

Imaginons que ΔV soit infiniment petit. Alors la formule (5) permet de développer ΔP suivant les puissances de ΔV . Et la *partie principale* de ΔP est

$$(6) \quad \delta P = n(P_1 - P) \frac{\delta V}{V}.$$

Cette formule fondamentale est indiquée par Crofton dans l'article *Probability* rédigé pour la 9^e édition de l'*Encyclopædia britannica*.

[37] La formule (6) est susceptible de rendre de grands services en ce qui concerne le calcul de P , qu'elle permet de ramener d'une manière plus ou moins simple à celui de P_1 .

Il existe une catégorie de problèmes particulièrement intéressants dans cet ordre d'idées. Ce sont ceux pour lesquels on sait construire le domaine (D') de telle façon que P reste inchangé. Il résulte alors de la formule (6) que

$$P = P_1.$$

Le plus connu des problèmes de cette espèce est celui du *quadrilatère convexe* de Sylvester. C'est, historiquement, le premier problème de probabilités géométriques qui ait été posé sous une forme assez générale depuis le problème de l'aiguille.

Son énoncé est le suivant :

Étant donné un domaine convexe dans le plan, quelle est la probabilité pour que quatre points pris au hasard dans ce domaine forment un quadrilatère convexe ?

Le problème a été résolu dans quelques cas simples (*) par Sylvester lui-même et ses élèves. J'ai obtenu quelques résultats nouveaux en reprenant la question d'après les mêmes principes.

(*) Crofton, dans l'article cité au paragraphe 36, indique les résultats pour le triangle, le parallélogramme, l'hexagone régulier et le cercle. Les solutions ont paru dans l'*Educational Times*, que je n'ai pas réussi à me procurer.

[38] Désignons par A, B, C trois points pris au hasard dans le domaine considéré. La probabilité pour qu'un quatrième point, pris au hasard indépendamment des trois premiers, tombe dans le triangle ABC est égale au rapport de l'aire ABC à l'aire S du domaine. Si T est l'aire moyenne de ABC, la probabilité d'un quadrilatère concave sera, en vertu du principe des probabilités totales, égale à $4 \frac{T}{S}$. Donc nous aurons pour la probabilité P d'un quadrilatère convexe

$$P = 1 - 4 \frac{T}{S}.$$

Il est facile de construire un accroissement infinitésimal de (D) tel que P ne change pas; il suffit par exemple de faire subir à tous les points une transformation du type

$$(7) \quad \begin{cases} X = ax + by + e, \\ Y = cx + dy + f, \end{cases}$$

transformation qui multiplie T et S par le même facteur constant; il est toujours possible de déterminer l'opération de manière que le nouveau contour de (D) entoure le contour primitif.

Nous aurons dans ces conditions :

$$P = P_1 = 1 - 3 \frac{T_1}{S}$$

en désignant par T_1 l'aire moyenne d'un triangle qui aurait deux sommets à l'intérieur de (D), et un sommet dans la portion du plan qui constitue l'accroissement infiniment petit de (D).

Tout se ramène donc au calcul de T_1 ; et ce calcul exige d'abord la détermination de l'aire moyenne ABC dans le cas où le sommet A est fixe sur le contour de (D).

[39] Le calcul de cette aire moyenne τ est en principe fort simple dans le cas d'un domaine polygonal. En joignant le point A aux sommets du polygone, nous décomposons celui-ci en $n - 1$ triangles d'aires S_1, S_2, \dots, S_{n-1} .

Désignons, dans ces conditions, par τ_i la valeur moyenne de l'aire ABC lorsque les sommets B et C sont tous deux dans le triangle de rang i , et par τ_{ij} la valeur moyenne de cette aire lorsque les sommets B et C sont respectivement dans les triangles de rangs i et j .

Nous avons la relation fondamentale :

$$(8) \quad S^2 \tau = \sum_{i=1}^{i=n-1} S_i^2 \tau_i + 2 \sum_{i,j=1}^{i,j=n-1} S_i S_j \tau_{ij}$$

qui ramène la question au calcul des moyennes élémentaires τ_i et τ_j . Le théorème des moments indique immédiatement que τ_j est l'aire du triangle AG_iG_j , dont les sommets G_i et G_j sont les centres de gravité des triangles de rang i et de rang j .

Quant à τ_i , il est clair que c'est une quantité proportionnelle à S_i . Étant donné deux triangles dans le plan, on peut en effet toujours passer de l'un à l'autre en utilisant une opération du type (7).

On a donc $\tau_i = \lambda S_i$, λ étant un nombre à déterminer.

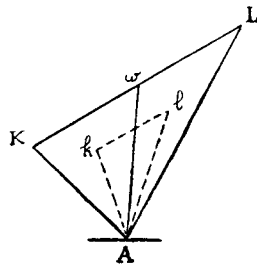


FIG. 2.

Or, soit AKL le triangle de rang i ; et soit ω le milieu du côté KL . Appliquons la relation fondamentale (8) au triangle AKL , somme des triangles $A\omega K$, $A\omega L$, nous avons :

$$S_i^3 \cdot \lambda S_i = 2 \cdot \left(\frac{S_i}{2}\right)^2 \cdot \lambda \frac{S_i}{2} + 2 \cdot \frac{S_i}{2} \cdot \frac{S_i}{2} \cdot Akl.$$

k et l étant les centres de gravité des deux triangles partiels. On a

$$Akl = \frac{2}{9} S_i$$

et

$$\lambda = \frac{4}{27},$$

d'où

$$\tau_i = \frac{4}{27} S_i.$$

Les valeurs de P relatives à quelques domaines simples et données dans l'*Educational Times* sont :

$$\text{Triangle : } P = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Parallélogramme : } P = \frac{25}{36}.$$

$$\text{Hexagone régulier : } P = \frac{683}{97^2}.$$

Nous allons traiter la question dans le cas le plus général d'un quadrilatère, et discuter le résultat suivant la forme du quadrilatère considéré.

[40] Nous pouvons d'abord transformer, par une opération linéaire du type (7), le quadrilatère proposé en celui de la figure (3), formé des sommets O, A₁, A₂, A₃ tels que les coordonnées de A₁, A₂, A₃ sont, par rapport aux axes ox, oy :

$$A_1 : x = 1, y = 0;$$

$$A_2 : x = a, y = b; \quad (a > 0, b > 0);$$

$$A_3 : x = 0, y = 1.$$

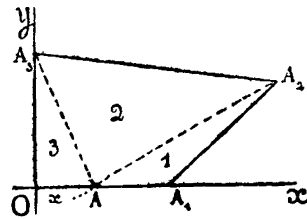


FIG. 3.

Cela posé, fixons sur le côté OA₁ un point A ($\overline{OA} = x$) et calculons l'aire moyenne τ correspondant à ce point par la méthode indiquée au paragraphe 40.

Nous avons

$$\left. \begin{aligned} \text{aire } A_1 A A_2 &= S_1 = \frac{1}{2} b(1-x) \\ \text{aire } A_2 A A_3 &= S_2 = \frac{1}{2} [(b-1)x + a] \\ \text{aire } A_3 A O &= S_3 = \frac{1}{2} x \end{aligned} \right\} S_1 + S_2 + S_3 = S = \frac{a+b}{2},$$

d'où les quantités τ_1, τ_2, τ_3 .

Nous avons ensuite :

$$\tau_{12} = \frac{1}{18}(1 + a + b - 2x),$$

$$\tau_{13} = \frac{1}{18}(2bx - 2x + a + 1),$$

$$\tau_{23} = \frac{1}{18}(2bx + a).$$

D'où la valeur de τ par la relation :

$$(9) \quad \frac{(a+b)^2}{4} \tau = \frac{4}{27} [S_1^3 + S_2^3 + S_3^3] + 2S_1 S_2 \tau_{12} + 2S_1 S_3 \tau_{13} + 2S_2 S_3 \tau_{23}.$$

Lorsque le point A varie de O à A_1 , l'aire τ a une valeur moyenne

$$\tau_b = \int_0^1 \tau dx.$$

On calcule de la même façon la valeur moyenne τ_a du triangle ABC lorsque le sommet A varie sur le côté OA : il suffit d'ailleurs d'échanger a et b pour passer de τ_b à τ_a .

[41] Cela posé, remarquons qu'une homothétie de rapport $1 + \delta t$ ne change pas P. Si nous faisons cette homothétie avec A_1 pour pôle, nous sommes ramenés au calcul de l'aire moyenne T_1 , comme il est indiqué plus haut, avec

$$(10) \quad T_1 = \frac{a\tau_a + b\tau_b}{a+b}.$$

Le calcul est immédiat étant donné les déterminations préalables de τ_1 , τ_2 , τ_3 et de τ_{12} , τ_{13} , τ_{23} . Le résultat est

$$(11) \quad P = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} \frac{ab(a+b-1)}{(a+b)^2}.$$

Le quadrilatère étant convexe, on a

$$a + b - 1 > 0$$

et par suite P est la somme de $\frac{2}{3}$ et d'une quantité positive. Cette dernière quantité ne s'annule que si le quadrilatère se réduit à *un triangle* : et nous retrouvons bien la valeur de P qui convient à ce dernier domaine.

[42] La méthode la plus simple pour discuter les valeurs de P consiste, en remplaçant a et b par des coordonnées courantes, à construire le lieu géométrique du quatrième sommet A_4 lorsque sont donnés les trois premiers sommets et la valeur de P. Les courbes obtenues forment un faisceau d'équation générale :

$$(12) \quad (x + y)^4 = \lambda xy(x + y - 1),$$

parmi lesquelles seules nous intéressent celles qui correspondent à $\lambda > 0$.

Coupons la courbe (12) par la droite

$$x + y = \mu.$$

Les deux points d'intersection, symétriques par rapport à la première bissectrice, auront des coordonnées racines de l'équation

$$X^2 - \mu X + \frac{\mu^4}{\lambda(\mu - 1)} = 0.$$

Ils ne seront réels que si, pour λ donné, μ est compris entre les racines μ' μ'' de l'équation

$$\varphi(\mu) = 4\mu^2 - \lambda\mu + \lambda,$$

et celles-ci ne sont réelles que pour $\lambda > 16$. Le maximum de P correspond au minimum de λ : pour $\lambda = 16$ on a $\mu' = \mu'' = 2$; le point A_2 est alors le quatrième sommet ω du carré construit sur OA_1 et OA_3 : la valeur correspondante de P est $\frac{25}{36}$.

Les diverses valeurs de λ donnent des courbes fermées qui entourent le point ω : sur chacune d'elles, les sommets σ_1 σ_2 sont conjugués harmoniques par rapport à O et ω : σ_2 s'éloigne indéfiniment quand σ_1 se rapproche de la droite $A_1 A_3$.

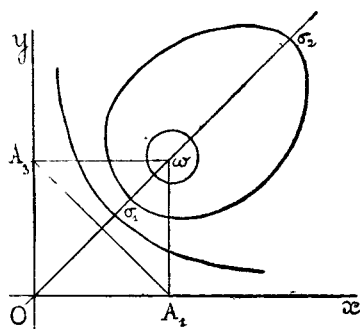


FIG. 4.

Il est clair qu'on pourrait dessiner un réseau de courbes analogue à celui de la figure (4) en partant de trois sommets O, A_1 , A_3 absolument quelconques. Une projection oblique permettrait de passer de l'un à l'autre réseau.

La valeur

$$P = \frac{25}{36}$$

relative au point ω est donc valable pour tous les parallélogrammes. Et on voit que P , pour un quadrilatère quelconque, est compris entre la valeur $\frac{2}{3}$ relative au triangle et la valeur $\frac{25}{36}$ relative à un parallélogramme.

[43] Parmi les domaines polygonaux à plus de quatre sommets, ce sont les domaines réguliers qui donnent évidemment les calculs les plus simples. La probabilité P reste en effet inchangée par une homothétie centrale de rapport $1 + \delta t$. Et pour le calcul de T_1 , on peut se borner à prendre la valeur moyenne de $\tau(x)$ lorsque A décrit un côté du polygone, x étant l'abscisse de A le long de ce côté.

Si, passant à la limite, nous envisageons le cas d'un domaine circulaire, τ est constant le long de la circonférence, et l'on a

$$P = 1 - 3 \frac{\tau}{S}.$$

On obtient ainsi le résultat

$$P = 1 - \frac{35}{12\pi^2}$$

indiqué dans tous les ouvrages qui traitent de la question.

Nous sommes ainsi conduits à considérer les valeurs de P relatives aux polygones réguliers comme des valeurs approchées de la quantité $1 - \frac{35}{12\pi^2}$: les résultats déjà indiqués, dans les cas du triangle, du carré, et de l'hexagone régulier fournissent les valeurs approchées rationnelles suivantes pour π^2 :

$$\frac{5 \cdot 7}{4}, \quad \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{11}, \quad \frac{5 \cdot 7 \cdot 9^2}{17^2}.$$

Ces polygones sont à la vérité les plus simples : nous allons constater, par le cas de l'octogone régulier, que les valeurs de P ne demeurent pas rationnelles lorsqu'on augmente le nombre de côtés.

[44] Soit le point A d'abscisse x sur le côté $OA_1 = a$ d'un octogone régulier. Formons, en joignant le point A aux sommets non adjacents, les sept triangles numérotés de 1 à 7 sur la figure (5). Leurs aires ont pour valeurs en posant $a\sqrt{2} = b$:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{4} b(a-x), & S_4 &= \frac{1}{4} 2a(a+b), \\ S_2 &= \frac{1}{4} a(b+2a-2x), & S_5 &= \frac{1}{4} b(x+a+b), \\ S_3 &= \frac{1}{4} b(2a+b-x), & S_6 &= \frac{1}{4} a(b+2x), \\ S_7 &= \frac{1}{4} bx, & S &= \Sigma S_i = 2a(a+b). \end{aligned}$$

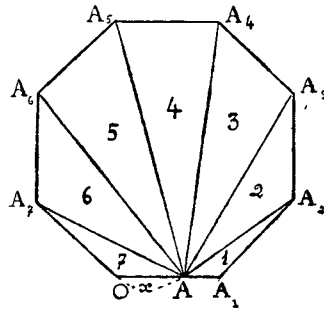


FIG. 5.

Les valeurs de τ_{ij} à calculer se réduisent, pour des raisons visibles de symétrie, aux douze suivantes :

$$\begin{array}{l|l} \tau_{67} = \frac{1}{36} [ab + 2x(2a + b)], & \tau_{46} = \frac{1}{36} [(a + b)(4x + 4b + 2a)], \\ \tau_{57} = \frac{1}{36} [(2a + b)(4x + b)], & \tau_{36} = \frac{1}{36} [2x(2a + b) + 3b(3a + 2b)], \\ \tau_{47} = \frac{1}{36} [(2x + a)(3b + 4a)], & \tau_{45} = \frac{1}{36} [2bx + 4b^2 + 5ab], \\ \tau_{37} = \frac{1}{36} [(2x + b)(2b + 4a)], & \tau_{17} = \frac{1}{36} [b(2a + b)], \\ \tau_{27} = \frac{1}{36} [2x(2a + b) + b(3a + 2b)], & \tau_{26} = \frac{1}{36} [4(a + b)^2], \\ \tau_{26} = \frac{1}{36} [2x(2a + b) + b(3a + 2b)], & \tau_{35} = \frac{1}{36} [b(7b + 10a)]. \end{array}$$

Dans ces conditions, T_1 est donné par l'équation :

$$(13) \quad S^2 T_1 = \frac{1}{a} \int_0^a \left\{ \frac{4}{27} [2S_1^3 + 2S_2^3 + 2S_3^3 + S_4^3] + 4[S_6 S_7 \tau_{67} + \dots + S_4 S_8 \tau_{48}] \right. \\ \left. + 2[S_1 S_2 \tau_{12} + S_2 S_6 \tau_{26} + S_3 S_5 \tau_{35}] \right\} dx.$$

Le second membre se présente ainsi comme la somme $\alpha + \beta + \gamma$ de trois quantités : on trouve

$$\alpha = \frac{a^3}{54} (18a + 13b),$$

$$\beta = \frac{a^3}{432} (1766a + 1310b),$$

$$\gamma = \frac{a^3}{216} (226a + 160b),$$

d'où finalement

$$P = \frac{2851 + 2013\sqrt{2}}{4032 + 2880\sqrt{2}},$$

soit 0,703, à un millièmè près : pour le cercle, on a $P = 0,704$, et pour l'hexagone $P = 0,702$.

CHAPITRE V

[45] Revenons au problème général sur une figure (F) formée de n points pris au hasard à l'intérieur d'un domaine (D) : nous désignons par P la probabilité pour que (F) réalise certaines conditions intrinsèques.

Bornons-nous au cas simple d'un domaine (D) à deux dimensions, comprenant les points intérieurs à une courbe (C) : P est une *fonction de ligne* au sens de *M. Volterra*. Nous écrivons

$$P = f[(C)].$$

Par hypothèse, nous aurons affaire à des courbes (C) fermées limitant des domaines (D) d'un seul tenant. Nous pourrions définir chaque point M de (C) par son abscisse curviligne s ; il peut même être avantageux dans certains cas d'introduire le paramètre angulaire

$$\varphi = 2\pi \frac{s}{L},$$

L désignant la longueur totale de (C). Les coordonnées x et y du point M sont alors des fonctions périodiques, de période 2π , de l'argument φ ainsi défini. Soit S l'aire du domaine D; la formule fondamentale (6) du paragraphe 36 s'écrit si nous envisageons l'accroissement δS délimité entre (C) et une courbe extérieure (C') infiniment voisine :

$$(1) \quad \delta P = n(P_1 - P) \frac{\delta S}{S}.$$

Imaginons que (C') coïncide partout avec (C), sauf dans le voisinage d'un point déterminé M, de paramètre φ sur (C). Le rapport $\frac{\delta P}{\delta S}$ a pour limite, lorsque δS tend vers zéro sans cesser d'englober le point M, la quantité

$$\frac{n}{S} (p_1 - P),$$

où p_1 désigne la probabilité de réalisation des conditions du problème par une figure (F) qui serait formée du point M et de $n - 1$ points pris au hasard à l'intérieur de (C).

Cette limite est, au sens de M. Volterra, la *dérivée* de P au point M. On a avec les notations de M. Volterra :

$$(2) \quad P'[(C), \varphi] = \frac{n}{S} [p_1(\varphi) - P],$$

Soit maintenant une ligne (C') infiniment voisine de (C) mais intérieure à (C). Des considérations analogues à celles du paragraphe 36 permettent d'écrire, en désignant par $P + \Delta P$ la probabilité relative à (C') et par $S - \delta S$ l'aire intérieure à cette courbe :

$$P \cdot S^n = (P + \Delta P)(S - \delta S)^n + nP_1(S - \delta S)^{n-1}\delta S + \dots,$$

d'où, pour la partie principale de ΔP :

$$\delta P = -\frac{n}{S}(P_1 - P)\delta S,$$

formule identique à la formule (6) dans laquelle on considérerait δS comme négatif.

Il résulte de là que la notion de *dérivée au point M* définie plus haut est valable quelle que soit la déformation considérée de (C) dans le voisinage du point M, à la condition de compter négativement les éléments d'aire intérieurs à (C).

Aussi peut-on écrire, dans le cas le plus général d'une courbe (C') infiniment voisine de (C) [voisinage d'ordre zéro] la formule :

$$(3) \quad \delta P = \delta t \int_0^{2\pi} P'[(C), \varphi] G(\varphi) d\varphi,$$

la valeur de la fonction $G(\varphi)$ étant telle, en chaque point M de (C), que l'on ait :

$$G(\varphi)\delta t = \frac{L}{2\pi} \delta\varphi,$$

$\delta\varphi$ étant la portion MM' de la normale à (C) au point M, comptée positivement vers l'extérieur.

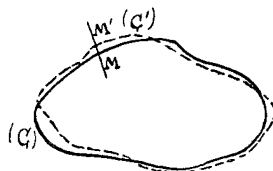


FIG. 6.

Cette expression (3) est celle de la *première variation* de P. Une courbe (C) étant donnée, les lignes (C') infiniment voisines qui annulent δP sont définies par l'équation

$$\int_0^{2\pi} P'(\varphi) G(\varphi) d\varphi = 0.$$

Elles forment un ensemble de puissance supérieure à celle du continu, qui cependant ne comprend pas la totalité des courbes (C') infiniment voisines de (C), à moins que l'on n'ait

$$P'[(C), \varphi] \equiv 0.$$

Les lignes (C) qui réalisent cette condition sont des *courbes extrémales* pour le problème considéré. On a, tout le long d'une telle courbe,

$$p_1(\varphi) = \text{const} = P.$$

[46] Cette propriété n'entraîne nullement l'existence des courbes extrémales pour un problème quelconque. Mais on peut trouver toute une classe de problèmes particuliers pour lesquels il est possible de déterminer certaines de ces courbes.

Ce sont par exemple ceux relatifs à n points pris dans un cercle, et dont le résultat est indépendant du rayon de ce cercle. On a en effet $p_1 = \text{const.}$ le long du cercle par raison de symétrie; et d'autre part cette constante est égale à P , puisque à une augmentation dR de R correspond, d'après la formule (3),

$$\delta P = 0 = \frac{n}{R} (p_1 - P) dR.$$

Le problème de Sylvester satisfait à ces deux conditions : les cercles du plan, et aussi toutes les ellipses, puisque toute ellipse est évidemment transformable en un cercle par une projection cylindrique oblique, sont des courbes extrémales vis-à-vis de ce problème. Effectivement, la valeur $P = 1 - \frac{35}{12\pi^3}$ relative au cercle est la plus grande des valeurs calculées : elle dépasse de quelques millièmes celles relatives aux polygones réguliers que nous avons considérés. L'extremum est donc vraisemblablement un *maximum*.

[47] En ce qui concerne le cas d'un domaine triangulaire, nous avons constaté que la valeur correspondante $P = \frac{2}{3}$ est un minimum parmi celles qui correspondent à des quadrilatères. Il est facile de constater, en appliquant la formule (3), que ce minimum est valable pour tous les domaines convexes, et que, de plus, ce n'est point un extremum, au sens des paragraphes précédents.

Considérons, en effet, l'accroissement δS ajouté à l'aire du triangle $A_1 A_2 A_3$ par la substitution au côté $A_2 A_3$ de l'arc $A'_2 A'_3$, convexe et extérieur au triangle.

Posons

$$\overline{A_2 A_3} = x,$$

nous aurons

$$AA' = G(x) \delta t.$$

Or soient

$$A_2 A_3 = a, \quad A_1 H = h.$$

Nous pouvons écrire avec les notations du chapitre IV :

$$\tau(x) = \frac{h}{2a^3} \left[\frac{4}{27} x^3 + \frac{4}{27} (a-x)^3 + \frac{2}{9} ax(a-x) \right] = \frac{h}{2a^3} \psi(x).$$

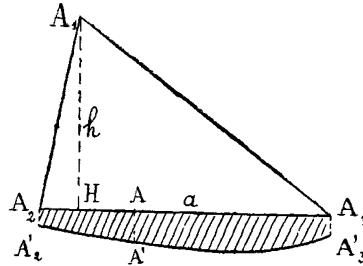


FIG. 7.

D'où

$$p_1 = 1 - \frac{3\tau}{S} = 1 - \frac{3}{a^3} \psi(x)$$

et par conséquent, comme $P = \frac{2}{3}$,

$$P' = \frac{6}{ah} \left[\frac{1}{3} - \frac{3}{a^3} \psi(x) \right],$$

ce qui permet d'exprimer δP sous la forme suivante :

$$\delta P = \frac{6 \delta t}{ah} \int_0^a \left[\frac{1}{3} - \frac{3}{a^3} \psi(x) \right] G(x) dx.$$

Je dis que, moyennant l'hypothèse que l'arc $A'_2 A'_3$ est convexe, on a $\delta P \geq 0$.

Cela revient à démontrer, en effet, que

$$(4) \quad \frac{a^3}{9} \int_0^a G(x) dx \geq \int_0^a G(x) \psi(x) dx.$$

Or, faisons le changement de variable

$$\xi = \frac{x}{a} - \frac{1}{2}$$

et soit

$$G(x) = U(\xi).$$

Nous avons

$$\psi(x) = \frac{a^3}{54} (12\xi^2 + 5).$$

Et l'inégalité (4) à démontrer prend la forme :

$$(5) \quad 6 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} U(\xi) d\xi \geq \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (12\xi^2 + 5)U(\xi) d\xi$$

ou encore

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (12\xi^2 + 5) d\xi \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} U(\xi) d\xi \geq \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (12\xi^2 + 5)U(\xi) d\xi.$$

Posons

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} (12\xi^2 + 5) d\xi \int_{-\alpha}^{+\alpha} U(\xi) d\xi - \int_{-\alpha}^{+\alpha} (12\xi^2 + 5)U(\xi) d\xi;$$

nous avons en dérivant :

$$\Phi'(\alpha) = 8\alpha \left[\int_{-\alpha}^{+\alpha} U(\xi) d\xi - \alpha[U(\alpha) + U(-\alpha)] \right]$$

Or, il résulte de l'hypothèse faite sur la convexité de l'arc $A'_2 A'_3$ (fig. 7) que dans le plan des axes $O\xi, O\eta$, la courbe

$$\eta = U(\xi)$$

possède la propriété d'avoir sa concavité dirigée vers l'axe $O\xi$.

On a, dans ces conditions (fig. 8), si M et M' ont pour abscisses $+\alpha, -\alpha$:

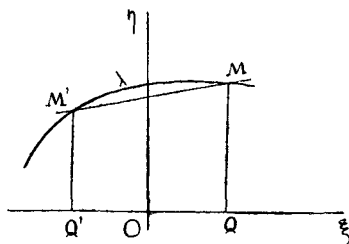


FIG. 8.

$$\text{Aire mixtiligne } QM\lambda M'Q' \geq \text{Aire du trapèze } QMM'Q'$$

pour toutes les valeurs de α comprises entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$.

Il s'ensuit que

$$\Phi'(\alpha) \geq 0,$$

donc que $\Phi\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$ puisque $\Phi(0) = 0$.

Le signe \geq ne devient celui de l'égalité que si les aires envisagées plus haut sur la figure (8) sont identiques, c'est-à-dire si $\Lambda'_2 A'_3$ est une droite. Le triangle conserve alors sa qualité de triangle.

Cette propriété est indiquée comme seulement vraisemblable par Crofton et par Czuber qui sont les auteurs classiques ayant traité le problème. Elle présente la particularité importante, qui la distingue de celle du cercle, de n'être pas une propriété extrémale, mais de correspondre à un minimum véritable réalisé par le triangle parmi les domaines convexes.

[48] Revenons au problème général défini au paragraphe 36. La formule (5) de ce paragraphe nous a permis, en considérant la partie principale δP de ΔP , de définir la dérivée première

$$P'[(C), \varphi] = \frac{n}{S} [p_1(\varphi) - P]$$

et d'aboutir à la formule fondamentale

$$(3) \quad \delta P = \delta t \int_0^{2\pi} P'[(C), \varphi] G(\varphi) d\varphi.$$

Considérons la dérivée P' au point M_1 de paramètre φ_1 sur (C) . Et faisons subir au domaine (D) un accroissement δS dans le voisinage immédiat du point M_2 de paramètre φ_2 . Nous aurons

$$P'\delta S + S\delta P' = n(\delta p_1 - \delta P).$$

Or, les parties principales de δp_1 et δP sont, d'après la formule (5) du paragraphe 36 :

$$\delta p_1 = \frac{n-1}{S} (p_{12} - p_1)\delta S,$$

$$\delta P = \frac{n}{S} (p_2 - P)\delta S,$$

p_2 étant la valeur de P obtenue avec un des n points constituant (F) immobilisé en M_2 , et p_{12} la même valeur obtenue avec deux points immobilisés, l'un en M_1 et l'autre en M_2 .

On a donc

$$S^2 \frac{\delta P'}{\delta S} = n(n-1)(p_{12} - p_1) - n^2(p_2 - P) - n(p_1 - P),$$

de sorte que la limite de $\frac{\delta P'}{\delta S}$, quand δS tend vers zéro, est

$$\frac{1}{S^2} [n(n-1)p_{12} - n^2(p_1 + p_2) + n(n+1)P].$$

Cette quantité est, au sens du Calcul fonctionnel, la dérivée seconde

$$P''[(C), \varphi_1, \varphi_2]$$

et on a

$$P''[(C), \varphi_1, \varphi_2] = \frac{n}{S^2} [(n-1)p_{12} - n(p_1 + p_2) + (n+1)P],$$

d'où il résulte en particulier que

$$P''[(C), \varphi_1, \varphi_2] = P''[(C), \varphi_2, \varphi_1].$$

Les dérivées d'ordre supérieur au second se définissent évidemment d'après les mêmes principes. Il serait intéressant de faire intervenir les dérivées successives dans le développement général de ΔP suivant les puissances de δt , et, en particulier, de faire le calcul de la *deuxième variation* $\delta^2 P$.

L'examen, à ce point de vue, du problème de Sylvester dans le cas du cercle permet d'apercevoir quelques-unes des difficultés de la question; c'est par ces quelques considérations que je terminerai.

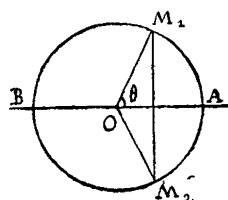


FIG. 9.

[49] Il est nécessaire de calculer d'abord la quantité p_{12} . Or, on a, dans le cas actuel :

$$p_{12} = 1 - \frac{2T}{S}$$

en désignant par T l'aire moyenne du triangle MM_1M_2 lorsque le point M varie d'une manière quelconque à l'intérieur du cercle, les points M_1 et M_2 demeurant fixes sur ce cercle (*fig. 9*).

Soit 2θ l'angle, moindre que π , des deux rayons OM_1, OM_2 : désignons par T_1 l'aire moyenne du triangle MM_1M_2 quand M reste dans le segment circulaire M_1AM_2 d'aire S_1 : soit T_2 l'aire moyenne lorsque M est dans le segment M_1BM_2 d'aire S_2 .

On a

$$TS = T_1S_1 + T_2S_2.$$

Or, T_1 et T_2 sont respectivement les aires des triangles de base M_1M_2 ayant pour sommets les centres de gravité G_1, G_2 des aires S_1 et S_2 . On obtient en prenant pour unité le rayon du cercle O :

$$T_1 = \frac{2 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 3\theta \sin \theta \cos \theta}{3(\theta - \sin \theta \cos \theta)},$$

$$T_2 = \frac{2 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 3(\pi - \theta) \sin \theta \cos \theta}{3(\pi - \theta + \sin \theta \cos \theta)}.$$

D'où

$$(4) \quad p_{1s} = 1 - \frac{2}{3\pi^2} [4 \sin^2 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 3(\pi - 2\theta) \sin \theta \cos \theta].$$

Comme première application de ce calcul, imaginons que le rayon du cercle (O) passe de 1 à $1 + \delta t$. Les considérations du paragraphe 36 permettent d'écrire :

$$(5) \quad (S + \delta S)^4 (P + \Delta P) = P \cdot S^4 + 4S^3 P_1 \delta S + 6S^2 P_2 (\delta S)^2 + 4S \cdot P_3 (\delta S)^3 + P_4 (\delta S)^4.$$

Comme ΔP est nul dans le cas actuel, la relation (5) doit fournir une identité en δt .

La *partie principale* de P_1 est P : on a

$$P_1 = P + 2\delta t + \dots$$

Quant à P_2 , sa partie principale est la valeur moyenne de p_{1s} tiré de (4) :

soit

$$P_2 = 1 - \frac{4}{3\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2 \sin^2 \theta + 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 3(\pi - 2\theta) \sin \theta \cos \theta] d\theta,$$

ce qui donne, tous calculs faits :

$$P_2 = 1 - \frac{2}{\pi^2}.$$

On a par conséquent :

$$(1 + \delta t)^3 P = P + 4(2\delta t + \delta t^2)(P + \alpha\delta t + \dots) + 6\left(1 - \frac{2}{\pi^2} + \dots\right)(2\delta t + \delta t^2)^2 + \dots$$

et l'identification des termes en δt^3 permet d'écrire :

$$28P = 4P + 8\alpha + 24\left(1 - \frac{2}{\pi^2}\right).$$

d'où, en remplaçant P par sa valeur :

$$\alpha = -\frac{22}{8\pi^2}.$$

Soit maintenant un accroissement du cercle (O) défini par la correspondance à chaque point M de paramètre φ sur ce cercle d'un point M' à une distance $G(\varphi)\delta t$ sur le rayon OM.

La partie principale de ΔP est du second ordre en δt , puisque $\delta P = 0$ d'après le paragraphe 46. Et cette partie $\delta^2 P$ se composera de deux termes, l'un provenant de la sommation des termes en δt dans P_1 , l'autre de la considération de p_{12} .

On aura d'une manière précise :

$$(6) \quad \delta^2 P = \left[-\frac{11}{\pi^3} \int_0^{2\pi} G^2(\varphi) d\varphi + \frac{6}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (p_{12} - P) G(\varphi_1) G(\varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 \right] \delta t^2.$$

