MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

C. E. TRAYNARD

PAUL PAINLEVÉ

Fonctions abéliennes et fonctions thêta de deux variables

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 151 (1962), p.

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1962__151__3_0>

FONCTIONS ABELIENNES
ET
FONCTIONS THETA DE DEUX VARIABLES

par

C. E. TRAYNARD
Professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Marseille

d'après un cours de
Paul PAINLEVÉ

Directeur : H. VILLAT

FASCICULE CLI

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1962

OUVRAGE DE L'AUTEUR

RISSER R., *Professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers*, et TRAYNARD C.-E., *Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille*.
Les Principes de la Statistique mathématique, (*Traité du calcul des Probabilités et de ses applications*, Tome I, Fasc. IV) 2e édition revue et augmentée. In-8 (16 25).

Livre I. *Séries Statistiques* : XVI-195 pages, 2 figures; 1957.

Livre II. *Corrélations. Séries Chronologiques* : XI-418 pages, 2 figures; 1958.

INTRODUCTION

Dans les premières années de ce siècle, le programme de la composition d'Analyse à l'Agrégation des Sciences mathématiques portait sur les fonctions elliptiques et leurs applications. La théorie de ces fonctions n'étant pas enseignée dans le cours de Calcul différentiel et intégral que professait Goursat à la Sorbonne, un Maître de conférences de l'École Normale Supérieure l'exposait aux élèves de l'École. C'est ainsi que P. Painlevé professa ce cours pendant l'année scolaire 1902-1903 aux élèves de deuxième année.

Les fonctions elliptiques furent introduites comme fonctions analytiques doublement périodiques d'une variable, procédé classique, exposé en particulier dans le Traité de Tannery et Molk. Un prolongement naturel conduisit Painlevé à traiter des fonctions analytiques de deux variables à quatre paires de périodes (fonctions abéliennes). C'est d'après l'exposé de Painlevé que sont donnés, dans les pages qui suivent, le théorème fondamental sur la représentation d'une fonction abélienne par le quotient de deux fonctions thêta avec l'introduction du diviseur M de la première période et les premières propriétés de l'inversion des radicaux portant sur un polynôme du 5e degré.

Ces développements n'étaient connus que par une Note aux *Compte-Rendus de l'Académie des Sciences*. Leur rédaction a été préparée en partie depuis longtemps; la parution a été retardée par des évènements divers. Je l'ai reprise sur les conseils de M. Garnier qui m'a assuré de son intérêt actuel. Je me suis efforcé, en revoyant mes notes, de respecter la suite des raisonnements de Painlevé; mais rien ne peut rendre l'impression de lumineuse intelligence, de pensée créactrice que donnait la parole du Maître.

CHAPITRE I

Définitions. Périodes

Cette étude des fonctions abéliennes (fonctions méromorphes quadruplement périodiques de deux variables) utilisera les principes de la théorie des fonctions analytiques de deux variables.

1. Définitions, Périodes. Fonction réductible. — Une fonction $f(u, v)$ de deux variables complexes est dite analytique par rapport aux deux variables si elle est analytique par rapport à chacune d'elles, l'autre étant constante. Elle admet la période complexe α, β si l'on a la relation

$$f(u + \alpha, v + \beta) = f(u, v).$$

En posant

$$U = au + bv + c, \qquad V = a'u + b'v + c', \qquad ab' - ba' \neq 0,$$

la fonction $f(u, v)$ est transformée dans la fonction $F(U, V)$ qui admet la période

$$A = a\alpha + b\beta \qquad B = a'\alpha + b'\beta.$$

Si, à la suite d'une telle transformation, la fonction F ne dépend que d'une variable, U par exemple, on dit que $f(u, v)$ est réductible; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi, est qu'il existe une relation linéaire entre les dérivées partielles du premier ordre de $f(u, v)$.

Soit, en effet, $f(u, v) = F(U)$, on en déduit

$$\frac{\partial f}{\partial u} = a\,F', \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = b\,F', \qquad b\frac{\partial f}{\partial u} - a\frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

La condition est donc nécessaire.

Supposons maintenant qu'on ait

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial u} + \mu \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

et posons

$$u = U + \lambda V, \qquad v = \mu V,$$

il en résulte que

$$\frac{\partial F}{\partial V} = \lambda \frac{\partial f}{\partial u} + \mu \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad , \quad f(u, v) = F(U).$$

La condition est donc suffisante.

Mettant maintenant en évidence les parties réelle et imaginaire des variables et de la fonction, nous posons

$$u = x + iy, \qquad v = z + it, \qquad f(u,v) = P(xy,z,t) + i\ Q(x,y,z,t).$$

Les conditions d'analyticité sont

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}\ , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}\ , \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial t}\ , \quad \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Si $f(u, v)$ admet la période

$$\alpha = a + ib, \qquad \beta = c + id,$$

chacune des fonctions P et Q admet la période réelle (a, b, c, d).

Si $f(u, v)$ est réductible, P et Q le sont certainement aussi. Supposons maintenant que P soit réductible : nous avons la relation

$$\lambda' \frac{\partial P}{\partial x} + \lambda'' \frac{\partial P}{\partial y} + \mu' \frac{\partial P}{\partial z} + \mu'' \frac{\partial P}{\partial t} = 0,$$

qui entraîne

$$\lambda' \frac{\partial Q}{\partial y} - \lambda'' \frac{\partial Q}{\partial x} + \mu' \frac{\partial Q}{\partial t} - \mu'' \frac{\partial Q}{\partial z} = 0.$$

Faisons la substitution

$$\begin{cases} u = U + (\lambda' + i\lambda'')V, \\ v = (\mu' + i\mu'')V; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = X + \lambda' Z - \lambda'' T, \\ y = Y + \lambda'' Z + \lambda' T, \\ z = \mu' Z - \mu'' T, \\ t = \mu'' Z + \mu' T, \end{cases}$$

P et Q deviennent $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ et nous avons

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial Z} = \lambda' \frac{\partial P}{\partial x} + \lambda'' \frac{\partial P}{\partial y} + \mu' \frac{\partial P}{\partial z} + \mu'' \frac{\partial P}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial T} = -\lambda'' \frac{\partial Q}{\partial x} + \lambda' \frac{\partial Q}{\partial y} - \mu'' \frac{\partial Q}{\partial z} + \mu' \frac{\partial Q}{\partial t} = 0.$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial F}{\partial V} = i \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial Z} = -i \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial T}$$

Or $\frac{\partial F}{\partial V}$ est une fonction analytique imaginaire pure, ce ne peut être qu'une constante ik; la fonction F est donc de la forme

$$\varphi(U) + ikV.$$

On ne peut donc dire que $f(u, v)$ est réductible en même temps que P et Q; mais, au point de vue qui nous occupe, celui des fonctions périodiques, il résulte de cette forme que F est périodique de seconde espèce et les conséquences à en déduire pour le nombre des périodes sont les mêmes que si k était nul.

2. Nombre de périodes. — Nous allons démontrer que la fonction $f(u, v)$ irréductible de deux variables complexes ne peut avoir plus de quatre périodes; pour cela, nous démontrerons que les fonctions réelles P et Q de quatre variables réelles ne peuvent avoir plus de quatre périodes réelles.

La démonstration sera faite dans le cas de trois variables pour utiliser le support de la géométrie; l'extension ne souffre aucune difficulté.

Les périodes seront représentées par des vecteurs; l'ensemble des extrémités de ces vecteurs est appelé ensemble de points-périodes; cet ensemble est symétrique par rapport à l'origine; la somme géométrique de deux périodes en est une autre. Cet ensemble, qui est composé d'un nombre infini de points et qui s'étend à l'infini, a ou n'a pas de point-limite.

Première hypothèse. — L'ensemble n'a pas de point-limite; les modules des périodes ont un minimum ρ_1; ce minimum est effectivement atteint, car s'il n'en était pas ainsi, il y aurait des périodes de module infiniment petit, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il y a donc une période OP_1 de longueur ρ_1. Enlevons de l'ensemble tous les points, situés sur la droite OP_1, congrus à P_1; s'il ne reste aucun point en dehors de ceux-ci, l'ensemble se déduit d'une seule période.

S'il reste d'autres points, la borne inférieure ρ_2 des modules des périodes restantes conduit de même à un point P_2 non situé sur OP_1; ρ_2 est supérieur à ρ_1, exceptionnellement égal; les deux points P_1 et P_2 définissent un ensemble de points-périodes situés dans le plan OP_1P_2; il peut se confondre avec le proposé. Dans le cas contraire, on retranche cet ensemble plan du proposé et l'ensemble restant conduit de la même façon à un point P_3 non situé dans le plan OP_1P_2. Les points P_1, P_2, P_3 donnent un ensemble de parallélépipèdes dont les sommets sont tous les points de l'ensemble donné; en effet, si un point-période se trouve à l'intérieur d'un de ces parallélépipèdes, il y a au moins un des vecteurs obtenus en le joignant aux sommets qui est inférieur à la plus petite des arêtes; la période correspondante aurait dû être obtenue au lieu de celles qui ont été déterminées.

Deuxième hypothèse. — L'ensemble a un point-limite qu'on peut toujours supposer à l'origine; il y a donc des périodes qui tendent vers zéro; les traces de ces périodes sur une sphère de rayon ε très petit forment un ensemble qui a au moins un point-limite; exceptionnellement, cet ensemble est fini; il y a alors une infinité de périodes tendant vers zéro qui sont portées par la même droite; dans le cas général, il y a une infinité de périodes tendant vers zéro dont les directions ont une direction limite. Dans les deux cas, prenons cette direction pour Oz et sur une droite parallèle marquons deux points A et B tels que $f(\mathrm{A}) \neq f(\mathrm{B})$; en vertu de la continuité de f, à l'intérieur d'une sphère de centre A, on a $f(x, y, z) \neq f(\mathrm{A})$; or il existe une direction suffisamment voisine de Oz pour que la période correspondante soit inférieure à ε; on trouve ainsi des points où $f(\mathrm{A}) = f(\mathrm{B})$; il y a contradiction et la fonction f est indépendante de z; autrement dit, elle est réductible.

Conclusion. — Une fonction réelle de n variables ne peut admettre plus de n périodes réelles; chacune de ces périodes est constituée par un groupe de n nombres réels.

Appliquant ce résultat à la fonction irréductible

$$f(u, v) = \mathrm{P}(x, y, z, t) + i\,\mathrm{Q}(x, y, z, t),$$

on a démontré qu'elle admet au plus quatre périodes

$$\alpha_k = \alpha'_k + i\alpha''_k \qquad \beta_k = \beta'_k + i\beta''_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

avec la condition

$$|\alpha'_k\, \alpha''_k \beta'_k\ \beta''_k| \neq 0.$$

Les périodes peuvent être simplifiées par le changement de variables

$$u_1 = \frac{\beta_2 u - \alpha_2 v}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}, \quad v_1 = \frac{\beta_1 u - \alpha_1 v}{\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1}$$

qui donne pour les deux premières 1,0 et 0,1; les deux autres seront désignées par A, B et B′, C.

Il faut pour cela que l'une des quantités $\alpha_1\beta_k - \alpha_k\beta_1$ soit différente de zéro; or, si nous commençons par le changement

$$u' = \frac{u}{\alpha_1}, \qquad v' = \alpha_1 v - \beta_1 u,$$

qui est toujours possible puisque une des α_k est différente de zéro, la première période devient 1,0 et les suivantes

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_1}, \alpha_1\beta_k - \alpha_k\beta_1,$$

il est donc certain que l'une des quantités $\alpha_1\beta_k - \alpha_k\beta_1$ n'est pas nulle.

Nous considérerons désormais des fonctions méromorphes de deux variables complexes admettant les périodes

$$1,0 \quad 0,1 \quad \mathrm{A}, \mathrm{B} \quad \mathrm{B}', \mathrm{C}.$$

Pour la commodité de l'écriture, on emploiera aussi le tableau de périodes

$$2i\pi, 0 \quad 0, 2i\pi \quad \mathrm{A}, \mathrm{B} \quad \mathrm{B}', \mathrm{C}$$

qu'on appellera la forme réduite.

CHAPITRE II

Démonstration du théorème fondamental

1. Énoncé du théorème. — On va démontrer que toute fonction abélienne $f(u,v)$ est le quotient de deux fonctions entières en u et v.

Nous nous appuierons sur les théorèmes de Weierstrass et de Mittag-Leffler.

Nous établirons d'abord certaines propriétés des fonctions $v = h(u)$ définies par l'équation $f(u, v) = 0$.

1° Les fonctions $h(u)$ ne présentent d'autres singularités que des points critiques.

2° la série $\sum \frac{1}{h^3(u)}$ est absolument convergente sauf pour $h(u) = 0$, c'est-à-dire pour u solution de $f(u, 0) = 0$; a étant une des solutions de cette équation, a est un pôle de la série.

2. Première propriété de $v = h(u)$. — Supposons $f(u_0, v_0) = 0$; la fonction f est holomorphe au voisinage de u_0, v_0; par conséquent, d'après le théorème général sur les fonctions implicites, l'équation $f(u, v) = 0$ définit une ou plusieurs fonctions $v = h(u)$ régulières au voisinage de u_0, v_0 ou l'admettant pour point critique; mais, comme f a des pôles, il est nécessaire de démontrer que, quel que soit le chemin suivi pour le prolongement analytique de $h(u)$, on ne rencontre que des points réguliers ou des points critiques.

Construisons, dans l'espace $E_4(x, y, z, t)$, un parallélépipède P de périodes ayant un sommet à l'origine et soit U, V le point dans P congruent à u_0, v_0; si a est un point non régulier de $v = h(u)$, lorsque u tend vers a, les points congruents U, V ont un point-limite α, β que nous pouvons supposer à l'origine; ayant $f(u, v) = 0$, nous avons aussi $f(U, V) = 0$ dans le voisinage de l'origine, par conséquent f est nulle à l'origine et le théorème des fonctions implicites est applicable en ce point; c'est-à-dire que, si nous décrivons dans le plan des U un cercle de centre O et de rayon ρ, et si la variable U reste dans ce cercle, l'équation $f(U, V) = 0$ admet un certain nombre de racines $V = h(U)$ voisines de zéro et qui n'ont dans C d'autre singularité possible que le point critique $U = 0$.

Revenons maintenant à u qui tend vers a sur le chemin L; prenons u_1 assez voisin de a sur L pour que toute la portion de L qui va de u_1 à a soit dans un cercle de centre a et de rayon $\frac{\rho}{2}$; nous pouvons choisir u_1 tel que la racine $v_1 = h(u_1)$ définisse un point congruent U_1, V_1 dont la distance à l'origine soit inférieure à $\frac{\rho}{2}$; les équations de correspondance sont

$$u_1 = U_1 + A, \qquad v_1 = V_1 + B,$$

A, B étant une période. La distance entre les points u_1, v_1 et A, B est inférieure à $\frac{\rho}{2}$; *a fortiori* la distance, dans le plan des u, entre les points u_1 et A est inférieure à $\frac{\rho}{2}$; traçons le cercle C de centre A et de rayon ρ, il contient une portion de L sur laquelle se trouve le point a; nous considérons spécialement cette portion.

L'équation $f(u, v) = 0$, satisfaite pour $u = A$, $v = B$ définit un certain nombre de fonctions $v = h(u)$ qui restent voisines de B quand u est dans le cercle C et qui n'admettent d'autre singularité que $u = A$; la racine $v_1 = h(u_1)$ se confond avec l'une d'elles et ne peut admettre a comme point singulier que s'il se confond avec A. D'ailleurs, ce point singulier ne peut être qu'un point critique algébrique.

Nous allons compléter la démonstration précédente en montrant que, si u prend la valeur u_0 satisfaisant à $|u_0| < \rho$, l'équation $\varphi(u_0, v) = 0$ n'a qu'un nombre fini de racines à l'intérieur d'un cercle γ de centre O et de rayon r.

Supposons en effet qu'il en soit autrement et que le nombre n de racines soit sans limite supérieure quand u_0 varie dans le cercle C de rayon ρ; nous pouvons alors trouver une suite de valeurs de u_0 : $u_1, u_2, \ldots\ldots u_k \ldots$ telles que l'entier n correspondant croisse indéfiniment; ces valeurs de u_0 ont un point-limite a situé dans ou sur C; considérons toutes les racines de $f(a, v) = 0$ situées à l'intérieur d'un cercle γ' de rayon $r + h$; ces racines $v_1, v_2, \ldots$, sont en nombre fini, car, s'il n'en était pas ainsi, elles auraient un point-limite qui serait pour les fonctions $v = h(u)$ une singularité non algébrique. Décrivons avec chacun de ces points comme centre des cercles de rayons très petits tous intérieurs à γ'; pour u voisin de a, $f(u, v)$ ne s'annule pas à l'extérieur du domaine constitué par l'ensemble de ces cercles et, par conséquent, pour u voisin de $a, f(u, v) = 0$ n'admet que les k racines voisines de $v_1, v_2, \dots v_k$ et l'entier n a toujours une limite supérieure.

3. Seconde propriété de $v = h(u)$. — Passons maintenant à la seconde proposition.

Dans la fonction

$$f(u, v) = \mathrm{P}(x, y, z, t) + i\, \mathrm{Q}(x, y, z, t),$$

faisons une substitution linéaire sur les variables réelles de façon que les périodes de P et Q soient portées par les quatre axes et aient pour longueur commune 2π; les nouvelles variables sont x_1, y_1, z_1, t_1. Nous donnons alors à a une valeur u_0 et nous étudions la fonction $\sum \frac{1}{h^3(u_0)}$; autrement dit, nous posons $x = x_0, y = y_0$ et nous étudions une certaine fonction des racines en z et t des équations $\mathrm{P} = 0, \mathrm{Q} = 0$.

Les équations de la substitution étant

$$\begin{aligned}
x &= ax_1 + by_1 + cz_1 + dt_1 \\
y &= a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 + d't_1, \\
z &= a''x_1 + b''y_1 + c''z_1 + d''t_1, \\
t &= a'''x_1 + b'''y_1 + c'''z_1 + d'''t_1;
\end{aligned}$$

les deux premières, où nous posons $x = x_0, y = y_0$ représentent un plan P_2 à deux dimensions de l'espace E_4; dans cet espace, les équations $\mathrm{P}_1 = 0$, $\mathrm{Q}_1 = 0$, transformées de $\mathrm{P} = 0$, $\mathrm{Q} = 0$, représentent une multiplicité C_2 à deux dimensions; nous allons étudier l'intersection de P_2 et de C_2.

Le nombre de points d'intersection situés dans le cube fondamental de périodes est fini; en effet, si x_1, y_1, z_1, t_1 reste dans ce cube, le point correspondant x, y, z, t reste à distance finie de l'origine; par conséquent, quels que soient x_0, y_0, le module de u_0 est inférieur à une quantité fixe et il en est de même pour le module des valeurs de v déterminées par l'intersection de P_2 et C_2; on vient de voir que le nombre de ces points d'intersection admet une limite supérieure n.

Supposons maintenant $cd' - c'd \neq 0$ (un des six déterminants de cette forme est certainement différent de zéro). Alors, pour

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 2\pi, \qquad 0 \leqslant y_1 \leqslant 2\pi;$$

les équations du plan $\mathrm{P}_2(x_0, y_0)$ nous donnent

$$\lambda \leqslant z_1 \leqslant \mu, \qquad \lambda' \leqslant t_1 \leqslant \mu'.$$

Considérons alors l'espace (x_1, y_1, z_1, t_1) décomposé en cubes de périodes; chaque cube appartient à un ensemble déduit d'un carré du plan x_1Oy_1; dans chacun de ces cubes, il y a un nombre fini de points d'intersection dont nous pouvons prendre les points congruents dans le cube fondamental : C_2 ne change pas et x_0, y_0 sont remplacés par d'autres valeurs; d'autre part, le plan P_2 ne traverse qu'un nombre fini de cubes : soit l et m deux entiers tels qu'on ait

$$l - 1 \geqslant \frac{\mu - \lambda}{2\pi}, \qquad m - 1 \geqslant \frac{\mu' - \lambda'}{2\pi},$$

P_2 traverse au plus lm cubes de l'ensemble; en tout, l'ensemble contient donc au plus lmn points d'intersection. Or si $2p\pi$, $2q\pi$ sont les coordonnées du sommet du carré le plus éloigné de l'origine, les modules des valeurs de v correspondant à ces points d'intersection sont inférieurs à $2\pi k \sqrt{p^2 + q^2}$, k désignant le facteur fini introduit par le changement de coordonnées. Nous obtenons ainsi l'inégalité

$$\sum \left|\frac{1}{h^3(u)}\right| \leqslant \sum \frac{lmn}{(2\pi k)^3 (p^2 + q^2)^{3/2}}$$

La série $\sum \frac{1}{h^3(u)}$ est donc absolument et uniformément convergente; autrement dit, la suite des $h(u)$ est de genre 2.

4. Démonstration du théorème. — Les propositions préliminaires étant ainsi démontrées, nous abordons la démonstration du théorème fondamental.

Formons d'abord une fonction entière en v admettant les zéros $v = h_n(u)$ dont la suite est de genre 2; cette fonction est de la forme

$$\varphi(u, v) = \Pi \left\{ \left(1 - \frac{v}{h_n}\right) e^{\frac{v}{h_n} + \frac{v^2}{2h_n^2}} \right\}. \tag{1}$$

Si les périodes de $f(u, v)$ ont été ramenées à la forme réduite, la série des $h_n(u)$ admet la période $2i\pi$ et chacune des fonctions $h_n(u)$ admet aussi cette période. La fonction $\varphi(u, v)$ admet donc la période $2i\pi$ en u; c'est aussi une fonction uniforme de u; en effet, pour les points critiques algébriques des $h(u)$, un certain nombre de ces fonctions se permutent, le produit reste uniforme.

Mais nous avons en u, pour la fonction $\varphi(u, v)$, des singularités amenées par les zéros des $h_n(u)$ qui sont des points singuliers essentiels. Soit $u = a$ un zéro de $h_p, h_q, \ldots$; c'est un point régulier ou un pôle pour les fonctions symétriques de ces quantités : c'est un zéro d'un certain ordre pour leur produit; et c'est un pôle pour la somme des inverses et pour la somme des carrés des inverses, avec des développements polaires connus. Nous pouvons construire une fonction entière H(u) et des fonctions méromorphes K(u), L(u) admettant respectivement ces zéros et ces pôles; comme ils admettent la période $2i\pi$, ces fonctions l'admettent aussi.

La fonction

$$(2) \qquad \psi(u, v) = \varphi(u, v)\, \mathrm{H}(u)\, e^{-\left(v\mathrm{K}+\frac{v^2}{2}\mathrm{L}\right)}$$

n'a plus de singularités pour les zéros des $h_n(u)$; c'est donc une fonction entière en u et v, de période $2i\pi$ par rapport à u et admettant les zéros $v = h_n(u)$.

Voyons maintenant ce qui se passe pour la période $2i\pi$ par rapport à v.

A un zéro $h_n(u)$ correspond l'infinité $h_n(u) + 2ik\pi$; groupons les termes formés avec eux en un produit

$$\prod_k \left\{ \left(1 - \frac{v}{h_n + 2ik\pi}\right) e^{\frac{v}{h_n+2ik\pi} + \frac{v^2}{2(h_n+2ik\pi)^2}} \right\}.$$

Or nous avons

$$e^v - e^{h_n} = (1 - e^{h_n})\, e^{\frac{v}{1-e^{h_n}}} \prod_k \left\{ \left(1 - \frac{v}{h_n + 2ik\pi}\right) e^{\frac{v}{h_n+2ik\pi}} \right\}$$

le groupe considéré peut donc s'écrire

$$\frac{e^v - e^{h_n}}{1 - e^{h_n}}\, e^{\frac{v}{e^{h_n}-1}} \prod_k e^{\frac{v^2}{2(h_n+2ck\pi)^2}} = (e^v - e^{h_n})\, e^{\lambda_n v^2 + \mu_n v}.$$

Les fonctions φ et ψ prennent ainsi la forme

$$\varphi(u, v) = \prod_n \left[(e^v - e^{h_n})\; e^{\lambda_n{}^2 + \mu_n v}\right],$$

$$\psi(u, v) = \prod_n \left[(e^v - e^{h_n})\; (e^{\alpha_n v^2 + \beta_n v + \gamma_n}\right].$$

En outre, $f(u, v) = 0$ peut avoir certains zéros indépendants de v; ils admettent la période $2i\pi$ et nous pouvons former une fonction entière M(u) qui les admet; la fonction

$$(3) \qquad \mathrm{X}(u, v) = \mathrm{M}(u) \prod_n \left[(e^v - e^{h_n})\; e^{\alpha_n v^2 + \beta_n v + \gamma_n}\right]$$

a les mêmes zéros que $f(u, v)$ et il en est de même de la fonction $X(u, v + 2i\pi)$; par conséquent le quotient $\dfrac{X(u, v + 2i\pi)}{X(u, v)}$ est une fonction entière non nulle, c'est-à-dire une exponentielle $e^{G(u, v)}$, $G(u, v)$ étant une fonction entière. Or la forme même de $X(u, v)$ donne

$$X(u, v + 2i\pi) = X(u, v)\ e^{A(u)v+B(u)} \tag{4}$$

$A(u)$ et $B(u)$ sont donc des fonctions entières.

D'autre part, la relation (4) est encore vraie si l'on remplace u par $u + 2i\pi$, et comme $X(u, v)$ admet la période $2i\pi, 0$, on a

$$A(u + 2i\pi)v + B(u + 2i\pi) = A(u)v + B(u) + 2in\pi \quad (n \text{ entier}).$$

En posant $B_1 = B - nu$, les fonctions A et B_1 admettent la période $2i\pi$.

Multiplions

$$X(u, v) \quad \text{par } e^{-\frac{v^2}{4i\pi}A(u)+v\left(\frac{A(u)}{2}-\frac{B_1(u)}{2i\pi}\right)}$$

ce multiplicateur admet la période $2i\pi$ en u et se reproduit, quand on augmente v de $2i\pi$, multiplié par

$$e^{-A(u)v-A(u)i\pi+A(u)i\pi-B_1(u)} = e^{-A(u)v-B(u)+nu}$$

Le produit est donc une fonction $\rho(u, v)$, entière en u et v, ayant tous les zéros de $f(u, v)$ et satisfaisant aux relations

$$\rho(u + 2i\pi, v) = \rho(u, v), \qquad \rho(u, v + 2i\pi) = \rho(u,v)\, e^{nu}\ (n \text{ entier}). \tag{5}$$

Le quotient $\dfrac{\rho(u, v)}{f(u, v)}$ ne peut devenir infini; d'ailleurs le numérateur est holomorphe et le dénominateur méromorphe; c'est donc une fonction entière $\rho_1(u, v)$ qui satisfait aux mêmes relations que $\rho(u, v)$.

THÉORÈME. — *Toute fonction $f(u, v)$ est le quotient de deux fonctions entières $\rho(u, v)$ et $\rho_1(u, v)$.*

Nous allons maintenant nous occuper des deux autres couples de périodes : A, B et B', C.

Effectuons la substitution

$$u = \frac{AU}{2i\pi}, \qquad v = V + \frac{BU}{2i\pi} \tag{6}$$

qui remplace la période A, B par $2i\pi, 0$, tout en conservant la période $0, 2i\pi$; la fonction $f(u, v)$ devient $F(U, V)$ et celle-ci nous conduit construire R(U, V) analogue à $\rho(u, v)$, admettant la période $2i\pi$ par rapport à U et satisfaisant à

$$R(U, V + 2i\pi) = R(U, V)\, e^{-m_1 U} \qquad (m_1 \text{ entier}),$$

R(U, V) admet les zéros de F(U, V), c'est-à-dire ceux de $f(u, v)$; il en résulte que le quotient $\dfrac{R(U, V)}{F(U, V)}$ est une fonction entière sans zéros ni pôles : c'est une exponentielle dont l'exposant est une fonction entière.

Comparons d'autre part les expressions de R et de ρ ; il y figure d'abord des produits infinis dont les termes correspondants sont

$$\left(1 - \frac{V}{H_n}\right) e^{\frac{V}{H_n} + \frac{V^2}{2H_n^2}}, \qquad \left(1 - \frac{v}{h_n}\right) e^{\frac{v}{h_n} + \frac{v^2}{2h_n^2}}$$

Or, nous avons

$$\left(1 - \frac{V}{H_n}\right) e^{\frac{V}{H_n} + \frac{V^2}{2H_n^2}} = \left[1 - \frac{v - \frac{B}{A}u}{h_n - \frac{B}{A}u}\right] . e^{\frac{v - \frac{B}{A}u}{h_n - \frac{B}{A}u} + \frac{\left(v - \frac{B}{A}u\right)^2}{2\left(h_n - \frac{B}{A}u\right)^2}}$$

$$= \left(1 - \frac{v}{h_n}\right) e^{\frac{v}{h_n} + \frac{v^2}{2h_n^2}}\, e^{\alpha_n(u)v^2 + \beta_n(u)v + \gamma_n(u)}$$

Ces produits infinis sont multipliés par des exponentielles dont les exposants sont des trinômes du second degré en V et v. Nous avons donc

$$\frac{R(U, V)}{\rho(u, v)} = e^{\alpha(u)v^2 + \beta(u)v + \gamma(u)},$$

les fonctions $\alpha(u)$, $\beta(u)$, $\gamma(u)$ étant entières; augmentons en même temps, ce qui est compatible avec la substitution (6), V et v de $2i\pi$, nous avons

$$\frac{\dfrac{R(U, V + 2i\pi)}{R(U, V)}}{\dfrac{\rho(u, v + 2i\pi)}{\rho(u, v)}} \begin{aligned} &= e^{\alpha(u)[4i\pi v + (2i\pi)^2] + \beta(u)2i\pi} \\ &= e^{-m_1 U - nu} = e^{-u\left[n + \frac{2m_1 i\pi}{A}\right]} \end{aligned}$$

D'où, par comparaison,

$$\alpha(u) = 0, \qquad \beta(u) = \frac{-nu}{2i\pi} - \frac{m_1 u}{A} - k \qquad (k \text{ entier}).$$

Augmentons maintenant u et v de A et B, ce qui revient à augmenter U de $2i\pi$ et par conséquent ne change pas R(U, V), nous avons

$$\rho(u + A, v + B) = R(U, V)\, e^{(v+B)\left[\frac{n(v+A)}{2i\pi} + \frac{m_1(v+A)}{A} + k\right] - \gamma_n(u+A)}$$

$$= \rho(u,v)\, e^{v\left(\frac{nA}{2i\pi} + m_1\right) + F_1(u)}$$

La fonction F_1 est entière; nous allons la simplifier.

Remarquons d'abord que le quotient $\dfrac{\rho(u + A, v + B)}{\rho(u, v)}$ admet la période $2i\pi$ par rapport à u, ce qui donne

$$F_1(u + 2i\pi) = F_1(u) + 2il_1\pi \quad (l_1 \text{ entier}).$$

La fonction $F(u) = l_1 u - F_1(u)$ est donc entière et admet la période $2i\pi$. On sait qu'on peut trouver une fonction entière $G(u)$ admettant la période $2i\pi$ et telle que

$$G(u + A) - G(u) = - F(u) - C_1 \qquad (C_1 \text{ constant}).$$

Multiplions alors $\rho(u, v)$ par $e^{G(u)}$ et gardons le même nom pour le produit; la nouvelle fonction $\rho(u, v)$ est entière, admet tous les zéros de $f(u, v)$ et satisfait aux équations

$$(6) \qquad \begin{cases} \rho(u + 2i\pi, v) = \rho(u, v), \\ \rho(u, v + 2i\pi) = \rho(u, v)\, e^{nu} \\ \rho(u + A, v + B) = \rho(u, v)\; e^{l_1 u + \left(\frac{nA}{2i\pi} + m_1\right)v + C_1}, \end{cases}$$

En traitant maintenant le couple B′, C comme on vient de traiter le couple A, B, on obtient la relation

$$\rho(u + B', v + C) = \rho(u,v)\; e^{l_2 u + \left(\frac{nB'}{2i\pi} + m_2\right)v + F(u)},$$

$F(u)$ étant une certaine fonction entière de période $2i\pi$ qui se réduit à une constante comme on va le voir.

Calculons en effet de deux manières $\rho(u + A + B', v + B + C)$ en fonction de $\rho(u, v)$; par la comparaison des exponentielles, nous obtenons

$$l_1 B' + \frac{nAC}{2i\pi} + m_1 C = l_2 A + m_2 B + \frac{nB'B}{2i\pi} + F(u + A) - F(u) + 2pi\pi$$

$(p$ entier).

Ainsi la différence $F(u + A) - F(u)$ est une constante; la dérivée $F'(u)$ admet donc les périodes $2i\pi$ et A; c'est donc une constante et $F(u)$ est linéaire en u; le coefficient de u est entier, puisque F admet la période $2i\pi$; ce terme rentre dans ceux déja écrits et $F(u)$ se réduit à une constante C_2.

Nous avons ainsi trouvé une relation entre les périodes

$$l_1 B' - l_2 A + m_1 C - m_2 B + n \frac{AC - BB'}{2i\pi} - 2pi\pi = 0, \tag{7}$$

on peut dire que les six déterminants déduits du tableau de périodes

$$\begin{vmatrix} 2i\pi & 0 & A & B' \\ 0 & 2i\pi & B & C \end{vmatrix}$$

sont liés par une relation linéaire à coefficients entiers

Il est nécessaire de démontrer que les coefficients de cette relation ne sont pas tous nuls : nous allons démontrer que n, l_1, m_1 ne peuvent être nuls à la fois.

Soit $n = 0$; $\rho(u, v)$ est de la forme

$$\rho(u, v) = \sum \sum A_{rs}\, e^{ru+sv}$$

et si en outre $l_1 = m_1 = 0$, nous avons

$$\rho(u + A, v + B) = \rho(u, v)\, e^{C_1}$$

d'où

$$a_{rs}\, e^{rA+sB} = a_{rs}\, e^{C_1}, \qquad rA + sB = C_1 + 2\lambda i\pi.$$

Si r_0, s_0 est un système de solutions, nous avons

$$(r - r_0)A + (s - s_0)B = 2\mu i\pi.$$

et, en désignant par a_1 et b_1 les parties réelles de A et B,

$$(r - r_0)\, a_1 + (s - s_0)\, b_1 = 0, \qquad \frac{r - r_0}{b_1} = \frac{s - s_0}{- a_1} = k.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\rho(u, v) = e^{r_0 u + s_0 v} \sum a_{rs}\, e^{k(b_1 u - a_1 v)} = e^{r_0 u + s_0 v} \sum \alpha_k\, e^{kU}$$

Le même calcul peut s'appliquer au dénominateur et la fonction $f(u, v)$ serait alors une fonction de U seul, ce qui est contraire à l'hypothèse qu'elle est irréductible.

En résumé, on a démontré que toute fonction $f(u, v)$ méromorphe, admettant les quatre couples de périodes

$$\begin{vmatrix} 2i\pi & 0 & A & B' \\ 0 & 2i\pi & B & C \end{vmatrix}$$

est égale au quotient de deux fonctions $\rho(u, v)$ entières en u et v, satisfaisant aux relations

$$(8)\quad \begin{cases} \rho(u + 2i\pi, v) = \rho(u, v), \\ \rho(u, v + 2i\pi) = \rho(u, v)\ e^{nu} \\ \rho(u + A, v + B) = \rho(u, v)\ e^{l_1 u + \left(\frac{nA}{2i\pi} + m_1\right)v + C_1} \\ \rho(u + B', v + C) = \rho(u, v)\ e^{l_2 u + \left(\frac{nB'}{2i\pi} + m_2\right)v + C_2} \end{cases}$$

(n, l_1, l_2, m_1, m_2 sont des entiers),
et qu'entre les périodes, il existe une relation obtenue en égalant à zéro une fonction linéaire et homogène à coefficients entiers des six déterminants déduits du tableau de périodes.

Cette relation sera appelée dans la suite la relation fondamentale entre les périodes.

5. Formation des fonctions thêta. — Nous allons maintenant démontrer que, si les quatre couples de périodes vérifient la relation fondamentale, il est possible de former des fonctions quadruplement périodiques admettant ces périodes.

Supposons d'abord $n = 0$; la relation fondamentale s'écrit

$$m_1 C - m_2 B = l_2 A - l_1 B' + 2pi\pi.$$

Prenons comme nouvelles périodes

$$\begin{matrix} 2i\pi & 0 & \alpha = m_1 B' - m_2 A & \beta' = l_2 A - l_1 B' + 2pi\pi \\ 0 & 2i\pi & \beta = m_1 C - m_2 B & \gamma = l_2 B - l_1 C \end{matrix}$$

La relation prend la forme

$$\beta - \beta' = 0.$$

Les nouvelles périodes sont distinctes pourvu que

$$\delta = l_1 m_2 - l_2 m_1$$

soit différent de zéro [1].

[1] On peut, en outre, supposer $\delta > 0$, car s'il était négatif, on le changerait de signe en changeant de signes u et v ou bien α, β, γ.

Pour montrer qu'il en est bien ainsi, voyons ce que donne l'addition des nouvelles périodes. On obtient facilement

$$\rho(u + \alpha, v + \beta) = \rho(u, v)\, e^{-\delta u + \varepsilon_1}$$
$$\rho(u + \beta', v + \gamma) = \rho(u, v)\, e^{-\delta v + \varepsilon_2}.$$

Par conséquent, d'après un résultat déjà démontré, la quantité δ n'est pas nulle.

Si enfin on augmente u et v de constantes convenables, on est ramené à chercher des fonctions $\rho(u, v)$ satisfaisant aux relations

$$(9) \qquad \begin{cases} \rho(u + 2i\pi, v) = \rho(u, v), \\ \rho(u, v + 2i\pi) = \rho(u, v), \\ \rho(u + \alpha, v + \beta) = \rho(u, v)\, e^{-\delta u}, \\ \rho(u + \beta, v + \gamma) = \rho(u, v)\, e^{-\delta v}. \end{cases}$$

Les deux premières conduisent à poser

$$\rho(u, v) = \sum\sum a_{rs}\, e^{ru+sv} \qquad (r \text{ et } s \text{ entiers})$$

et les suivantes donnent les conditions

$$a_{rs}\, e^{r\alpha+s\beta} = a_{r+\delta,s} \qquad a_{rs}\, e^{r\beta+s\gamma} = a_{r,s+\delta}.$$

Il suffit donc, pour avoir tous les a_{rs}, d'en connaitre δ^2, par exemple ceux pour lesquels on a

$$0 \leqslant r \leqslant \delta - 1, \qquad 0 \leqslant s \leqslant \delta - 1.$$

Soit d'abord $\delta = 1$, prenons $a_{00} = 1$; nous avons

$$a_{10} = 1, \qquad a_{20} = a_{10}\, e^{\alpha} = e^{\alpha}, \qquad a_{30} = a_{20}\, e^{2\alpha} = e^{3\alpha};$$

$$a_{r0} = a_{r-1,0}\, e^{(r-1)\alpha} = e^{\frac{r(r-1)\alpha}{2}}$$

$$a_{r1} = a_{r0}\, e^{\beta}, \quad a_{r2} = a_{r1}\, e^{r\beta+\gamma} = a_{r0}\, e^{2r\beta+\gamma}, \quad a_{rs} = e^{\frac{r(r-1)}{2}\alpha + rs\beta + \frac{s(s-1)}{2}\gamma}$$

La fonction $\rho(u, v)$ pour $\delta = 1$ a pour développement

$$\sum\sum e^{\frac{1}{2}(r^2\alpha+2rs\beta+s^2\gamma)}\, e^{r\left(u-\frac{\alpha}{2}\right)+s\left(v-\frac{\gamma}{2}\right)}$$

Si la forme quadratique

$$\varphi(r, s) = \tfrac{1}{2}(r^2\alpha + 2rs\beta + s^2\gamma)$$

a sa partie réelle négative, l'exponentielle $e^{\varphi(r,s)}$ tend vers zéro quand r et s augmentent indéfiniment et le terme général de ρ tend vers zéro :

la série ρ est convergente. Si cette partie réelle peut devenir positive, il y a des termes qui ne tendent pas vers zéro et la série ρ est divergente.

La condition de convergence de la série $\rho(u, v)$ est

$$\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1 < 0, \ \alpha_1 < 0 ,$$

α_1, β_1, γ_1 désignant les parties réelles de α, β, γ.

Soit maintenant $v \neq 1$; posons $r = r_0 + p\delta$, $s = s_0 + q\delta$. Un calcul analogue donne les formules

$$a_{rs_0} = a_{r_0s_0}\, e^{\frac{1}{2\delta}[r^2 - r_0^2 - p\delta^2]\alpha + ps_0\beta}$$

$$a_{rs} = a_{rs_0}\, e^{qr\beta + \frac{1}{2\delta}[s^2 - s_0^2 - q\delta^2]\gamma}$$

$$= a_{r_0s_0}\, e^{-\frac{1}{2\delta}(r_0^2\alpha + 2r_0s_0\beta + s_0^2\gamma)}\ e^{\frac{1}{2\delta}(r^2\alpha + 2rs\beta + s^2\gamma)}\ e^{-\frac{\delta}{2}(p\alpha + q\gamma)}$$

La fonction $\rho(u, v)$ s'écrit alors

$$\rho(u, v) = \sum\sum \mathrm{A}_{rs}\, e^{\frac{1}{2\delta}(r^2\alpha + 2rs\beta + s^2\gamma)}\ e^{r\left(u - \frac{\alpha}{2}\right) + s\left(v - \frac{\gamma}{2}\right)}$$

$$\mathrm{A}_{rs} = a_{r_0s_0}\, e^{-\frac{1}{2\delta}(r_0^2\alpha + 2r_0s_0\beta + s_0^2\gamma)}\, e^{\frac{r_0}{2}\alpha + \frac{s_0}{2}\gamma}$$

Les coefficients A_{rs} admettent, quant à leurs indices, la période δ.

La convergence de la série exige toujours, si δ est positif,

$$\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1 < 0, \qquad \alpha_1 < 0$$

Un dernier changement linéaire de variables qui remplace $u - \frac{\alpha}{2}$, $v - \frac{\gamma}{2}$ par u, v change les fonctions $\rho(u, v)$ dans les fonctions thêta de deux variables dont la définition est :

Les fonctions thêta de deux variables u et v sont des fonctions entières par rapport à u et v qui satisfont aux relations

$$(10)\qquad \begin{cases} \Theta(u + 2i\pi, v) = \Theta(u, v + 2i\pi) = \Theta(u, v), \\ \Theta(u + \alpha, v + \beta) = e^{-\delta\left(u + \frac{\alpha}{2}\right)}\, \Theta(u, v), \\ \Theta(u + \beta, v + \gamma) = e^{-\delta\left(v + \frac{\gamma}{2}\right)}\, \Theta(u, v). \end{cases}$$

En posant

$$\Theta_{r_0 s_0}(u, v) = \sum_p \sum_q e^{(r_0+p\delta)u+(s_0+q\delta)v} \, e^{\frac{1}{2\delta}\varphi(r_0+p\delta, s_0+q\delta)}$$

$$\varphi(x, y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2, \qquad 0 \leqslant \begin{Bmatrix} r_0 \\ s_0 \end{Bmatrix} \leqslant \delta - 1;$$

toute fonction qui satisfait aux équations (10) *est une fonction linéaire et homogène de ces* δ^2 *fonctions. La convergence exige,* δ *étant positif, que la partie réelle de la forme quadratique* $\varphi(x, y)$ *soit définie et négative.* δ *est l'ordre de ces fonctions.*

6. Introduction du diviseur. — Examinons maintenant le cas où n est différent de zéro. Prenons comme périodes

$$\begin{array}{cccc} 2i\pi & 0 & \bar{A} = nA + 2im_1\pi & \bar{B}' = nB' + 2im_2\pi \\ 0 & 2i\pi & \bar{B} = nB - 2il_1\pi & \bar{C} = nC - 2il_2\pi \end{array}$$

Ces périodes sont distinctes, puisque n n'est pas nul, et nous avons les relations

$$\rho(u + \bar{A}, v + \bar{B}) = \rho(u, v)\, e^{\lambda_1 u + \mu_1}$$

$$\rho(u + \bar{B}', v + \bar{C}) = \rho(u, v)\, e^{\lambda_2 u + \mu_2}$$

avec

$$\lambda_1 = m_1 n + \frac{n^2 A}{2i\pi} = n\frac{\bar{A}}{2i\pi}, \quad \mu_1 = \frac{n(n-1)}{2}\left(l_1 A + \frac{nAB}{2i\pi} + m_1 B\right) + nC_1;$$

$$\lambda_2 = m_2 n + \frac{n^2 B'}{2i\pi} = \frac{n}{2i\pi}\bar{B}', \quad \mu_2 = \frac{n(n-1)}{2}\left(l_2 B' + \frac{nB'C}{2i\pi} + m_2 C\right) + nC_2.$$

et nous sommes certain que λ_1 et λ_2 ne sont pas nuls.

La relation fondamentale devient, pour les nouvelles périodes,

$$\frac{1}{2i\pi}(\bar{A}\bar{C} - \bar{B}\,\bar{B}') = 2Mi\pi, \qquad M = np + m_2 l_1 - m_1 l_2.$$

Multiplions $\rho(u, v)$ par e^{av^2+bv} de façon que $\bar{A}\bar{B}$, soit une période, ce qui donne les équations

$$\lambda_1 + 2a\bar{B} = 0, \qquad \mu_1 + a\bar{B}^2 + b\bar{B} = 0 \qquad \left(a = -\frac{n}{4i\pi}\frac{\bar{A}}{\bar{B}}\right)$$

et faisons la substitution

$$U = -\frac{1}{M}\left(u - \frac{\bar{A}}{\bar{B}}v\right), \qquad V = \frac{2i\pi v}{\bar{B}}$$

les nouvelles périodes sont

$$
\begin{array}{cccc}
-\dfrac{2i\pi}{M} & \alpha = \dfrac{2i\pi}{M}\dfrac{\bar{A}}{\bar{B}} & 0 & \beta' = \dfrac{\bar{A}\bar{C} - \bar{B}\bar{B}'}{M\bar{B}} \\
0 & \beta = -\dfrac{4\pi^2}{\bar{B}} & 2i\pi & \gamma = \dfrac{2i\pi}{M}\bar{C}
\end{array}
$$

avec la relation $\beta = \beta'$.

La fonction $\rho(u,v)$ est devenue $\Pi(U, V)$ qui satisfait aux relations

$$
(11) \quad \begin{cases}
\Pi\left(U - \dfrac{2i\pi}{M}, V\right) = \Pi(U, V + 2i\pi) = \Pi(U, V), \\
\Pi(U + \alpha, V + \beta) = \Pi(U, V)\ e^{-MnU + C_1} \\
\Pi(U + \beta', V + \gamma) = \Pi(U, V)\ e^{-MnV + C_2}
\end{cases}
$$

La substitution $\bar{U} = \dfrac{\bar{A}}{\bar{B}} v - u$, $\quad V = \dfrac{2i\pi}{\bar{B}} v$ donnerait comme quatrième couple

$$
\beta' = \frac{\bar{A}\bar{C} - \bar{B}\bar{B}'}{\bar{B}}, \qquad \gamma = 2i\pi\,\frac{\bar{C}}{\bar{B}}
$$

avec la relation

$$
\Pi(\bar{U} + \beta, V + \gamma) = \Pi(U, V)\ e^{-MnV + C_2'}
$$

ce qui montre que M n'est pas nul.

Les fonctions $\Pi(U, V)$ admettent évidemment la période $2i\pi, 0$; elles sont donc, parmi les fonctions thêta d'ordre $\delta = Mn$, celles qui admettent la période $\dfrac{2i\pi}{M}$.

7. **Résumé.** — Les résultats fondamentaux suivants sont donc acquis :

I. *Étant donnés quatre couples distincts de périodes, c'est-à-dire tels que l'un d'eux ne soit pas une combinaison linéaire des autres, pour qu'il existe une fonction méromorphe de deux variables admettant ces périodes, il faut et il suffit.*

1° *que les quatre vecteurs représentant ces périodes ne soient pas dans un plan à trois dimensions de l'espace à quatre dimensions*;

2° *que quatre couples distincts déduits des couples donnés puissent se ramener, par une substitution de variables, au tableau*

$$
\begin{array}{cccc}
\dfrac{2i\pi}{M} & 0 & \alpha & \beta \\
0 & 2i\pi & \beta & \gamma
\end{array}
$$

ou, plus généralement, que les déterminants déduits du tableau primitif soient liés par une relation linéaire et homogène à coefficients entiers;

3° *que, si* $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ *sont les parties réelles de* α, β, γ, *on ait*

$$\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1 < 0, \qquad \alpha_1 < 0.$$

II. *Toute fonction méromorphe quadruplement périodique de deux variables peut être représentée, après avoir effectué une substitution linéaire sur les variables, par le quotient de deux séries entières* $\Theta(u, v)$ *satisfaisant aux relations de définition de ces fonctions et formées avec le tableau réduit de périodes.*

CHAPITRE III

Propriétés fondamentales des fonctions abéliennes

Les théorèmes qui vont être démontrés ont leurs analogues bien connus pour les fonctions elliptiques.

1. Relation algébrique entre trois fonctions. Théorème I. — *Trois fonctions abéliennes x, y, z admettant quatre couples communs de périodes primitives ou non sont liées par une relation algébrique* $S(x, y, z) = 0$.

Nous pouvons toujours supposer que les périodes communes ont été réduites à la forme canonique. Considérons la fonction $\alpha x + \beta y + \gamma z + \varepsilon$ dont les coefficients sont des constantes arbitraires; c'est une fonction abélienne aux mêmes périodes et elle est égale à un quotient $\dfrac{\Theta(u, v)}{\Theta_0(u, v)}$; le dénominateur $\Theta_0(u, v)$ est indépendant des $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$; si δ est son ordre, c'est aussi l'ordre de $\Theta(u, v)$; on a donc

$$x = \frac{\Theta_1(u, v)}{\Theta_0(u, v)}, \qquad y = \frac{\Theta_2(u, v)}{\Theta_0(u, v)}, \qquad z = \frac{\Theta_3(u, v)}{\Theta_0(u, v)}.$$

les quatre fonctions $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ sont d'ordre δ.

Soit maintenant à déterminer les coefficients d'un polynome $S(x, y, z)$ de degré q, premier membre de la relation $S(x, y, z) = 0$; chacun des termes de S prend la forme

$$A\Theta_0^{\alpha_0}\,\Theta_1^{\alpha_1}\,\Theta_2^{\alpha_2}\,\Theta_3^{\alpha_3}. \quad (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = q),$$

qui est une fonction thêta d'ordre $q\delta$; toutes ces fonctions s'expriment à l'aide de $q^2\delta^2$ d'entre elles; d'autre part, le nombre des coefficients du polynome est $\dfrac{(q+1)(q+2)(q+3)}{6}$ et l'on peut toujours avoir, pour q assez grand, $(q + 1)(q + 2)(q + 3) > 6q^2\delta^2$. On obtient donc au moins une relation algébrique entre x, y, z.

La démonstration suivante est plus précise.

On doit d'abord supposer que deux des trois fonctions, x et y par exemple, sont distinctes. S'il n'en est pas ainsi, soit X une fonction auxiliaire distincte de x; si le théorème est exact, il existe une relation algébrique entre x, X, y d'une part, entre x, X, z d'autre part, et par conséquent entre x, y, z.

Pour trouver une fonction X, il suffit de prendre l'une des dérivées partielles de x; supposons en effet que toutes deux soient fonction de x; la surface $\xi = u$, $\zeta = v$, $\eta = x$ est développable; pour $\zeta = \zeta_0$ le plan tangent est parallèle à une direction fixe, la génératrice est donc parallèle au plan $\zeta = 0$ et la surface est, ou bien un cylindre, ou bien un plan; dans les deux cas, son équation est de la forme

$$\zeta = f(a\xi + b\eta + c).$$

La fonction $x(u, v)$ ne serait donc pas irréductible; et il est bien évident que l'une au moins des trois fonctions x, y, z est irréductible.

On démontrera d'abord un théorème préliminaire.

THÉORÈME II. — *Les couples u, v définis par $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ sont en nombre fini N constant; ce sont des fonctions finies, ne présentant que des singularités algébriques.*

On sait qu'on appelle fonction algébroïde de deux variables complexes x et y au voisinage de l'origine une fonction analytique $u(x, y)$ admettant au voisinage de ce point au plus n déterminations qui vérifient l'équation

$$A_n u^n + A_{n-1} u^{n-1} + \dots + A_0 = 0.$$

Les coefficients A_i sont des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine; de plus, si $u(x, y)$ reste fini on peut supposer que A_n ne s'annule pas à l'origine et l'on peut le réduire à la valeur un.

On sait aussi que l'équation $P(x, y, u) = 0$, P étant holomorphe et nul pour $x = y = u = 0$, mais non identiquement nul, définit une fonction $u(x, y)$ algébroïde vers $x = y = 0$ et tendant vers zéro en même temps que x et y. Si l'on a

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} = \dots = \frac{\partial^{k-1} P}{\partial^{k-1} u} = 0, \qquad \frac{\partial^k P}{\partial^k u} \neq 0.$$

la fonction u admet k déterminations.

Étudions les fonctions

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v)$$

au voisinage d'un système de solutions x_0, y_0, u_0, v_0. Supposons que pour $u = u_0$, $v = v_0$ les fonctions φ et ψ ne se présentent pas sous la forme $\frac{0}{0}$ et qu'elles sont holomorphes; nous pouvons rendre nulles les valeurs initiales; supposons en outre que les équations $\varphi(0, v) = \psi(0, v) = 0$ ne sont pas identiquement vérifiées. Les propositions rappelées plus haut s'appliquent à l'équation $x - \varphi(u, v) = 0$ qui définit donc une fonction $v(x, u)$ à k déterminations données par l'équation

$$(2) \qquad v^k + A_{k-1}(x, u)v^{k-1} + \ldots + A_0(x, u) = 0$$

De même, $y - \psi(u, v) = 0$ conduit à

$$(2) \qquad v^l + B_{l-1}(x, u)v^{l+1} + \ldots + B_0(x, u) = 0.$$

En exprimant que ces équations (2) ont une racine commune, on obtient

$$(3) \qquad H(x, y, u) = 0,$$

H étant une fonction holomorphe nulle pour $x = y = u = 0$.

Si $H(0, 0, u)$ est identiquement nulle, les polynomes (2) se réduisent à un seul, on peut prendre u arbitraire, le polynome restant donne la valeur correspondante de v; il y aurait donc une infinité de couples u, v satisfaisant à $\varphi = \psi = 0$; autrement dit, φ et ψ s'annulent le long d'une courbe $v = g(u)$.

Écartant ce cas particulier, l'équation (3) définit une fonction $u(x, y)$ algébroïde à m branches; nous supposons, après une transformation s'il y a lieu, que les polynomes (2) n'ont qu'une racine commune; par conséquent v est une combinaison rationnelle de u et de fonctions holomorphes de x et y; dans le domaine de l'origine, nous avons m couples u, v fonctions algébroïdes de x, y et ces fonctions peuvent être prolongées analytiquement sans présenter de singularités autres que des singularités algébriques.

Aucun autre couple u, v ne peut devenir infiniment petit pour certaines valeurs infiniment petites de x, y.

Revenons sur les hypothèses laissées de côté au cours de la démonstration. Tout d'abord, si x ou y se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ et *a fortiori* si tous deux ont cette forme, l'équation (3) est vérifiée pour $u = 0$ par une infinité de couples x, y et par conséquent $H = u^k H_1$. L'examen de l'équation $H_1(x, y, u) = 0$ montrera si $u = v = 0$ est une véritable solution du système et donnera son ordre de multiplicité.

Voyons ce qui se passe si φ et ψ s'annulent le long d'une courbe $v = g(u)$.

Un changement de variables permet de ramener ce facteur commun à être v_1; on a alors

$$x_1 = v_1^k \varphi_1(u_1, v_1), \qquad y_1 = v_1^l \psi_1(u_1, v_1)$$

et le déterminant fonctionnel $\Delta = \dfrac{D(x_1, y_1)}{D(u_1, v_1)}$ contient v_1 en facteur; par conséquent, les courbes $v = g(u)$, si elles existent, sont données par $\Delta = 0$. Cette équation définit une courbe C_2 composée d'un nombre fini d'arcs qu'on peut poursuivre analytiquement (ainsi que pour une courbe algébrique). Si x est constant le long d'une portion d'un de ces arcs, il est constant le long de l'arc tout entier; par conséquent, les couples x_0, y_0 correspondant au cas particulier d'une fonction $v = g(u)$ sont en nombre fini : ce sont des couples exceptionnels.

Considérons maintenant deux couples correspondants : u_0, v_0 et x_0, y_0, ce dernier n'étant pas exceptionnel; nous pouvons, à partir de x_0, y_0, prolonger le couple u, v; il reste partout algébroïde et fini; soit en effet x_1, y_1 un point où il n'en est pas ainsi : le couple u, v peut être prolongé jusqu'au point x_1, y_1 et non au-delà; à chaque couple u, v, faisons correspondre le couple U, V congruent à l'intérieur d'un certain parallélépipède de périodes P ayant un sommet à l'origine; x, y tendant vers x_1, y_1, U, V tend vers un point M que nous pouvons supposer être $U = V = 0$; nous pouvons aussi supposer, après un changement de variables, que $x_1 = y_1 = 0$; alors le point limite $U = V = 0$ annule φ et ψ ou bien leur donne la forme $\frac{0}{0}$; car, pour U et V voisins de zéro, φ et ψ sont voisins de zéro. En écartant le cas d'un couple exceptionnel, nous savons que les équations $x = \varphi(U, V)$, $y = \psi(U, V)$ définissent des couples de fonctions algébroïdes, voisines de zéro, quand x et y sont eux-mêmes voisins de zéro; le couple U, V qui tend vers le point limite M quand x, y tend vers x_1, y_1 coïncide avec l'un d'eux; il reste donc algébroïde et fini.

D'autre part, on a entre les couples congruents la relation

$$u = U + \omega, \qquad v = V + \omega',$$

ω, ω' étant une période; on voit bien facilement que, si x, y est suffisamment voisin de x_1, y_1, le couple u, v étant formé de fonctions continues, la période reste la même et que, par suite, le couple u, v ne présente, comme le couple U, V, que des singularités algébriques qui n'interrompent pas son prolongement analytique.

Il en résulte que le nombre N de couples u, v correspondant à un couple x, y est constant, car on peut prolonger chacun de ces couples dans tout le plan. D'ailleurs ce nombre N est fini, car, s'il était infini, ces couples admettraient un point limite u_0, v_0 donnant les valeurs x_0, y_0 à x, y; et nous savons que dans le voisinage de x_0, y_0, il existe un nombre fini de couples u, v correspondant à x, y; il y aurait donc contradiction et N est fini.

Reprenons le théorème I. Nous venons de voir que les équations $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ définissent N couples u, v; la fonction $z(x, y)$ a donc N déterminations n'ayant que des singularités algébriques. Soit x_0, y_0 et u_0, v_0 deux couples correspondants; au voisinage de u_0, v_0, z est égal au quotient de deux fonctions holomorphes de u et v; fixons $y = y_0$, u et v sont des fonctions régulières de x au voisinage de x_0 ou l'admettent comme singularité algébrique; il en est de même pour $z(x, y_0)$. La fonction $z(x, y)$ est algébrique et satisfait à l'équation $S(x, y, z) = 0$ où S est un polynome de degré N en z.

Si les N déterminations de z sont distinctes, $S(x, y, z)$ est irréductible; mais, si deux déterminations se confondent, S est réductible; il ne peut d'ailleurs se décomposer en deux polynomes distincts car les déterminations de z formeraient deux cycles distincts, ce qui est impossible d'après la démonstration précédente : S est la puissance $p^{\text{ième}}$ d'un polynome irréductible : p branches de la fonction z demeurent confondues; autrement dit, à un point x, y, z correspondent p couples u, v non congruents.

En particulier, la relation entre

$$x(u, v), \quad y(u, v), \quad z = x(u + \alpha, \ v + \beta),$$

α, β étant des constantes quelcongues, est irréductible; en effet, soit u_1, v_1 et u_2, v_2 deux couples non congruents correspondant à un couple x, y et qui donnent

$$x(u_1 + \alpha, v_1 + \beta) = x(u_2 + \alpha, v_2 + \beta).$$

En posant

$$U = u_1 + \alpha, \qquad V = v_1 + \beta$$

nous avons

$$x(U, V) = x(U + u_2 - u_1, V + v_2 - v_1),$$

ce qui montre que les couples u_1, v_1 et u_2, v_2 doivent être congruents.

2. Surfaces hyperelliptiques. — DÉFINITION. — *On appelle surface hyperelliptique une surface pour laquelle les coordonnées d'un point sont des fonctions abéliennes de deux variables.*

Le nombre de couples u, v correspondant à un point x, y, z est le rang de la surface.

Le diviseur de la première période est le diviseur de la surface.

En supposant le rang égal à 1, un seul couple u, v correspond à un point x, y, z; par conséquent, si $t(u, v)$ est une quatrième fonction abélienne, aux mêmes périodes, une seule valeur de t correspond à chaque point x, y, z; t s'exprime donc rationnellement en x, y, z; il en résulte que toutes les surfaces hyperelliptiques de rang 1, dont les coordonnées admettent les mêmes périodes, sont des transformées birationnelles les unes des autres; à un tableau de périodes correspond une infinité de surfaces, il suffit, pour cela, qu'il existe une fonction irréductible admettant ces périodes.

3. Degré de la relation entre trois fonctions abéliennes. — Soit à calculer le nombre de couples u, v correspondant à un couple x, y; le problème revient à trouver le nombre de zéros communs à deux fonctions thêta de deux variables.

Considérons les fonctions $\Theta_1(u, v)$, $\Theta_2(u, v)$ d'ordres respectifs m et n admettant les périodes du tableau

$$\begin{matrix} 2i\pi & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 2i\pi & \beta & \gamma \end{matrix}$$

et regardons les périodes α, β, γ comme variables; quelles que soient leurs valeurs, satisfaisant toutefois à la condition $\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1 < 0$, les fonctions ne cessent pas d'exister et d'avoir le même nombre de zéros communs; pour écarter le cas où le couple x, y serait exceptionnel pour l'*une* de ces fonctions, il suffit de modifier la variation des périodes. Faisons ainsi tendre α vers $1 + hi$, β vers 0, et γ vers $1 + ki$; les fonctions sont devenues $\theta_1(u, v)$ et $\theta_2(u, v)$. $\theta_1(u, v)$ est le produit d'une fonction thêta de la variable u d'ordre m, admettant les périodes $2i\pi$ et $1 + hi$ et d'une fonction thêta de la variable v, d'ordre m admettant les périodes $2i\pi$ et $1 + ki$; de même pour $\theta_2(u, v)$, l'ordre étant n. Il est visible que ces fonctions ont $2mn$ zéros communs.

Deux fonctions thêta de deux variables, d'ordres m et n, ont $2mn$ zéros communs.

Pour avoir le degré du polynome $S(x, y, z)$, il faut déterminer combien de couples u, v sont indépendants de x, y et leur donnent la forme forme $\frac{0}{0}$; soit q le nombre de ces couples; le polynome S est de degré $2mn - q$. Si le diviseur de la surface est M, le degré est $\frac{2mn - q}{M}$

4. Théorème d'addition. — Une conséquence très importante du théorème I est l'existence d'un théorème d'addition pour un couple de fonctions abéliennes.

Si l'on donne

$$x_0 = \varphi(u_0, v_0), \qquad y_0 = \psi(u_0, v_0), \qquad x_1 = \varphi(u_1, v_1), \qquad y_1 = \psi(u_1, v_1)$$
$$x = \varphi(u_1 + u_0, v_1 + v_0), \qquad y = \psi(u_1 + u_0, v_1 + v_0),$$

on dit que les fonctions x et y admettent un théorème d'addition si x et y sont algébriques en x_0, y_0 et x_1, y_1.

Le théorème d'addition résulte immédiatement du théorème I.

5. Système d'intégrales de différentielles totales. — Poursuivant l'analogie avec les fonctions elliptiques, nous allons démontrer le théorème.

Théorème III. — *Un couple de fonctions abéliennes x, y est défini par l'inversion d'un système de différentielles totales algébriques.*

Posons

$$x_1 = \varphi(u, v), \qquad y_1 = \psi(u, v), \qquad x_0 = \varphi(\alpha, \beta), \qquad y_0 = \psi(\alpha, \beta)$$
$$x = \varphi(u + \alpha, v + \beta), \qquad y = \psi(u + \alpha, v + \beta),$$
$$u + \alpha = \rho(x, y), \qquad v + \beta = \rho_1(x, y),$$
$$du = \frac{\partial\rho}{\partial x}dx + \frac{\partial\rho}{\partial y}dy, \qquad dv = \frac{\partial\rho_1}{\partial x}dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y}dy,$$

du et dv forment un système de différentielles totales; reste à démontrer qu'elles sont algébriques.

On a

$$x = \mathrm{R}(x_0, y_0, u, v), \qquad y = \mathrm{R}_1(x_0, y_0, u, v);$$

les fonctions R et R_1 sont algébriques en x_0 et y_0; il en résulte que $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$ le sont aussi; d'ailleurs inversement x_0 et y_0 sont algébriques en x et y et il en est de même de leurs quatre dérivées partielles, lorsqu'on a remplacé x_0 et y_0 par leurs expressions en x et y; elles contiennent donc x et y algébriquement et peuvent contenir u et v; mais nous avons éliminé x_0 et y_0, c'est-à-dire α et β, et comme α et β figurent dans x et y seulement par les combinaisons $u + \alpha$ et $v + \beta$, u et v sont éliminés en même temps que α et β. Ainsi les dérivées partielles de x et y par rapport à u et v sont fonctions algébriques de x et y; inversement, les dérivées partielles de u et v par rapport à x et y sont fonctions algébriques de x et y.

D'autre part, u et v ne sont jamais infinies : les intégrales des différentielles du et dv sont donc de première espèce, c'est-à-dire de première espèce par rapport à l'une des variables, l'autre ayant une valeur constante quelconque.

En résumé, x et y, fonctions abéliennes de u et v, sont définies par l'inversion d'un système de différentielles totales algébriques

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} du = P(xy)\, dx + Q(xy)\, dy \\ dv = P_1(xy)\, dx + Q_1(xy)\, dy, \end{cases} \quad PQ_1 - P_1Q \neq 0,$$

et les intégrales de ces différentielles sont de première espèce.

Nous pouvons modifier la définition de ce système (4); soit $z(u, v)$ une fonction abélienne aux mêmes périodes, toute fonction aux mêmes périodes est rationnelle en x, y, z, en particulier $P, Q, P_1 Q_1$; d'ailleurs x, y, z sont liées par l'équation $S(x, y, z) = 0$, surface de rang 1 appartenant au tableau de périodes : $S(x, y, z) = 0$ possède donc deux intégrales de différentielles totales de première espèce dont l'inversion définit x et y.

Si l'on intègre ces différentielles, la limite inférieure étant fixe et la limite supérieure variable, les valeurs u et v des intégrales sont fonctions de la limite supérieure; si, les limites restant fixes, on change le chemin d'intégration, les valeurs des intégrales ne peuvent différer que de constantes; or, à un système x, y, z ne correspondent qu'un couple u, v et les couples congruents; par conséquent, les constantes trouvées sont des périodes des intégrales : elles découlent de quatre couples de périodes possédant les propriétés des couples de périodes des fonctions uniformes.

Remarque I. — On a introduit ci-dessus une fonction z telle que P, Q, P_1, Q_1 soient rationnels en x, y, z; il suffit pour cela de poser $z = aP + bQ + cP_1 + dQ_1$: z est algébrique en x et y et à un système x, y, z correspond un seul système P, Q, P_1, Q_1; enfin z est fonction abélienne. La surface $S(x, y, z) = 0$ formée avec cette fonction particulière z est de rang 1; toute autre fonction aux mêmes périodes en est une transformée birationnelle.

Remarque II. — On a montré qu'à tout système de périodes on peut adjoindre une surface S qui possède deux intégrales de première espèce. Elle n'en possède pas d'autre; en effet, soit $A\, dx + B dy$ une autre différentielle totale; en remplacant x, y, z en u et v, elle devient

$A_1\,du + B_1\,dv$; les fonctions A_1 et B_1 étant méromorphes; l'intégrale d'une telle différentielle ne peut être finie que si ces fonctions sont des constantes et par suite la différentielle proposée n'est pas distincte des différentielles du et dv.

En particulier, un système de différentielles totales peut être défini par une fonction abélienne irréductible $x = \varphi(u, v)$ et ses dérivées partielles

$$y = \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad z = \frac{\partial x}{\partial v}.$$

On a alors

$$du = P\,dx + Q\,dy, \qquad dv = P_1\,dx + Q_1\,dy.$$

Où bien P, Q, P_1; Q_1 sont rationnels en x, y, z et la propriété est démontrée; ou bien P, Q, P_1, Q_1 sont algébriques. Introduisons alors une nouvelle fonction t liée aux précédentes par $\sigma(x, y, z, t) = 0$ de degré m en t et telle que P, Q, P_1, Q_1 soient rationnels en t : il suffit pour cela de poser $t = aP + bQ + cP_1 + dQ_1$.

t est algébrique en x et y; à un couple u, v correspondent m systèmes de valeurs de P, Q, P_1, Q_1 donc m valeurs de t; d'autre part, à un système P, Q, P_1, Q_1 correspond une valeur de t; et inversement, à un système x, y, t correspond un système P, Q, P_1, Q_1; z est donc rationnel en x, y, t et aussi P, Q, P_1, Q_1.

Considérons le système d'intégrales

$$J = \int_{x_0 y_0 z_0 t_0}^{xyzt} P\,dx + Q\,dy, \qquad K = \int_{x_0 y_0 z_0 t_0}^{xyzt} P_1\,dx + Q_1\,dy.$$

Au point x, y, z correspondent m valeurs de t : $t_1, t_2, \ldots, t_m$, donc m couples u, v; posons

$$\begin{aligned} u_i &= J_i = J(x, y, z, t_i), \qquad & v_i &= K_i = K(x, y, z, t_i),\\ U &= u_1 + u_2 + \ldots + u_m, \qquad & V &= v_1 + v_2 + \ldots + v_m, \end{aligned}$$

U et V sont des intégrales de différentielles totales à coefficients rationnels en x, y, z; elles ont les mêmes périodes que u et v; par suite, en les appelant J' et K', on a les relations

$$J' = \lambda J + \mu K + \text{Cte}, \qquad K' = \lambda' J + \mu' K + \text{Cte}.$$

Si $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ n'est pas nul, la transformation inverse est possible, les coefficients de J et K sont donc rationnels et m est égal à 1.

Si $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ est nul, nous allons montrer que la fonction x est réductible. En effet, nous avons

$$dx = y\,du_i + z\,dv_i, \qquad dv_i = P_1\,dx + Q_1\,dy,$$

d'où, en ajoutant les m égalités,

$$m\,dx = y\,dU + z\,dV, \qquad dV = \mathfrak{P}_1\,dx + \mathfrak{Q}_1\,dy,$$

$\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{Q}_1$ étant rationnels en x, y, z. Si $\mathfrak{Q}_1$ n'est pas nul, on peut résoudre ce système en dx, dy; dU et dV sont donc des différentielles distinctes et nous sommes ramenés au cas précédent; si $\mathfrak{Q}_1 = 0$, $\mathfrak{P}_1$ est fonction de x seul et l'on a la relation

$$\int \mathfrak{P}_1 dx = \alpha J + \beta K + \text{Cte}.$$

Si $\mathfrak{P}_1 = 0$, on a $dV = 0$ et il reste seulement l'équation $m\,dx = y\,dU$ et y est fonction de x seul. Dans les deux cas, on a une relation

$$\int f(x)\,dx = \alpha J + \beta K + \text{Cte}, \qquad F(x) = \alpha u + \beta v + \text{Cte},$$

x est donc fonction réductible de u et v.

Il est donc certain que, si x est irréductible, $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ est différent de zéro et que les coefficients P, Q, P_1, Q_1 sont rationnels en x, y, z

CHAPITRE IV

Sur les systèmes de différentielles totales algébriques de première espèce

1. Sur l'inversion d'un système de différentielles. — Dans ce chapitre sera démontrée la proposition réciproque de celle qui a fait l'objet du théorème III.

L'inversion d'un système de différentielles totales algébriques de première espèce ayant quatre couples de périodes distinctes conduit à un couple de fonctions qui s'expriment algébriquement à l'aide de certaines fonctions abéliennes.

Soit donné le système

$$(1) \qquad \begin{cases} du = \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy, \\ dv = \mathrm{P}_1 dx + \mathrm{Q}_1 dy, \end{cases} \qquad \mathrm{PQ}_1 - \mathrm{P}_1\mathrm{Q} \neq 0.$$

On rappelle que l'équation $\mathrm{H}(x, \xi) = 0$ de degré n en ξ conduit à l'intégrale abélienne $\mathrm{I} = \int_{x_0\xi_0}^{x\xi} \xi(x)\,dx$ qui a n déterminations; en changeant le chemin d'intégration, une de ces déterminations prend des valeurs qui diffèrent par des constantes; ces constantes sont obtenues en effectuant l'intégration sur des lacets partant du point initial et entourant les points singuliers; la combinaison de ces constantes donne les périodes de l'intégrale I.

Considérons l'intégrale $\mathrm{J} = \int \mathrm{P}(x, \bar{y})dx$ où y a la valeur constante $\bar{y}$; les périodes de cette intégrale doivent être indépendantes de $\bar{y}$, puisque nous avons une intégrale de différentielle totale dont les déterminations diffèrent par des constantes. Réciproquement, supposons que les périodes de $\mathrm{J} = \int \mathrm{P}(x, \bar{y})\,dx$ sont indépendantes de $\bar{y}$; la dérivée $\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial y} = \int \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\,dx$ a des périodes nulles, J est donc une fonction $\mathrm{R}(x, y)$ algébrique en x et y; par conséquent, $\mathrm{P}(x, y)\,dx$ est la première partie d'une différentielle totale.

Revenons maintenant à l'intégrale I, l'inversion de cette intégrale va nous permettre de préciser ses périodes. Démontrons d'abord que la fonction inverse $x(u)$ ne présente que des singularités algébriques. Soit a une valeur de x, α et u_1 les valeurs correspondantes de ξ et u; on a

$$u - u_1 = \int_{a,\alpha}^{x\xi} \xi dx = I_1(x). \tag{2}$$

La fonction $I_1(x)$ est algébroïde pour $x = a$; par conséquent, cette équation (2) définit $x(u)$ qui, pour $u = u_1$, est algébroïde et prend la valeur a. Soit u_0 le premier point singulier non algébrique rencontré en faisant le prolongement analytique de $x(u)$; quand u tend vers u_0, le couple x, ξ tend vers le couple a_0, α_0; mais alors, pour certaines valeurs de u voisines de u_0, le couple x, ξ est voisin du couple a_0, α_0 : $x(u)$ est algébroïde et se confond avec la fonction définie par l'équation

$$u - u_0 = \int_{a_0\alpha_0}^{x\xi} \xi(x)dx.$$

La fonction inverse $x(u)$ ne présente donc que des singularités algébriques.

Il en résulte que les vecteurs périodes ne peuvent avoir même ligne d'action : en effet toutes les valeurs de I sont finies et restent dans un certain champ; si toutes les périodes sont parallèles, l'addition d'un nombre quelconque de périodes transporte ce champ parallèlement à lui-même et il y a un domaine que les variations de u n'atteignent pas, ce qui est absurde, car, $x(u)$ n'ayant que des singularités algébriques, on peut faire décrire à la variable un chemin qui atteint le domaine en question et, par suite, on peut faire décrire à x le chemin correspondant. Deux périodes au moins ont donc leur rapport imaginaire. S'il n'y a que deux périodes, la fonction $x(u)$ n'a que n branches, elle est fonction algébrique de fonctions elliptiques.

Des résultats analogues vont être établis pour les couples d'intégrales. Nous nous donnons les fonctions algébriques $h(x)$ et $h_1(x)$, et nous introduisons ξ liée à x par $F(x, \xi) = 0$ et telle que h et h_1 soient rationnels en x et ξ. Posons

$$J = \int h(x)\, dx, \qquad K = \int h_1(x)\, dx, \tag{3}$$

$$\begin{cases} u = J(x, \xi) + J(y, \eta), \\ v = K(x, \xi) + K(y, \eta), \end{cases} \tag{4}$$

Remarquons d'abord qu'il y a des valeurs exceptionnelles qui laissent u et v constants; elles satisfont à

$$h(x, \xi)\, h_1(y, \eta) - h(y, \eta)\, h_1(x, \xi) = 0,$$

mais cette condition n'est pas suffisante; en supposant déterminées ces valeurs, on les vérifiera par les équations

$$(5) \qquad y = \varphi(x, \xi), \qquad \eta = \varphi_1(x, \xi)$$

qui donnent $du = dv = 0$.

Par exemple, pour le système qui sera étudié plus loin,

$$du = \frac{dx}{\xi} + \frac{dy}{\eta}, \qquad dv = \frac{x\,dx}{\xi} + \frac{y\,dy}{\eta},$$

avec $\xi^2 = \mathrm{R}(x)$, $\eta^2 = \mathrm{R}(y)$, le polynome R étant de degré inférieur ou égal à 5, les valeurs exceptionnelles sont données par

$$y = x, \qquad \eta = -\xi.$$

En regardant x, ξ, y, η comme les coordonnées d'un point dans l'espace E_4, les équations (5) définissent une courbe exceptionnelle située sur la multiplicité

$$\mathrm{F}(x, \xi) = 0, \qquad \mathrm{F}_1(y, \eta) = 0.$$

Soient $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots$, les courbes exceptionnelles distinctes, c'est-à-dire telles qu'on ne puisse passer de l'une à l'autre d'une façon continue; le long de la courbe C_1, par exemple, u et v sont déterminés à une période près, puisque du et dv sont nuls tout le long de cette courbe; par suite, lorsque le point x, ξ, y, η décrit un chemin voisin de C_1, les valeurs obtenues pour u et v tendent vers des valeurs limite a et b bien déterminées.

Revenons au système (4) en supposant que le point final x, ξ, y, η de l'intégration n'appartient pas à une courbe exceptionnelle; les seconds membres sont algébroïdes et ces équations définissent x et y et par suite aussi ξ et η comme fonctions algébroïdes de u et v.

Les singularités du couple $x(u, v)$, $y(u, v)$ ne peuvent être que des singularités algébriques, en dehors des couples exceptionnels. Soit $u = a$, $v = b$ une singularité non algébrique; quand u et v tendent vers a et b, x, ξ, y, η tendent vers x_1, ξ_1, y_1, η_1; ce point limite est situé sur une courbe exceptionnelle, car s'il n'en était pas ainsi, il ne saurait exister pour ce point de singularité non algébrique; d'autre part, ces singularités sont isolées, car si u et v prennent des valeurs voisines de a et b, nous savons que le point x, ξ, y, η tend vers la même courbe exceptionnelle.

On pourra toujours, dans le prolongement analytique des fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ éviter les couples exceptionnels.

Il résulte de ces propriétés que les vecteurs périodes de u et v ne peuvent être tous situés dans un même plan de l'espace E_4 en effet, si nous allons du point x_0, y_0 au point x, y sans franchir les coupures, les modules des intégrales restent finis; l'ensemble des valeurs du couple u, v est donc limité et l'addition des périodes le transporte parallèlement à lui-même; il y aurait donc des portions de l'espace qui ne seraient pas atteintes par les variables u, v ce qui est contraire au fait que le couple $x(u, v)$, $y(u, v)$ peut être prolongé dans tout l'espace en évitant, bien entendu, les couples exceptionnels.

En particulier, le couple d'intégrales J, K admet au moins quatre couples de périodes formant un véritable prismatoïde.

Nous supposons maintenant que le couple d'intégrales a quatre couples de périodes et nous allons démontrer que les fonctions inverses n'ont qu'un nombre fini de déterminations.

En général, à un système x, ξ, y, η correspondent un couple u, v et les couples congruents; par conséquent dans un prismatoïde de périodes il y a un seul couple correspondant au système donné; il y a aussi dans ce domaine un nombre fini de couples exceptionnels a, b. Supposons qu'à un couple u, v non exceptionnel correspondent n points x, ξ, y, η; comme on peut prolonger ces solutions dans tout le domaine, en évitant les couples exceptionnels, à tout couple u, v correspondent n points x, ξ, y, η; en outre ce nombre n est fini; en effet, si ces points sont en nombre infini, ils admettent un point limite M qu'un changement de variables ramène à l'origine; en même temps, on peut ramener le couple u, v au couple 0, 0. Alors pour certains points x, ξ, y, η voisins de M, les intégrales ont des valeurs nulles; le point M n'est pas sur une courbe exceptionnelle, puisque le couple 0, 0 n'est pas exceptionnel; les intégrales sont nulles pour le point M lui-même en raison de leur continuité au voisinage de M; le couple 0, 0 ne présente donc aucune particularité et le nombre n est fini.

Le système d'équations (4) définit des fonctions x et y à un nombre fini de branches, le même pour tout couple non exceptionnel; à un couple exceptionnel correspond une infinité continue de points x, y situés sur une courbe exceptionnelle.

Soit

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n = 0 \tag{6}$$

l'équation à laquelle satisfait $x(u\ v)$; il est impossible que $x(u, v)$ satisfasse à une équation de degré moindre; il en résulte que les fonctions A_i admettent les périodes du couple d'intégrales; en effet une certaine branche de la fonction $x(u, v)$ admet ces périodes; si les coefficients ne l'admettaient pas, nous aurions au moins deux équations (6) distinctes, d'où une équation de degré moindre que l'équation (6) à laquelle satisferait la fonction $x(u, v)$.

D'autre part, les fonctions $A_i(u, v)$ sont uniformes et ne présentent, comme x et y, que des singularités algébriques en dehors des couples exceptionnels; ces singularités sont donc des pôles; pour les couples exceptionnels, x et y sont indéterminés; certaines des fonctions A_i se présentent donc sous la forme $\frac{0}{0}$.

Les fonctions $A_i(u, v)$ sont donc uniformes, méromorphes et admettent quatre couples de périodes; ce sont des fonctions abéliennes, elles s'expriment algébriquement en fonction de deux d'entre elles. Le couple x, y est lié algébriquement à deux fonctions abéliennes admettant les périodes du couple u, v.

En d'autres termes, on peut effectuer une transformation

$$x = G(X, Y), \qquad y = G_1(X, Y),$$

telle que le système (4) se transforme dans le système

$$\begin{aligned} du &= P\ dX + Q\ dY, \\ dv &= P_1\, dX + Q_1\, dY \end{aligned}$$

qui définit des fonctions abéliennes X, Y.

On peut faire, de ces intégrales, deux combinaisons linéaires qui admettent le système canonique de périodes

$$\begin{matrix} 2i\pi & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 2i\pi & \beta & \gamma \end{matrix} \qquad \beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1 < 0$$

2. Application du théorème général. — On connaît des intégrales de première espèce à quatre périodes : elles sont formées avec la racine carrée d'un polynome du sixième ou du cinquième degré; en posant $\xi^2 = P_5(x)$, elles prennent la forme

$$\int \frac{dx}{\xi}, \quad \int \frac{x\,dx}{\xi}.$$

On peut trouver des combinaisons

$$\int \frac{(\lambda + \mu x)dx}{\xi}, \quad \int \frac{(\lambda' + \mu' x)\,dx}{\xi},$$

qui admettent les périodes du tableau canonique; par conséquent, le système

$$du = \frac{dx}{\xi} + \frac{dy}{\eta}, \qquad dv = \frac{x\,dx}{\xi} + \frac{y\,dy}{\eta} \tag{7}$$

détermine, par son inversion, des fonctions $x(u, v), y(u, v)$ qui dépendent algébriquement de fonctions abéliennes.

En particulier, les fonctions

$$x + y = \mathrm{X}(u, v), \qquad xy = \mathrm{Y}(u, v)$$

sont uniformes et sont donc des fonctions abéliennes; en effet, une solution du système (7) a un nombre fini de déterminations et n'admet de singularités algébriques que pour le couple exceptionnel $u = \alpha$, $v = \beta$ qui donne $x = y$, $\eta = -\xi$, comme on l'a vu plus haut; X et Y ne peuvent cesser d'être uniformes que dans le voisinage d'une singularité non polaire; soit u_0, v_0 cette singularité distincte de α, β; x, y, ξ, η ont alors des valeurs déterminées: supposons ξ et η non nuls; si x est différent de y, nous pouvons tirer de (7)

$$dx = \frac{\xi}{x - y}(dv - y\,du), \qquad dy = \frac{-\eta}{x - y}(dv - x\,du). \tag{8}$$

Les coefficients de ces différentielles sont holomorphes, x et y sont eux-mêmes holomorphes, X et Y sont donc uniformes.

Si $x = y$, nous devons écarter $\xi = -\eta$ et conserver $\xi = \eta$; tirons de (8) les combinaisons

$$(x - y)(dx - dy) = (\xi + \eta)\,dv + (y\xi - x\eta)\,du \tag{9}$$

$$(x - y)(dx + dy) = (\xi - \eta)\,dv - (y\xi - x\eta)\,dv \tag{10}$$

et transformons ces équations en posant $(x - y)^2 = t$; nous avons

$$x = \frac{\mathrm{X} + \sqrt{t}}{2}, \qquad y = \frac{\mathrm{X} - \sqrt{t}}{2},$$

$\xi + \eta$ et $y\xi + x\eta$ qui sont symétriques en x et y ne renferment que X et t sans aucun radical : ce sont des expressions holomorphes en X et t; d'autre part, le premier membre de (9) est $\frac{dt}{2}$; par conséquent, nous avons une équation où $\sqrt{t}$ a disparu; pour la seconde, nous avons

$$\frac{\xi - \eta}{x - y} = \frac{\xi^2 - \eta^2}{x - y}\,\frac{1}{\xi + \eta}, \qquad \frac{y\xi - x\eta}{x - y} = \frac{y^2\xi^2 - x^2\eta^2}{x - y}\,\frac{1}{y\xi + x\eta}$$

qui ne renferment pas $\sqrt{t}$; les équations (9) et (10) définissent donc X et t comme fonctions holomorphes de u et v; or $t = X^2 - 4Y$; par conséquent Y est aussi holomorphe.

Si enfin x est infini, on posera $x = \frac{1}{x_1^2}$ et le résultat sera le même.

Supposons maintenant ξ nul, x étant égal à une racine que nous appellerons e_1 du polynome $P(x)$; posons $x - e_1 = x_1^2$; on voit bien facilement que le nouveau système en dx_1, dy a ses coefficients holomorphes, x_1 et y sont donc holomorphes.

Il n'y aurait de difficulté que si l'on avait à la fois $\xi = \eta = 0$ ou bien $x = y = \infty$. Mais ces combinaisons ne correspondent qu'à des couples en nombre fini.

En laissant de côté certains couples exceptionnels, les fonctions X et Y sont donc uniformes, méromorphes, quadruplement périodiques. En posant

$$X = x + y, \qquad Y = xy, \qquad Z = \xi + \eta,$$

on définit une surface hyperelliptique; à un point X, Y, Z correspondent deux couples x, y symétriques; mais le système (7) étant aussi symétrique, les valeurs de u, v sont les mêmes pour ces deux couples A un point X, Y, Z correspond donc un seul couple u, v.

La surface $S(X, Y, Z) = 0$ ainsi définie est du quatrième degré en Z; c'est une surface hyperelliptique proprement dite, car la transformation homographique générale permet de donner à P les racines 0 et 1; il reste trois racines qui correspondent aux trois nombres α, β, γ du tableau canonique.

3. Inversion. — Pour préciser les intégrales du système (7), $P(x)$ étant du cinquième degré, nous prendrons comme point initial des intégrations le point à l'infini.

Il y a un couple exceptionnel : $u = v = 0$; en effet si nous intégrons le long d'une portion quelconque de la courbe exceptionnelle $x = y$, $\xi = -\eta$, nous obtenons la valeur nulle pour les deux intégrales u et v.

Dans la suite des calculs, la forme des courbes en u, v données par $x = x_0$ nous sera utile. Posons

$$y = x_0 + h, \qquad \eta = -\xi_0 + k,$$

nous avons

$$(11) \qquad \begin{cases} u = J(x_0 + h) - J(x_0) = hJ'(x_0) + \dots \\ v = J_1(x_0 + h) - J_1(x_0) = hJ_1'(x_0) + \dots \end{cases}$$

d'où la relation cherchée

$$v = x_0 u + \dots . \tag{12}$$

Les courbes $x = x_0$ ont une tangente simple à l'origine.

Considérons la fonction $T = (x - a)(y - a) = X - aY + a^2 = \dfrac{\varphi(u,v)}{\psi(u,v)}$ c'est une fonction abélienne; elle est égale au quotient de deux fonctions thêta du même ordre hM et de diviseur M; en particularisant a, on a

$$X = \frac{\Theta_1(u, v)}{\Theta_0(u, v)}, \qquad Y = \frac{\Theta_2(u, v)}{\Theta_0(u, v)}.$$

Cherchons les valeurs u_0, v_0 indépendantes de a qui donnent à T une forme indéterminée; cela ne peut avoir lieu que si x et y sont en même temps indéterminés, c'est-à-dire pour le couple exceptionnel $u = v = 0$. Nous allons chercher la forme de T au voisinage de ce point en mettant en évidence les groupes homogènes de φ et ψ

$$T = \frac{\varphi_n(u, v) + \varphi_{n+1}(u, v) + \dots}{\psi_n(u, v) + \psi_{n+1}(u, v) + \dots}.$$

La courbe $T = T_0$ a n branches passant par l'origine : toutes ces branches ont des équations de la forme $v = (a + \sqrt{T_0})u + \dots$ En effet, u et v tendent vers zéro, $x - y$ tend vers zéro et $(x - a)^2$ tend vers T_0; à une branche $x = x_0$ correspond une branche $T = T_0$; comme, pour la première, on a $v = x_0 u + \dots$, on a pour la seconde $T = T_0$

$$v = (a + \sqrt{T_0})u + \dots$$

Alors $\varphi_n(u, v) - T_0 \psi_n(u,v)$ qui, égalé à zéro, représente l'ensemble des tangentes à l'origine à la courbe $T = T_0$ est un produit d'expressions $v - au - \sqrt{T_0}u$ par une fonction $R(T_0)$; le radical $\sqrt{T_0}$ doit disparaître dans le produit; il y a donc deux facteurs conjugués et $R(T_0)$ est indépendant de T_0.

Nous avons donc

$$\varphi_n - T_0\psi_n = C\,[(v - au)^2 - T_0 u^2],$$
$$\varphi_n = C(v - au)^2, \qquad \psi_n = Cu^2,$$

ce qui donne

$$\Theta_0 = u^2 + \dots, \qquad \Theta_1 = v^2 + \dots, \qquad \Theta_2 = 2uv + \dots,$$

$$X = \frac{v^2 + \dots}{u^2 + \dots}, \qquad Y = \frac{2uv + \dots}{u^2 + \dots}.$$

Par conséquent, les équations $X = X_0$, $Y = Y_0$ admettent la racine quadruple $u = v = 0$; ainsi le nombre de solutions communes aux équations

$$\Theta_0 = 0, \qquad \Theta_1 = 0, \qquad \Theta_2 = 0$$

est $2h^2M - 4 = 4$; il reste à choisir entre les deux combinaisons

$$h = 1, \quad M = 4 \qquad \text{et} \qquad h = 2, \quad M = 1,$$

qui sont les seules possibles.

Remarquons d'abord que le radical $\sqrt{(x-e)(y-e)}$ est une fonction uniforme de u et v (e désigne une racine du polynome $P(x)$). En effet, $Z = \sqrt{P(x)} + \sqrt{P(y)}$ est une fonction uniforme, donc aussi son carré, donc aussi le produit $\sqrt{P(x)}\sqrt{P(y)}$; ce produit est égal au quotient de deux fonctions thêta; or $P(x)\,P(y)$ est un produit d'expressions telles que $(x-e)(y-e) = xy - e(x+y) + e^2$; d'après les expressions de X et Y, il se met sous la forme $\dfrac{\Phi(u,v)}{\Theta_0^5(u,v)}$ nous avons donc

$$\sqrt{P(x)\,P(y)} = \frac{\varphi(u,v)}{\psi(u,v)} = \sqrt{\frac{\Phi(u,v)}{\Theta_0^5(u,v)}}$$

et par suite

$$\Phi = e^{R}\varphi^2, \qquad \Theta_0^5 = e^{R}\psi^2,$$

R étant un polynome du deuxième degré en u et v; Θ_0 est donc un carré parfait puisque nous avons $\sqrt{\Theta_0} = e^{\frac{R}{2}}\,\dfrac{\psi}{\Theta_0^2}$.

Il en résulte que $\sqrt{xy}$ est une fonction uniforme : $\sqrt{xy} = \dfrac{\sqrt{\Theta_2}}{\sqrt{\Theta_0}}$.

Le dénominateur est une fonction entière et par suite le numérateur aussi : ceci va permettre de faire le choix entre les deux combinaisons de valeurs possibles pour M et h.

Pour $M = 4$, il y a quatre fonctions distinctes d'ordre 4; deux d'entre elles doivent être carrés parfaits, quelles que soient les périodes. Faisons tendre β vers zéro, ce qui donne le tableau

$$\begin{matrix} \dfrac{i\pi}{2} & 0 & \alpha & 0 \\[2ex] 0 & 2i\pi & 0 & \gamma \end{matrix}$$

La fonction thêta se décompose en un produit dont les facteurs sont une fonction thêta de u d'ordre 4 et une fonction thêta de v d'ordre 1; celle-ci devrait être carré parfait, ce qui est impossible, puisque ses zéros sont simples. Nous sommes donc ramenés à la solution unique : $M = 1$, $h = 2$.

En résumé, étant donné le système (7) on peut en tirer deux combinaisons linéaires, de façon que les fonctions

$$X = x + y, \qquad Y = xy$$

soient des fonctions abéliennes, quotients de fonctions thêta d'ordre 2 relatives au tableau de périodes

$$\begin{matrix} 2i\pi & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 2i\pi & \beta & \gamma \end{matrix} \qquad \beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1 < 0$$

4. Les 16 fonctions du premier ordre à caractéristiques. — Il s'agit maintenant de préciser ces fonctions thêta d'ordre 2 qui doivent être carrés parfaits

Considérons une fonction $\theta(u, v)$ entière qui satisfait aux relations

$$\begin{aligned} \theta(u + 2i\pi, v) &= \theta(u, v)\ e^{\omega i\pi}, \\ \theta(u, v + 2i\pi) &= \theta(u, v)\ e^{\omega' i\pi}, \\ \theta(u + \alpha, v + \beta) &= \theta(u, v)\, e^{-\left(u+\frac{\alpha}{2}\right)}\ e^{\theta i\pi}, \\ \theta(u + \beta, v + \gamma) &= \theta(u, v)\, e^{-\left(v+\frac{\gamma}{2}\right)}\ e^{\theta' i\pi} \end{aligned}$$

Les quatre nombres $\omega, \omega', \theta, \theta'$ qui sont égaux à 0 ou 1, forment la caractérisque de la fonction qui est notée $\theta\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}(u, v)$. Son carré est une fonction thêta du second ordre; ces fonctions sont donc les fonctions cherchées.

Il y a 16 fonctions de cette sorte, car il y a 16 caractérisques. Nous connaissons déja le développement de la fonction

$$\theta\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}(u\ v) = \sum\sum e^{(mu+nv)}\ e^{\frac{1}{2}\varphi(m,n)}$$

On formera de même

$$\theta\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}(u\ v) = \sum\sum e^{\left(m+\frac{\theta}{2}\right)u+\left(n+\frac{\theta'}{2}\right)v}\ e^{i\pi(m\omega+n\omega')}\ e^{\frac{1}{2}\varphi\left(m+\frac{\theta}{2}, n+\frac{\theta'}{2}\right)}$$

Pour étudier la parité de ces fonctions, on remarquera que, changer

u et v de signes revient à changer $m + \dfrac{\theta}{2}$, $n + \dfrac{\theta'}{2}$ de signes; par ce changement, φ n'est pas affecté et

$$e^{i\pi(m\omega+n\omega')} \quad \text{devient} \quad e^{i\pi(m\omega+n\omega')-i\pi(\omega\theta+\omega'\theta')}$$

Par conséquent,

si $\omega\theta + \omega'\theta'$ est pair, la fonction est paire,
si $\omega\theta + \omega'\theta'$ est impair, la fonction est impaire.

Les caractéristiques impaires sont celles qui contiennent un seul zéro, ou bien deux zéros dans une colonne; elles sont au nombre de 6. Il y a donc 10 fonctions θ du premier ordre paires et 6 impaires.

5. Zéros des fonctions. — Considérons la période

$P = 2pi\pi + q\alpha + q'\beta$, $P' = 2p'i\pi + q\beta + q'\gamma$ (p, p', q, q' égaux à 0 ou 1)

on a, en conséquence des égalités de définition,

$$\theta\begin{vmatrix}\omega & \omega' \\ \theta & \theta'\end{vmatrix}(u + P, v + P') = \theta(u, v)\ e^{-qu-q'v}\, e^{-\frac{1}{2}(q^2\alpha+2qq'\beta+q'^2\gamma)} \times e^{i\pi(q\theta+q\theta'+p\omega+p'\omega}$$

En posant $u = -\dfrac{P}{2}$, $v = -\dfrac{P'}{2}$ on en déduit

$$\theta\left(\frac{P}{2}, \frac{P'}{2}\right) = \theta\left(-\frac{P}{2}, -\frac{P'}{2}\right)e^{i\pi(pq+p'q'+q\theta+q'\theta'+p\omega+p'\omega')}$$
$$= \theta\left(-\frac{P}{2}, -\frac{P'}{2}\right)e^{i\pi[(p+\theta)(q+\omega)+(p'+\theta')(q'+\omega')-\omega\theta-\omega'\theta']}$$

Par suite, si

$(\omega\theta + \omega'\theta')$ pair et $(p+\theta)(q+\omega)+(p'+\theta')(q'+\omega')$ impair,

$$\theta\left(\frac{P}{2}, \frac{P'}{2}\right) = 0$$

si

$(\omega\theta + \omega'\theta')$ impair et $(p+\theta)(q+\omega)+(p'+\theta')(q'+\omega')$ pair,

$$\theta\left(\frac{P}{2}, \frac{P'}{2}\right) = 0.$$

Autrement dit, chacune des 16 fonctions θ s'annule pour six demi-périodes.

Chacune de ces demi-périodes est un zéro simple; il suffit de le démontrer pour la demi-période nulle. Si une fonction impaire l'admet comme zéro multiple, l'ordre de ce zéro est 3 au moins; cette fonction et une autre fonction θ impaire auraient alors trois zéros communs à l'origine; d'après le théorème général sur les zéros communs à deux fonctions θ du premier ordre, ce nombre ne saurait dépasser deux.

Inversement, si la demi-période est donnée, c'est-à-dire les entiers p, p', q, q', elle annule 6 fonctions θ, celles qui rendent pair ou impair $(p+\theta)(q+\omega)+(p'+\theta')(q'+\omega')$, suivant que $\omega\theta+\omega'\theta'$ est impair ou pair.[1]

Pour préciser, considérons deux fonctions impaires; elles ont comme zéro commun la demi-période nulle; l'autre zéro commun est une demi-période.

Trois fonctions impaires n'ont qu'un zéro commun : la demi-période nulle.

Considérons en effet ces trois fonctions θ, θ_1, θ_2 et les deux fonctions abéliennes

$$x=\frac{\theta_1^2}{\theta^2},\quad y=\frac{\theta_2^2}{\theta^2}.$$

A un couple x, y correspondent huit couples u, v dont certains peuvent être fixes; si les trois fonctions θ ont deux zéros communs, chacun d'eux compte double; par conséquent, les courbes en u, v

$$x\theta^2-\theta_1^2=0,\qquad y\theta^2-\theta_2^2=0$$

auraient huit points fixes, ce qui est absurde.

6. Relations entre les fonctions. — Chacune des 16 fonctions θ élevée au carré donne une fonction du deuxième ordre de caractéristique nulle; il y a 4 fonctions distinctes de cette nature, il existe donc entre les carrés de 5 fonctions θ une relation linéaire et homogène.

Considérons en particulier le carré d'une fonction impaire. Les fonctions Θ du second ordre qui s'annulent pour $u=v=0$ sont assujetties à une relation. Les carrés des fonctions θ impaires satisfont à cette relation, par conséquent quatre de ces carrés sont liés par une

[1] Pour toutes les questions qui font intervenir les caractéristiques et les demi-périodes, on utilisera l'algorithme introduit par G. Humbert, qui rend en particulier intuitives les propositions présédentes.

relation. Autrement dit, on peut choisir trois carrés $\theta_1^2, \theta_2^2, \theta_3^2$ en fonction desquels s'expriment les trois autres sous le forme.

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{l} \theta_1^2 + A_2\,\theta_2^2 + A_3\,\theta_3^2 + A_4\,\theta_4^2 = 0, \\ \theta_1^2 + A_2'\,\theta_2^2 + A_3'\,\theta_3^2 + A_4'\,\theta_5^2 = 0, \\ \theta_1^2 + A_2''\,\theta_2^2 + A_3''\,\theta_3^2 + A_4''\,\theta_6^2 = 0. \end{array}\right.$$

Soit θ_2 et θ_3 nulles pour $u = \frac{P}{2}$ $v = \frac{P'}{2}$; on a donc

$$A_4 = -\frac{\theta_1^2\left(\frac{P}{2}, \frac{P'}{2}\right)}{\theta_4^2\left(\frac{P}{2}, \frac{P'}{2}\right)}$$

On obtiendra de même les autres coefficients.

7. Les formules d'inversion explicitées. — Les 16 fonctions du premier ordre vont permettre d'effectuer l'inversion du système (7).

Nous savons déjà que $\sqrt{(x-e)(y-e)}$ ou e est une racine du polynome $P(x)$ est une fonction uniforme, quotient de deux fonctions thêta; il en est de même pour

$$\sqrt{\frac{(x-e_i)(y-e_i)}{(x-e_k)(y-e_k)}},$$

e_i et e_k étant deux racines; en effet faisons une transformation homographique qui rejette e_k à l'infini, nous sommes ramenés au cas précédent; le dénominateur dépend de e_k et nous pouvons écrire

$$\frac{(x-e_1)(y-e_1)}{\theta_1} = \dots = \frac{(x-e_6)(y=e_6)}{\theta_6},$$

les dénominateurs étant certaines fonctions thêta du second ordre carrés parfaits; les variables normales sont remplacées par certaines combinaisons linéaires de u et v.

En particulier, pour un polynome $P(x)$ du cinquième degré admettant les racines 0 et 1, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{\theta_1} = \frac{xy}{\theta_2} = \frac{(x-1)(y-1)}{\theta_3} = \dots = \frac{(x-e_6)(y-e_6)}{\theta_6}$$

Nous savons déja que $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ admettent la solution commune

$u = v = 0$; si donc les variables normales U et V sont liées à u et v par

$$(12) \qquad u = \lambda U + \mu V, \qquad v = \lambda' U + \mu' V$$

θ_1, θ_2, θ_3 sont des carrés de fonctions impaires et il en est de même pour les autres dénominateurs, car chacun des produits est indéterminé pour $u = v = 0$.

En rangeant les 6 fonctions impaires $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_6$ dans un certain ordre, nous pouvons écrire

$$(13) \quad \frac{1}{\theta_1^2(U, V)} = \frac{xy}{C_2\,\theta_2^2(U, V)} = \frac{(x-1)(y-1)}{C_3\,\theta_3^2(U, V)} = \dots = \frac{(x-e_6)(y-e_6)}{C_6\,\theta_6^2(U, V)},$$

les C_i étant des constantes.

Nous savons que $\theta_1^2, \theta_2^2, \theta_3^2, \theta_4^2$, sont liés par la relation

$$\theta_1^2 + A_2\,\theta_2^2 + A_3\,\theta_3^2 + A_4\,\theta_4^2 = 0.$$

D'autre part, les rapports donnent

$$C_2\,\theta_2^2 - xy\,\theta_1^2 = 0, \quad C_3\,\theta_3^2 - (x-1)(y-1)\,\theta_1^2 = 0,$$

$$C_4\,\theta_4^2 - (x-e_4)(y-e_4)\,\theta_1^2 = 0,$$

d'où, en éliminant x, y, xy la relation

$$e_4(e_4-1)\,\theta_1^2 + C_2(1-e_4)\,\theta_2^2 + C_3 e_4\,\theta_3^2 - C_4\,\theta_4^2 = 0.$$

Par comparaison avec (11), les coefficients A_2, A_3, A_4 ont les expressions suivantes et les coefficients A_2', A_3', ... A_4'' les expressions analogues

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{lll} A_2 = -\dfrac{C_2}{e_4}, & A_3 = -\dfrac{C_3}{1-e_4}, & A_4 = \dfrac{C_4}{e_4(1-e_4)}; \\ A_2' = -\dfrac{C_2}{e_5}, & A_3' = -\dfrac{C_3}{1-e_5}, & A_4' = \dfrac{C_5}{e_5(1-e_5)}; \\ A_2'' = -\dfrac{C_2}{e_6}, & A_3'' = -\dfrac{C_3}{1-e_6}, & A_4'' = \dfrac{C_6}{e_6(1-e_6)}. \end{array} \right.$$

Ces 9 équations vont donner C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, e_4, e_5, e_6 à l'aide des A, c'est-à-dire en fonction des demi-périodes; e_4, e_5, e_6 sont des fonctions analytiques, uniformes et holomorphes de α, β, γ dans le domaine $\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1 < 0$; les C sont des fonctions uniformes dans le même domaine.

Restent à déterminer λ, λ', μ, μ'. Nous avons

$$X = \frac{v^2 + \dots}{u^2 + \dots}, \quad Y = \frac{2uv + \dots}{u^2 + \dots}, \quad (x-e)(y-e) = \frac{(v-eu)^2 + \dots}{u^2 + \dots},$$

en comparant ces expressions avec celles des limites des rapports

$$\frac{[\lambda'U+\mu'V-e_j(\lambda U+\mu V)^2]+\dots}{(\lambda U+\mu V)^2+\dots}=C_j\frac{(\alpha_j U+\beta_j V)^2+\dots}{(\alpha_1 U+\mu_1 V)^2+\dots};$$

$$\alpha_j=\frac{\partial\theta_j}{\partial v}(0,0),\qquad \beta_j=\frac{\partial\theta_j}{\partial v}(0,0),\qquad e_2=0,\qquad e_3=1,$$

α_j, β_j sont des séries analytiques par rapport aux demi-périodes. Posant $C_j=c_j{}^2$ nous en déduisons

$$\frac{(\lambda'-e_j\lambda)\,U+(\mu'-e_j\mu)\,V}{\lambda U+\mu V}=c_j\,\frac{\alpha_j U+\beta_j V}{\alpha_1 U+\beta_1 V},$$

$$\frac{\lambda}{\alpha_1}=\frac{\mu}{\beta_1}=\frac{\lambda'}{c_2\alpha_2}=\frac{\mu'}{c_2\beta_2}=\frac{\lambda'-\lambda}{c_3\alpha_3}=\frac{\mu'-\mu}{c_3\beta_3}=\frac{\lambda'-e_j\lambda}{c_j\alpha_j}=\frac{\mu'-e_j\mu}{c_j\beta_j}.$$

Nous avons ainsi les rapports des coefficients sous la forme

$$\frac{\mu}{\lambda}=\frac{\beta_1}{\alpha_1},\qquad \frac{\mu'}{\lambda'}=\frac{\beta_2}{\alpha_2},\qquad \frac{\lambda'}{\lambda}=-\frac{\alpha_2}{\alpha_4}\,\frac{\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1}{\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2}.$$

Nous avons aussi de nouvelles expressions pour les c, ce qui donnerait des relations entre les séries thêta et leurs dérivées partielles.

Il reste à trouver un des quatre coefficients. Considérons

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=\frac{(C_2\theta_2^2-C_3\theta_3^2+\theta_1^2)^2-4C_2\theta_1^2\theta_2^2}{\theta_1^2}=\frac{F(u,v)}{(u+\varphi_3+\dots)^2}.$$

Les termes de plus bas degré de $F(u, v)$ sont certainement du sixième degré, puisque $x-y$ s'annule en même temps que u et v et que F est pair. Posons $x-y=h$ et étudions les courbes

$$h^2=\frac{\varphi_6(u,v)+\dots}{[u+\varphi_3+\dots]^2}.$$

Elles présentent à l'origine un point quadruple dont nous allons étudier une branche.

Posons $x=\dfrac{1}{x_1}$, $y=\dfrac{1}{y_1}$ car x et y sont infinis pour $u=v=0$; les intérgrales J et J_1 deviennent

$$\int_\infty^x\frac{dx}{\xi}=-\int_0^{x_1}\frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{x_1(1-x_1)(1-e_4x_1)(1-e_5x_1)(1-e_6x_1)}},$$

$$\int_\infty^x\frac{x\,dx}{\xi}=-\int_0^{x_1}\frac{dx_1}{\xi}$$

En développant en série, nous avons

$$J(x) = x_1^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{3} + \ldots\right], \qquad J_1(x) = x_1^{\frac{1}{2}}[2 + \ldots],$$

les termes non écrits s'annulent pour $x_1 = 0$; d'autre part, $y = x - h$ donne

$$y_1 = \frac{x_1}{1 - hx_1} = x_1 + hx_1^2 + h^2x_1^3 + \ldots,$$

d'où les développements en série

$$J(y) = x_1^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{3} + \ldots\right], \qquad J_1(y) = x_1^{\frac{1}{2}}[2 + \ldots].$$

Le système (4) est ainsi remplacé par le suivant

$$u = x_1^{\frac{3}{2}}\left[\frac{2}{3} + \ldots \pm \left(\frac{2}{3} + \ldots\right)\right],$$

$$v = x_1^{\frac{1}{2}}\left[2 + \ldots \pm \left(2 + \ldots\right)\right];$$

la détermination de x_1 est la même pour u et v et les signes se correspondent dans u et v. Nous allons étudier la branche qui est donnée par le signe $+$; son équation est de la forme

$$3u = \frac{v^3}{16} + \ldots,$$

par conséquent, l'équation est satisfaite par un développement de cette nature dont le premier terme est indépendant de h; en remplaçant u par $\frac{v^3}{48}$, nous devons donc faire disparaître un terme du dénominateur; autrement dit, $\varphi_3(u, v)$ contient le terme $-\frac{v^3}{48}$. Tout revient donc à exprimer que θ_1 est de la forme $c\left(u - \frac{v^3}{48} + \ldots\right)$.

En écrivant le système (12) sous la forme

$$U = lu + mv, \qquad V = l'u + m'v.$$

nous avons l'équation

$$\frac{\dfrac{\partial^3\theta_1(0,0)}{\partial v^3}}{6\,\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u}(0,0)} = -\frac{1}{48},$$

ou, en représentant les dérivées troisièmes par des coefficients γ,

$$m^3\gamma_1 + 3m^2m'\gamma_2 + 3mm'^2\gamma_3 + m'^3\gamma_4 + \frac{1}{8}(l\alpha_1 + l'\beta_1) = 0.$$

Les rapports des coefficients l, l', m, m', sont déja connus : cette équation donne m^2 en fonction des valeurs à l'origine des dérivées troisièmes de θ_1.

En résumé, nous avons montré que, les racines e_i étant rangées dans un ordre quelconque, nous pouvons ranger les 6 fonctions θ_i dans un ordre tel que nous ayons les rapports (13); nous avons en même temps déterminé les constantes C et les coefficients $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ de la substitution qui remplace la variables u, v du système (12) par les arguments normaux U, V.

Nous allons démontrer que l'ordre des fonctions θ_i est arbitraire; écrivons les rapports (13) en mettant au dénominateur les fonctions formées avec un système de périodes donné; nous obtenons des relations pour déterminer les constantes C_i, λ, λ', μ, μ'; ces relations sont toujours compatibles puisque nous savons que leur résolution est possible quand α, β, γ sont les périodes d'un système d'intégrales hyperelliptiques, périodes entre lesquelles n'existe aucune relation.

Mais il faut encore démontrer que les valeurs des e_i ainsi obtenues sont bien toutes les valeurs possibles; supposons que, par une transformation homographique, e_1, e_2, e_3 aient pris les valeurs $0, 1, \infty$; nous excluons par cela même ces trois valeurs pour les autres racines; supposons alors que e_4, variant seul, ne puisse franchir la valeur ε_4; les valeurs voisines sont fonctions de α, β, γ et ces fonctions sont holomorphes si $\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1 < 0$. Quand e_4 reste au voisinage de $\varepsilon_4, \alpha, \beta, \gamma$ varient de façon continue au voisinage de $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$; inversement quand α, β, γ prennent certaines valeurs au voisinage de $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, e_4 varie dans le voisinage de ε_4; e_4 prend donc la valeur ε_4 quand α, β, γ prennent les valeurs $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ et ε_4 n'est pas une singularité de e_4.

On peut donc toujours associer de façon arbitraire les racines et les fonctions $\theta(u, v)$ pour résoudre le problème de l'inversion.

TABLE DES MATIÈRES

Numéro de code : 517.93

Depot légal éditeur : N° 1.049

(B 99) Imprimerie Ceuterick, s.c., 153 rue de Bruxelles, Louvain
Dir. L. Pitsi, 25 rue Dagobert, Louvain (Belgique)

PRINTED IN BELGIUM