

A. BLAQUIÈRE

Mécanique non linéaire, les oscillateurs à régimes quasi sinusoïdaux

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 141 (1960), p.

http://www.numdam.org/item?id=MSM_1960__141__1_0

© Gauthier-Villars, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

BSM 3159

A. BLAQUIÈRE

MÉCANIQUE NON LINÉAIRE

LES OSCILLATEURS A RÉGIMES QUASI SINUSOÏDAUX

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur : H. VILLAT

FASCICULE CXLI



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, EDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

—
1960



© 1960 by Gauthier-Villars.

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

MÉCANIQUE NON LINÉAIRE

LES

OSCILLATEURS A RÉGIMES QUASI SINUSOÏDAUX

Par M. A. BLAQUIÈRE.



INTRODUCTION

La Mécanique non linéaire n'est pas à proprement parler une branche essentiellement distincte de la Mécanique puisqu'elle part des mêmes équations fondamentales. Une bifurcation s'établit cependant entre systèmes linéaires et systèmes non linéaires à partir de la loi d'évolution, et son importance est surtout considérable dans la théorie des oscillateurs et des servo-mécanismes. A ce stade il apparaît alors clairement qu'il existe deux catégories de problèmes profondément différents, en particulier en ce qui concerne les degrés de difficulté.

Un premier type, qui a conduit à des méthodes puissantes et générales : les méthodes de Fourier, de Laplace, etc. appartient au champ de la Mécanique linéaire. Les premiers travaux s'y rapportant sont dûs à Euler, en 1739, puis à Lagrange qui énonça en 1760 le principe fondamental de superposition des régimes sur lequel nous reviendrons plus loin. L'exploitation de ce domaine s'est montré particulièrement riche en résultats aussi bien théoriques qu'appliqués, qui constituent maintenant un bel édifice, simple et cohérent.

L'autre type de problèmes dont la première étude, la thèse de H. Poincaré, remonte à l'année 1879, se montre réfractaire pour l'instant à tout essai de synthèse et, en fait, dans un laps de temps de 80 ans, aucune méthode générale ne s'est développée.

On doit noter cependant qu'à la suite des théories de Poincaré et,

presque à la même date, de Liapunov, il y eut plusieurs années de stagnation. Ainsi ce n'est que depuis une trentaine d'années que les études de Mécanique non linéaire ont repris vie sous l'impulsion de Van Der Pol. Dans ces conditions la Mécanique non linéaire peut être considérée comme une branche relativement jeune si l'on note qu'il s'est écoulé environ vingt ans entre les premiers travaux d'Euler sur les équations linéaires et l'énoncé du principe de superposition.

En l'état actuel, les difficultés rencontrées dans le domaine non linéaire ont été méthodiquement classées et l'on dispose d'une collection de méthodes particulières adaptées à chaque cas, mais pas encore de théorie générale.

Sur le plan technique, l'attention portée aux problèmes non linéaires se montre de plus en plus indispensable, la nécessité de les résoudre sous une forme plus ou moins approchée se fait de plus en plus pressante car ils jouent maintenant un rôle important dans presque tous les domaines : Mécanique, Électricité, Physique nucléaire etc. En effet les résultats expérimentaux s'accumulent avec une grande rapidité, les méthodes de mesure devenant de plus en plus précises, il n'est plus possible de s'en tenir à une linéarisation de première approximation et, d'autre part, certains phénomènes d'instabilité liés aux termes non linéaires acquièrent très souvent un intérêt majeur. Citons comme exemples, entre autres, les problèmes de stabilité de trajectoires soulevés par la construction récente du synchrotron à gradients alternés au C.E.R.N. à Genève, les problèmes de contrôle automatique, et ceux intéressant les auto-oscillateurs dont il est important de connaître les états de régime, libres, synchronisés, ou diversement perturbés.

Il est sans doute aussi utile, pour situer le sujet, de donner un bref aperçu du développement suivi par la recherche dans le domaine non linéaire, et de son état actuel.

A la suite des travaux de Poincaré et de Liapunov, puis plus tard de Van Der Pol, se développèrent en Union Soviétique deux groupes importants représentés par l'École de Moscou et, à Kiev, par l'association de Krylov et Bogoliubov.

L'École de Moscou, en 1930, réunit autour de Mandelstam, directeur de l'« Institut des oscillations », un groupe de physiciens et de mathématiciens, parmi lesquels le grand mathématicien I. S.

Pontrjagin. Les résultats et les méthodes mises en œuvre se trouvent développées dans deux livres importants :

Introduction à la Mécanique non linéaire de N. MINORSKY, où sont également développés les travaux de Krylov et Bogoliubov, édité en 1947 par J. W. Edwards of Ann. Arbor, Mic., et qui sera prochainement réédité, et la *Théorie des oscillations* de A. ANDRONOW et S. ЧАЙКИН (1937), traduite en anglais et publiée par Princeton University Press en 1949.

Plus récemment on doit mentionner les travaux de Malkin, dont l'effort a consisté à clarifier et à généraliser les travaux de Poincaré et de Liapunov, de Niemitzki et Stepanov sur les aspects topologiques de la théorie des équations différentielles, et du mathématicien G. P. Dubovsin sur les systèmes à représentation plane discontinue.

Dans les autres pays les efforts ont été aussi très grands comme l'a mis en évidence le Congrès international sur « le contrôle automatique » tenu en Angleterre à Cranfield en 1951, et enfin le « Symposium sur l'analyse des circuits non linéaires », à l'Institut Polytechnique de Brooklin en avril 1953 qui réunit les Communications de 22 physiciens et mathématiciens.

En France on doit citer les travaux de J. Haag, de Y. Rocard, et de T. Vogel.

Les méthodes d'analyse employées se rattachent généralement aux deux idées directrices introduites par H. Poincaré et conservées dans les études plus modernes où on les trouve plus amplement développées et appliquées à de nombreux problèmes pratiques.

Ces deux idées conduisent aux méthodes suivantes qui se complètent l'une l'autre :

1^o les méthodes topologiques qualitatives ;

2^o les méthodes quantitatives d'approximations par des développements en série en fonction d'un paramètre convenablement choisi.

Elle sont décrites en détail dans le livre de N. Minorsky.

Dans tous les cas ces méthodes s'attachent à tourner une difficulté fondamentale : *l'impossibilité d'appliquer le principe de superposition*. Les systèmes non linéaires ont en effet un comportement qui peut sembler à première vue assez paradoxal et qui les oppose aux systèmes linéaires : la somme de deux causes n'entraîne pas l'addition des effets correspondants. Par exemple s'il s'agit d'un cir-

cuit radioélectrique, l'addition de deux tensions excitatrices n'entraîne pas celle des intensités correspondantes, et d'ailleurs l'augmentation ou la diminution d'une telle tension peut produire un effet radicalement différent de celui qu'on attendrait d'un réseau linéaire.

Bien souvent d'autre part il n'est même pas possible d'attribuer une forme exacte à la solution du problème non linéaire posé, ni même de prévoir à quel type elle se rattachera.

Les méthodes topologiques s'appuient sur l'étude de la représentation des solutions sur le plan de phase. Cette représentation plane fait intervenir deux variables, un paramètre de position x et sa vitesse d'évolution $y = dx/dt$. La loi qui régit le système se présente sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y),$$

lorsque le temps n'intervient pas explicitement, ce qui est le cas des systèmes « autonomes ».

Dans le cas des systèmes « non autonomes » où le temps intervient explicitement, les équations d'évolution sont de la forme

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, t).$$

Dans le plan de phase (x, y) s'introduisent des « points singuliers » et des « courbes singulières » qui limitent des domaines où la forme des solutions peut être analysée géométriquement de façon relativement simple. La méthode est particulièrement concrète mais elle reste qualitative et se prête assez mal à des calculs précis.

Les méthodes d'approximations par des développements en série se prêtent au contraire à des évaluations numériques. Néanmoins elles se limitent à des études locales et l'on reste assez mal renseigné sur la forme générale de la solution. Elles apportent un complément indispensable aux méthodes qualitatives et permettent d'étudier avec précision le comportement du système dans des domaines de faible étendue, par exemple au voisinage d'un point singulier ou d'une courbe singulière.

La nouvelle méthode que nous développerons dans la suite dérive de la recherche de la solution sous la forme d'un développement en série de fonctions trigonométriques. Nous plaçant dans le cas de régimes quasi sinusoïdaux, c'est-à-dire de régimes qu'on peut consi-

dérer localement comme très approximativement sinusoïdaux, nous serons amenés à linéariser *localement* l'équation d'évolution. Nous serons ainsi conduits à associer à l'oscillateur non linéaire un diagramme dans le plan complexe, analogue au diagramme de Nyquist des oscillateurs linéaires. Mais ici le diagramme se déforme lentement quand l'amplitude varie. Ainsi, partant d'une méthode de développements en série, on sera donc en définitive amené à une méthode conduisant à une étude géométrique, non sur le plan de phase, mais sur le plan de la variable complexe.

Équations linéaires et non linéaires, plan succinct de l'étude.

— Les équations différentielles qu'on rencontre en Mécanique et en Physique sont généralement non linéaires. — Cependant des approximations permettent souvent de les simplifier et de les ramener à des équations linéaires dont le type le plus simple est l'équation à coefficients constants, telle que ⁽¹⁾.

$$a_0\ddot{x} + b_0\dot{x} + c_0x = 0.$$

Un exemple bien connu est celui du pendule simple, dont l'équation régoureuseuse

$$ml^2\ddot{x} + mgl \sin x = 0, \quad (m, \text{ masse; } l, \text{ longueur})$$

se ramène à

$$ml^2\ddot{x} + mglx = 0$$

pour de faibles élongations.

Ce cas est néanmoins assez exceptionnel, d'une part les approximations linéaires sont très souvent insuffisantes, et d'autre part les équations linéarisées ont généralement des coefficients qui sont fonctions du temps, telle l'équation de Mathieu,

$$\ddot{x} + (c_0 + c_1 \cos t) x = 0,$$

Sans attribuer de forme générale aux équations non linéaires, ce qui serait impossible étant donnée leur grande variété, on peut toutefois remarquer que l'approximation qui conduit à leur linéarisation peut toujours être améliorée en ajoutant des termes aux développements limités des fonctions qu'elles font intervenir. On aboutit alors souvent au type suivant :

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)\ddot{x} + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots)\dot{x} + (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots)x = 0,$$

⁽¹⁾ Un point supérieur indique une dérivation par rapport au temps.

dans lequel les coefficients sont soit des constantes, soit des fonctions du temps.

Un exemple bien connu est celui de l'équation de Van Der Pol,

$$a_0 \ddot{x} + b_0(1 - b_2 x^2) \dot{x} + c_0 x = 0,$$

où les coefficients sont constants, a_0 , c_0 et b_2 positifs, b_0 négatif.

Plus généralement, les coefficients de x , \dot{x} , \ddot{x} peuvent être fonctions à la fois de x , \dot{x} , et \ddot{x} .

Enfin on peut placer au second membre une fonction du temps ce qui, en Mécanique, équivaut à l'action d'une force extérieure sur le système dont l'équation étudiée régit le mouvement.

Nous traiterons séparément ces deux problèmes, celui de l'évolution libre et de l'excitation forcée, en nous limitant à des systèmes dont la loi d'évolution libre est *pseudo-sinusoidale*, ce qui est souvent le cas en pratique. L'action extérieure sera supposée d'abord sinusoidale, ensuite parfaitement aléatoire.

Cet exposé comprendra donc trois parties :

1° Une analyse de la solution libre : La nouvelle méthode du « diagramme mobile » fournira un critère de stabilité et d'autres caractéristiques importantes de l'oscillation.

2° L'étude de la solution forcée avec action sinusoidale : synchronisation, résonance non linéaire, etc.

3° L'étude de la solution forcée sous l'effet d'une fonction de bruit.

Nous n'envisagerons que des systèmes à un degré de liberté.

CHAPITRE PREMIER

OSCILLATIONS LIBRES DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES

I. — Les systèmes à régime pseudo-sinusoidal.

Précisons d'abord ce que nous entendons par système à loi d'évolution libre pseudo-sinusoidale.

Si nous nous reportons à l'exemple commode de l'équation de Van Der Pol,

$$a_0 \ddot{x} + b_0(1 - b_2 x^2) \dot{x} + c_0 x = 0.$$

nous voyons qu'elle comporte une partie linéaire $a_0 \ddot{x} + b_0 \dot{x} + c_0 x$ et une partie non linéaire $b_0 b_2 x^2 \dot{x}$. Lorsque x est petit, le terme non

linéaire où figure x^2 est négligeable, et l'équation se réduit à la partie linéaire. Si le coefficient b_0 est lui-même très faible l'évolution ainsi décrite est pratiquement une oscillation pendulaire

$$a_0x + c_0x = 0.$$

L'amplitude décroît ou croît lentement selon que le coefficient b_0 est positif ou négatif. Nous verrons plus loin, et c'est un des caractères fondamentaux des systèmes non linéaires, que l'amplitude peut, dans certaines conditions — c'est le cas ici pour $b_0 < 0$ — tendre vers une valeur limite non nulle. Elle se stabilise pour une valeur parfois importante, qu'il est utile de connaître. De toutes façons le terme $b_0(1 - b_2x^2)x$ reste toujours faible lorsque b_0 est petit, si bien que le caractère approximativement sinusoïdal est conservé aussi bien dans la phase linéaire de l'amorçage des oscillations que dans la phase de stabilisation.

Comme c'est le cas ici, les équations proposées se présenteront toujours sous la forme de deux termes, l'un linéaire $H_1(x)$, et l'autre non linéaire $H_2(x)$. Nous serons donc amenés à adopter par la suite les hypothèses restrictives suivantes :

1° L'équation étudiée sera de la forme ⁽¹⁾

$$H_1(x) + H_2(x) = 0,$$

2° L'équation linéaire

$$H_1(x) = 0$$

doit traduire une évolution approximativement sinusoïdale, à amplitude lentement variable.

3° Pour de faibles amplitudes d'oscillation le terme H_2 sera négligeable devant H_1 .

II. — L'amorçage des oscillations, les approximations linéaires classiques.

A. — PULSATION COMPLEXE (RAPPEL) : $\omega_1 + j\omega_2$
 (ω_1 , PULSATION; ω_2 , AMORTISSEMENT ALGÈBRE).

1. Pulsation réelle limite. — Un oscillateur est formé d'éléments actifs, renfermant des sources d'énergie, et d'éléments passifs

(1) On sera parfois amené à écrire

$$H_2(x) \equiv \epsilon K_2(x)$$

en supposant ϵ petit.

dans lesquels l'énergie d'oscillation se trouve dissipée. Les éléments actifs peuvent d'ailleurs faire défaut, auquel cas le système, déplacé de l'état d'équilibre par une action extérieure, revient nécessairement vers le repos. Dans le cas d'un oscillateur radioélectrique les éléments passifs sont les selfs, les capacités, les résistances, et les éléments actifs, les tubes termoioniques par exemple.

Il est commode, pour la clarté de l'exposé, d'envisager un tel

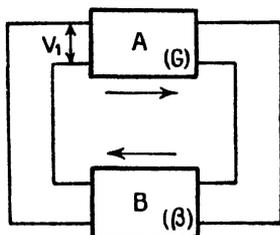


FIG. 1.

oscillateur et de grouper les éléments actifs d'une part, les éléments passifs d'autre part. On réduit ainsi le système au schéma simple de la figure 1.

A et B sont deux quadripôles, convenablement associés, dont nous examinerons d'abord séparément le fonctionnement.

On sait qu'un quadripôle est une boîte, pouvant renfermer des

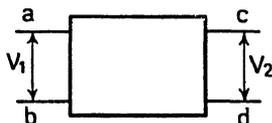


FIG. 2.

éléments actifs et passifs, d'où sortent quatre bornes, deux d'entrée et deux de sortie. Si l'on applique entre les bornes a, b , d'entrée une différence de potentiel sinusoïdale $V_1 = A_1 \sin \omega t$, il en résulte une différence de potentiel V_2 entre les bornes de sortie c et d (fig. 2).

Cette différence de potentiel V_2 peut être déterminée aisément au moyen des équations classiques de l'électricité appliquées aux diverses branches du réseau constituant le quadripôle. Si tous les éléments dont il est formé obéissent à des lois linéaires, V_2 dépend linéairement de V_1 , c'est donc, comme V_1 , une fonction sinusoïdale

du temps que nous mettrons sous la forme

$$V_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi)$$

(les termes constants n'ont pas d'intérêt ici).

En vertu du principe de superposition des régimes électriques, applicable à tous les systèmes linéaires, à un potentiel d'entrée de la forme

$$V_1 = A_1 \cos \omega t + j A_1 \sin \omega t$$

correspondra un potentiel de sortie

$$V_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi) + j A_2 \sin(\omega t + \varphi).$$

Une méthode bien connue consiste à donner à j la valeur $\sqrt{-1}$, auquel cas V_1 et V_2 prennent les formes simples

$$V_1 = A_1 e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad V_2 = A_2 e^{j(\omega t + \varphi)}.$$

Ces fonctions sont d'un emploi très commode. Elles font intervenir simultanément les deux expressions $A_1 \cos \omega t$ et $A_1 \sin \omega t$ et il suffit de ne conserver, à la fin des calculs, que l'une d'elles pour se ramener au cas où les potentiels sont réels.

FONCTION DE TRANSFERT COMPLEXE D'UN QUADRIPOLE. — Le rapport du potentiel complexe de sortie

$$V_2 = A_2 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

au potentiel complexe d'entrée correspondant

$$V_1 = A_1 e^{j\omega t}$$

est appelé « fonction de transfert complexe du quadripôle ». Nous poserons

$$T_i = \frac{V_2}{V_1} = \frac{A_2}{A_1} e^{j\varphi}$$

(φ dépendra généralement de ω).

Le terme « fonction de transfert complexe » est généralement remplacé par celui d'« atténuation complexe » dans le cas des quadripôles ne renfermant que des éléments passifs et de « gain complexe » lorsque le réseau renferme des lampes électroniques.

COEFFICIENT DE RÉACTION D'UN AUTO-OSCILLATEUR. — Considérons maintenant les deux quadripôles associés de la figure 1. A étant supposé actif, de gain complexe G_i et B passif, d'atténuation

β_i . Ce système peut osciller pour des valeurs convenables de β_i et G_i que nous préciserons sur des exemples.

L'oscillation étant supposée d'amplitude et de pulsation constantes, soit

$$V_1 = A_1 e^{j\omega t}$$

le potentiel complexe d'entrée de A; son potentiel de sortie est

$$V_2 = G_i V_1,$$

V_2 est alors le potentiel complexe d'entrée de B, tandis que V_1 est son potentiel de sortie, et l'on a

$$V_1 = \beta_i V_2$$

On en déduit l'équation bien connue qui donne la pulsation de l'oscillation qui s'établit

$$(1) \quad 1 - \beta_i G_i = 0.$$

Le produit $\beta_i G_i$ est appelé le « gain complexe total » de l'oscillateur et $1 - \beta_i G_i$ le « coefficient de réaction ».

L'équation (1) est équivalente à un système de deux équations obtenues en annulant les parties réelle et imaginaire pure du premier membre. On tire de ces deux équations la pulsation d'oscillation (réelle par hypothèse) et une condition supplémentaire entre les données des circuits: « la condition d'accrochage ». La condition d'accrochage ne pouvant être remplie en toute rigueur, le cas envisagé ici apparaît comme un cas limite. On peut s'en approcher cependant si l'accrochage est extrêmement doux.

APPLICATION A UN OSCILLATEUR CLASSIQUE. — Considérons à

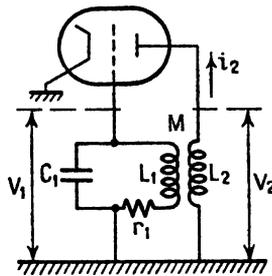


FIG. 3.

titre d'exemple l'oscillateur de la figure 3. Le circuit oscillant branché sur la grille est couplé par mutuelle induction au circuit de plaque.

Le quadripôle A du schéma initial se réduit ici à une seule lampe. La différence de potentiel V_1 est appliquée entre les bornes d'entrée grille et cathode, V_2 est la différence de potentiel entre les bornes de sortie plaque et cathode. On suppose, de plus, donnée la caractéristique de la lampe, courant de plaque i_2 fonction linéaire du potentiel de grille V_1 de la forme

$$i_2 = sV_1, \quad (s, \text{ pente de la lampe}).$$

On calcule aisément le gain complexe G_t de la lampe d'entretien.

$$G_t = -j\omega L_2 s.$$

De même, le quadripôle B est le réseau que nous avons isolé

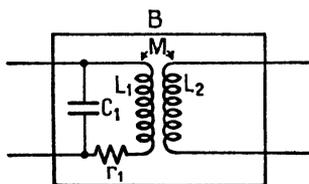


FIG. 4.

sur la figure 4. Il est constitué par le circuit oscillant de grille et la self de plaque couplés par mutuelle.

On trouve de même pour β_t ,

$$\beta_t = \frac{M}{1 - L_1 C_1 \omega^2 + j\omega r_1 C_1}$$

(L_1 , C_1 , r_1 , self, capacité et résistance série du circuit oscillant; L_2 , self de plaque).

L'équation

$$1 - \beta_t G_t = 0$$

donnant la pulsation de l'oscillation qui s'établit prend ici la forme

$$(2) \quad L_1 C_1 \omega^2 - j\omega(r_1 C_1 + Ms) - 1 = 0.$$

Elle est équivalente au système de deux équations à une inconnue ω , obtenu en annulant les parties réelle et complexe du premier membre

$$L_1 C_1 \omega^2 - 1 = 0, \quad r_1 C_1 + Ms = 0.$$

De la première équation, on tire

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}.$$

La deuxième exprime la condition d'accrochage bien connue.

2. Pulsation complexe. — Dans la méthode suivie jusqu'ici nous avons postulé l'existence d'un régime d'oscillation sinusoïdal. Or, un tel régime n'est possible que si la condition d'accrochage précédente est *exactement* vérifiée, ce qui apparaît comme un cas limite irréalisable en toute rigueur.

En fait, nous devons, pour représenter plus correctement le cas réel, montrer que, au voisinage de l'accrochage, l'oscillation du système peut croître lentement en amplitude, ou bien tendre vers le repos. Le cas limite mis en évidence correspond à un cas théorique intermédiaire.

Il suffit, pour compléter l'étude précédente, d'étendre la définition de la fonction de transfert complexe d'un quadripôle au cas où la grandeur d'entrée est pseudo-sinusoïdale.

Soit, par exemple

$$V = A_1 e^{-\omega_2 t} \sin \omega_1 t$$

le potentiel appliqué entre les bornes d'entrée du quadripôle. On voit qu'il peut être remplacé comme plus haut par le potentiel complexe

$$V = A_1 e^{-\omega_2 t} e^{j\omega_1 t} = A_1 e^{j(\omega_1 + j\omega_2)t}.$$

Les raisonnements qui nous ont conduit à la définition de la fonction de transfert, et à l'équation en ω , peuvent être repris ici sans modification à condition de poser

$$\omega = \omega_1 + j\omega_2,$$

c'est-à-dire de considérer la pulsation comme une grandeur complexe.

La forme de l'expression de la fonction de transfert complexe d'un quadripôle restera donc la même, ainsi que celle de l'équation qui permet la détermination de ω lorsque les deux quadripôles A et B sont associés pour former un oscillateur.

APPLICATION A L'OSCILLATEUR PRÉCÉDENT. — Dans l'exemple précédent, l'équation d'oscillation correspondant à un régime dont l'amplitude varie, reste

$$L_1 C_1 \omega^2 - j\omega(r_1 C_1 + Ms) - 1 = 0.$$

Sa décomposition ne peut cependant plus se faire comme plus haut, il faut poser d'abord

$$\omega = \omega_1 + j\omega_2,$$

auquel cas cette équation devient

$$(3) \quad L_1 C_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2) + \omega_2 (r_1 C_1 + Ms) - 1 + j [2L_1 C_1 \omega_1 \omega_2 - \omega_1 (r_1 C_1 + Ms)] = 0,$$

on en tire le système

$$\begin{cases} L_1 C_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2) + \omega_2 (r_1 C_1 + Ms) - 1 = 0, \\ 2L_1 C_1 \omega_2 - (r_1 C_1 + Ms) = 0. \end{cases}$$

Ces deux équations à deux inconnues permettent le calcul de ω_1 et ω_2 . En particulier, on voit que l'amplitude du régime transitoire qui s'établit est de la forme

$$Ae^{-\omega_2 t} = Ae^{-\frac{r_1 C_1 + Ms}{2L_1 C_1} t}.$$

Si l'on a $r_1 C_1 + Ms = 0$, on retrouve le cas traité précédemment où l'oscillation conserve une amplitude constante.

Si l'on a $r_1 C_1 + Ms < 0$ les oscillations s'amorcent et croissent en amplitude.

Si l'on a $r_1 C_1 + Ms > 0$ les oscillations ne peuvent s'amorcer et, si le régime initial a une amplitude finie, le système doit tendre vers le repos.

3. Graphique de Nyquist: exemple type. — Nous venons de voir que l'équation qui permet de calculer la pulsation de l'oscillateur pris comme exemple est

$$L_1 C_1 \omega^2 - j\omega(r_1 C_1 + Ms) - 1 = 0$$

et que cette pulsation, complexe dans le cas général, ne devient réelle que si la condition d'accrochage $r_1 C_1 + Ms = 0$ est remplie.

On peut aussi étudier l'équation (2) par une méthode graphique due à Nyquist. Nous allons rappeler la méthode, qui est d'une extrême utilité pour préciser la stabilité ou l'instabilité d'un oscillateur linéaire. Nous l'étendrons ensuite au cas de systèmes non linéaires.

Donnons à ω une valeur réelle arbitraire ω_r ; le nombre complexe

$$H_t(\omega_r) \equiv L_1 C_1 \omega_r^2 - j\omega_r(r_1 C_1 + Ms) - 1$$

obtenu en portant cette valeur ω_r dans le premier membre de l'équation précédente, a une image m sur le plan complexe.

Si ω_r varie, tout en restant réel, le point m décrit une courbe : diagramme de l'oscillateur considéré.

Si, d'ailleurs, l'un des coefficients de l'équation (2), par exemple $(r_1 C_1 + Ms)$, est susceptible de prendre diverses valeurs, à chacune de ces valeurs correspondra un diagramme différent.

Nous avons représenté sur la figure 5 trois diagrammes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, pour trois valeurs : négative, nulle, positive de $r_1 C_1 + Ms$.

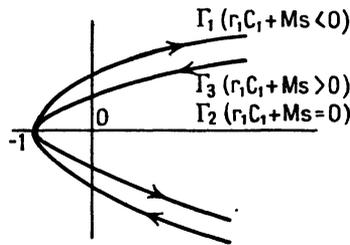


FIG. 5.

Pour $r_1 C_1 + Ms = 0$, à l'accrochage, la courbe Γ_2 se confond avec une portion de l'axe réel, elle passe, par suite, par l'origine O. Les courbes Γ_1 et Γ_3 tracées pour $r_1 C_1 + Ms < 0$ et $r_1 C_1 + Ms > 0$ ne passent ni l'une ni l'autre par O. Ce point, pour lequel on a $H_i = 0$, ne correspond pas, en effet, dans ces deux derniers cas, à une valeur réelle de ω .

Les courbes Γ_1 et Γ_3 relatives, la première à une oscillation d'amplitude croissante ($r_1 C_1 + Ms < 0$), la deuxième à une oscillation tendant vers le repos ($r_1 C_1 + Ms > 0$), ne diffèrent que par le sens de déplacement du point courant m quand ω_r varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Ce résultat est très général, la fonction $H_i(\omega)$ est une fonction analytique. Le diagramme de l'oscillateur, obtenu en faisant varier ω_r de $-\infty$ à $+\infty$ apparaît comme la transformée de l'axe réel. Le point O est le transformé des zéros de $H_i(\omega)$. Si les zéros de $H_i(\omega)$ sont laissés à gauche d'un observateur qui parcourt l'axe réel, cette disposition doit être conservée sur le plan du diagramme : l'observateur qui parcourt le diagramme voit le point O à sa gauche. Dans ce cas le système est amorti puisque les zéros de $H_i(\omega)$ sont dans

le demi-plan complexe positif. Si le point O est à droite de l'observateur qui décrit le diagramme, le système est au contraire instable.

OSCILLATEUR A DÉPHASAGE. — Nous appliquerons à titre d'illustration la méthode graphique décrite ci-dessus à l'oscillateur à résistance et capacité de la figure 6.

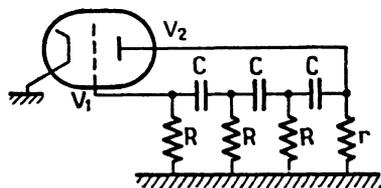


FIG. 6.

Ce système ne renferme plus le circuit oscillant usuel à résistance, self et capacité. Le réseau des résistances et des capacités reporte sur la grille de la lampe d'entretien une tension \$V_1\$ obtenue à partir de la tension de plaque \$V_2\$.

\$V_1\$ est déduit de \$V_2\$ par modification d'amplitude et de phase, ce qui revient à dire encore que le circuit de réaction déduit \$V_1\$ de \$V_2\$ par atténuation complexe.

Le calcul du coefficient d'atténuation complexe donne

$$\beta_l = \frac{-j\omega^3 R^3 C^3}{-j\omega^3 R^3 C^3 - 6R^2 C^2 \omega^2 + 5j\omega RC + 1}$$

(la signification des lettres est indiquée sur le dessin).

Cette expression, jointe au gain complexe de la lampe, qui vaut ici, lorsque la résistance de charge \$r\$ est faible,

$$G_l = -rs,$$

permet de déterminer le coefficient de réaction complexe de l'oscillateur et, par suite, son équation aux pulsations qui est de la forme

$$jR^3 C^3 (1 + rs)\omega^3 + 6R^2 C^2 \omega^2 - j5RC\omega - 1 = 0.$$

Cette équation du troisième degré est équivalente, lorsque \$\omega\$ est réel, au système suivant obtenu en annulant les parties réelle et imaginaire pure de son premier membre :

$$6R^2 C^2 \omega^2 - 1 = 0, \quad R^2 C^2 (1 + rs)\omega^2 - 5 = 0.$$

On peut obtenir ainsi la valeur de la pulsation à l'accrochage et

la condition d'accrochage. De la première équation, on tire, en effet

$$\omega = \frac{1}{RC\sqrt{6}}$$

Portant cette valeur dans la deuxième, on trouve, pour condition d'accrochage,

$$rs = 29.$$

Nous avons encore représenté (fig. 7) trois diagramme Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 ,

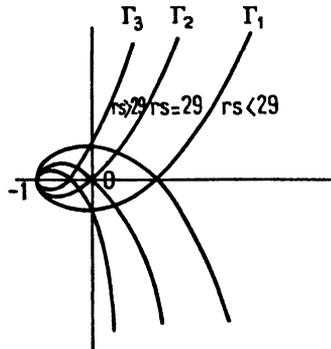


FIG. 7.

pour des valeurs différentes de rs :

$$rs < 29, \quad rs = 29, \quad rs > 29.$$

Nous constatons que seule la courbe correspondant à l'accrochage passe par O. Du sens de parcours des deux autres courbes, quand ω , varie de $-\infty$ à $+\infty$, peut être déduit comme plus haut la stabilité ou l'instabilité de l'oscillateur.

Plus généralement, l'équation qui donne ω peut être écrite sous la forme réduite

$$H_i(\omega) = 0,$$

où $H_i(\omega)$ est une fonction analytique.

Nous représentons alors sur le plan complexe la courbe obtenue en portant dans $H_i(\omega)$ les valeurs réelles de ω , les points de cette courbe ayant pour affixes $H_i(\omega \text{ réel})$.

A l'accrochage, l'équation

$$H_i(\omega) = 0$$

a une racine réelle en ω et la courbe de Nyquist passe par O.

Lorsque la condition d'accrochage n'est pas remplie, l'origine $O(H_i = 0)$ correspond à une valeur complexe $\omega = \omega_2 + j\omega_1$ dont on déduit, selon que ω_2 est négatif ou positif, l'instabilité ou la stabilité de l'oscillateur. La courbe ne passe pas par O dans ce cas.

B. — OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL REPRÉSENTATIF D'UN OSCILLATEUR.

Les divers symbolismes actuellement appliqués aux systèmes linéaires. — Sans entrer dans le détail de leur étude, nous allons passer brièvement en revue les divers symbolismes actuellement appliqués aux oscillateurs linéaires.

MÉTHODE DE LAPLACE. — Partons de l'équation différentielle, supposée en première approximation linéaire et à coefficients constants, qui décrit l'évolution de l'oscillateur, par exemple l'équation qui nous a servi plus haut :

$$L_1 C_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} + (r_1 C_1 + Ms) \frac{dV_1}{dt} + V_1 = 0.$$

Nous supposerons le système *amorti* ($Ms + r_1 C_1 > 0$), préalablement au repos, et déplacé du repos à l'instant initial par un choc brusque (un choc-unité par exemple). L'équation ci-dessus doit être complétée au second membre par la fonction impulsion-unité $\delta(t)$.

Pour déterminer la solution $V_1(t)$, on prend les transformées de Laplace des deux membres; soit

$$\varphi(p) \subset V_1(t), \quad 1 \subset \delta(t).$$

Le premier membre est remplacé par un polynôme en p , et l'équation transformée est, compte tenu des conditions initiales $V_1(0)=0$, $V_1'(0) = 0$.

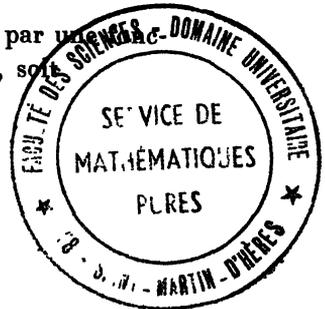
$$[L_1 C_1 p^2 + (r_1 C_1 + Ms)p + 1] \varphi(p) = 1,$$

d'où

$$\varphi(p) = \frac{1}{L_1 C_1 p^2 + (r_1 C_1 + Ms)p + 1},$$

L'effet de toute autre action extérieure, représentée par une fonction $E(t)$ au second membre, s'en déduit simplement, soit

$$\Phi(p) \subset V_1(t), \quad \psi(p) \subset E(t).$$



L'équation transformée devient

$$[L_1 C_1 p^2 + (r_1 C_1 + Ms)p + 1] \Phi(p) = \psi(p),$$

d'où

$$\Phi(p) = \frac{\psi(p)}{L_1 C_1 p^2 + (r_1 C_1 + Ms)p + 1} = \psi(p) \varphi(p),$$

c'est la formule de Carson. Connaissant $\Phi(p)$, on reviendra à l'original $V_1(t)$.

MÉTHODE DE FOURIER. — On recherche la solution $V_1(t)$ de l'équation avec second membre

$$L_1 C_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} + (r_1 C_1 + Ms) \frac{dV_1}{dt} + V_1 = E(t)$$

sous la forme d'une intégrale de Fourier, qui se réduit à une série de Fourier dans le cas d'une excitation périodique.

Soit

$$V_1(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad E(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Portant dans l'équation, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [1 + j\omega(r_1 C_1 + Ms) - L_1 C_1 \omega^2] C(\omega) e^{j\omega t} d\omega \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

d'où le spectre de Fourier de $V_1(t)$,

$$C(\omega) = \frac{\gamma(\omega)}{1 + j\omega(r_1 C_1 + Ms) - L_1 C_1 \omega^2},$$

$V_1(t)$ s'en déduit.

MÉTHODE DE LA CONVOLUTION. — On sait que les dérivées successives d'une fonction sont représentables par le produit de convolution de cette fonction par les fonctions spéciales $\delta'(t)$, $\delta''(t)$, ..., dérivées successives de l'impulsion-unité $\delta(t)$ au sens des distributions.

L'évolution du système sous l'effet d'un choc-unité sera donc décrite par l'équation

$$[L_1 C_1 \delta'' + (r_1 C_1 + Ms) \delta' + \delta] * v_1 = \delta$$

et sous l'effet de l'action extérieure $E(t)$ par

$$[L_1 C_1 \delta'' + (r_1 C_1 + Ms) \delta' + \delta] * V_1 = \delta * E(t),$$

d'où la solution

$$V_1(t) = [L_1 C_1 \delta'' + (r_1 C_1 + Ms) \delta' + \delta]^{-1} * E(t) = v_1(t) * E(t)$$

qui est une autre forme de l'expression de Carson.

SYMBOLISME DE L'OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL. — Conservant toujours l'exemple type choisi plus haut, nous définirons « le gain symbolique » du quadripôle actif, ici la lampe amplificatrice, et l'« atténuation symbolique » du quadripôle passif.

a. *Gain symbolique de la lampe amplificatrice.* — La relation entre la tension de sortie V_2 et la tension d'entrée V_1 est

$$(4) \quad V_2 = -L_2 s \frac{d}{dt} V_1,$$

nous poserons symboliquement

$$G_{op} = -L_2 s \frac{d}{dt},$$

G_{op} est le « gain symbolique du système d'entretien ».

b. *Atténuation symbolique du réseau passif.* — De même, la relation entre la tension de sortie V_1 et la tension d'entrée V_2 du réseau passif est

$$(5) \quad L_1 C_1 \frac{d^2}{dt^2} V_1 + r_1 C_1 \frac{d}{dt} V_1 + V_1 = \frac{M}{L_2} V_2,$$

nous poserons aussi

$$\beta_{op} = \frac{\frac{M}{L_2}}{L_1 C_1 \frac{d^2}{dt^2} + r_1 C_1 \frac{d}{dt} + 1},$$

ce qui revient à écrire l'équation différentielle ci-dessus sous la forme symbolique

$$V_1 = \frac{\frac{M}{L_2}}{L_1 C_1 \frac{d^2}{dt^2} + r_1 C_1 \frac{d}{dt} + 1} V_2.$$

L'équation d'oscillation, déterminée facilement à partir des équations (4) et (5).

$$\left[L_1 C_1 \frac{d^2}{dt^2} + (r_1 C_1 + Ms) \frac{d}{dt} + 1 \right] V_1 = 0$$

peut être mise sous la forme symbolique

$$(6) \quad (1 - \beta_{op} G_{op}) V_1 = 0.$$

On voit alors que, dans le cas où V_1 est de la forme $A_1 e^{j\omega t}$ on a

$$\frac{dV_1}{dt} = j\omega A_1 e^{j\omega t}, \quad \frac{d^2 V_1}{dt^2} = (j\omega)^2 A_1 e^{j\omega t}, \quad \dots$$

L'opération du symbole $\frac{d}{dt}$ sur V_1 est, dans ce cas, équivalente à

la multiplication de V_1 par $j\omega$ et $\left(\frac{d^m}{dt^m}\right)$ équivaut, de même, à la multiplication de V_1 par $(j\omega)^m$.

G_{op} et β_{op} peuvent être remplacés par les valeurs complexes G_i et β_i , calculées plus haut, et l'équation différentielle de l'oscillateur par l'équation complexe déjà rencontrée

$$1 - \beta_i G_i = 0.$$

Sous une forme plus générale, un oscillateur étant réduit comme sur la figure 1, nous supposons donnés, dans l'approximation linéaire, le gain et l'atténuation symbolique G_{op} et β_{op} de A et B sous la forme d'une fraction rationnelle $\frac{\sum_j a_j p^j}{\sum_k b_k p^k}$, p^m désignant le symbole $\frac{d^m}{dt^m}$, a_j et b_k des coefficients constants.

Cette expression généralise les coefficients de transfert symboliques G_{op} et β_{op} déterminés dans l'exemple précédent.

Ayant choisi une variable, par exemple le potentiel d'entrée V de A, nous écrirons l'équation d'oscillation

$$(1 - \beta_{op} G_{op})V = 0$$

sous la forme réduite

$$(7) \quad H_{op} V = 0,$$

en posant

$$H_{op} = 1 - \beta_{op} G_{op}.$$

Nous chercherons ensuite une solution de cette équation de la forme $V = a_0 e^{pt}$, a_0 étant réel et p égal à $j\omega$ (ω réel) $H_{op} V = 0$ s'écrit alors

$$(8) \quad H_i V = 0,$$

H_i étant la grandeur complexe obtenue en remplaçant dans H_{op} les dérivées premières, secondes, etc., par p , p^2 , ...

Par suite, l'équation (7) peut être remplacée par

$$(9) \quad H_i = 0, \quad \text{qui permet le calcul de } \omega.$$

Elle est équivalente à deux équations à une inconnue ω , obtenues en annulant les parties réelles et complexes de H_i . Dans le cas souvent

rencontré en pratique où la pulsation peut être déterminée de façon unique, la condition de compatibilité des deux équations précédentes donne la condition d'accrochage.

En fait, la condition d'accrochage n'est jamais exactement vérifiée et l'équation $H_1 = 0$ n'admet pas, en toute rigueur, de solution réelle en ω . On peut trouver cependant, dans ce cas, une solution complexe

$$\omega = \omega_1 + j\omega_2.$$

Il en résulte pour V une expression de la forme

$$V = a_0 e^{-\omega_2 t} e^{j\omega_1 t}.$$

dont l'amplitude $|V| = a_0 e^{-\omega_2 t}$ est une fonction du temps, croissante ou décroissante selon que ω_2 est négatif ou positif. Le diagramme de Nyquist permet de préciser dans quel cas on se trouve.

L'oscillateur est instable dans le premier cas, stable dans le second, et indifférent dans le cas limite où la condition d'accrochage serait exactement vérifiée.

REPRÉSENTATION DANS UN ESPACE DE HILBERT. — L'intérêt des opérateurs différentiels, dans le cas linéaire, est lié au principe de superposition.

En particulier, ce principe permet de décrire la méthode opérationnelle dans un espace de Hilbert, dont la base est l'ensemble des vecteurs $|V_n\rangle$ associés aux exponentielles complexes $e^{j\omega_n t}$ (ω_n réel, positif ou négatif).

Toute fonction $x(t)$ est représentable par un vecteur $|x\rangle$ et peut être décomposée sur cette base, soit sous forme d'une suite discrète si $x(t)$ est périodique,

$$(10) \quad |x\rangle = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n |V_n\rangle,$$

soit sous forme d'une intégrale (transcription de l'intégrale de Fourier), dans le cas général :

$$(11) \quad |x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} C_n |V_n\rangle dn.$$

Comme nous le verrons plus loin, l'impulsion-unité $\delta(t)$ se décom-

pose suivant

$$(12) \quad |\delta\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |V_n\rangle dn.$$

1° L'opérateur H_{op} transforme tout vecteur $|x\rangle$ en un vecteur $|y\rangle$,

$$|y\rangle = H_{op} |x\rangle.$$

2° Les vecteurs de base, $|V_n\rangle$, sont les vecteurs propres des opérateurs H_{op} , avec les valeurs propres H_i . On a, en effet ⁽¹⁾

$$H_{op}|V_n\rangle = H_i^n |V_n\rangle.$$

3° L'effet d'une impulsion-unité sur le système initialement au repos est décrit par l'équation

$$H_{op}|x\rangle = |\delta\rangle$$

ou, tenant compte de (10), (11), (12), soit par

$$(13) \quad \sum_r [C_n H_i^n - 1] |V_n\rangle = 0,$$

soit par

$$(14) \quad \int [C_n H_i^n - 1] |V_n\rangle dn = 0.$$

Comme les vecteurs de base sont linéairement indépendants, l'équation (13) est équivalente au système de n équations

$$C_n H_i^n - 1 = 0$$

qui donne les C_n , et l'équation (14) est équivalente à

$$C(\nu) H_i(\nu) = 1,$$

d'où $C(\nu)$, si l'on choisit la fréquence ν comme variable.

Parmi les méthodes que nous venons de passer rapidement en revue, nous retiendrons pour la suite, en vue de leur extension aux oscillateurs non linéaires : la méthode de Nyquist, la méthode de Fourier et le symbolisme de l'opérateur différentiel.

III. — Oscillateurs en régime non linéaire.

On peut classer les systèmes oscillants en *systèmes conservatifs*, dans lesquels ne se produit aucun échange énergétique avec le milieu

(1) Ici l'indice inférieur n'est pas un exposant.

extérieur, et en *systèmes non conservatifs*, qui mettent en jeu de tels échanges.

Ces derniers peuvent être eux-mêmes subdivisés en *systèmes amortis* ou *entretenus*, selon que le bilan énergétique se traduit en moyenne par une dépense ou par un gain. Les échanges d'énergie peuvent d'ailleurs être réalisés soit à partir d'une source d'énergie périodique, soit à partir d'une source d'énergie à niveau constant et dans ce cas il s'agira d'*auto-oscillateurs*, qui peuvent être eux-mêmes entretenus ou amortis.

Les systèmes auto-entretenus peuvent se comporter de façon totalement différente selon que leur régime est non linéaire ou linéaire.

Ainsi, en dehors du cas théorique limite où la condition d'accrochage est vérifiée, un auto-oscillateur linéaire non amorti a une amplitude indéfiniment croissante. Par contre, en fonctionnement non linéaire, il est fréquent que le régime se stabilise et que l'amplitude prenne une valeur limite a_0 , indépendante des conditions initiales.

Dans ce cas, sur le « plan de phase », où l'on porte en abscisse une variable convenablement choisie x , et en ordonnée sa vitesse d'évolution $\frac{dx}{dt}$, les trajectoires du point figuratif tendent vers un « cycle limite ».

Sans entrer dans le détail d'une étude topologique utilisant le « plan de phase », dont on trouvera les résultats dans les traités classiques, nous rappellerons quelques définitions :

1° Un cycle limite est *stable* si les trajectoires l'approchent asymptotiquement, de l'extérieur aussi bien que de l'intérieur, quand $t \rightarrow +\infty$.

2° Il est *instable* si les trajectoires l'approchent asymptotiquement de l'extérieur aussi bien que de l'intérieur, quand $t \rightarrow -\infty$.

3° Il est *semi-stable* si les trajectoires l'approchent asymptotiquement, de l'extérieur quand $t \rightarrow +\infty$, et de l'intérieur quand $t \rightarrow -\infty$, ou *vice versa*.

On peut aussi établir les théorèmes suivants [1] :

THÉORÈME I. — *Si un système possède plusieurs cycles limites formant une séquence a_1, a_3, a_5, \dots , dans l'intervalle de deux cycles*

limites stables consécutifs existe toujours un cycle limite instable. Ces cycles instables forment une autre séquence $a_2, a_4, a_6 \dots$

THÉORÈME II. — *Le cycle limite stable atteint spontanément par un système qui part du repos est toujours celui qui correspond à la plus faible amplitude.*

THÉORÈME III. — *Les autres cycles limites stables de la séquence $a_3, a_5 \dots$ ne peuvent être atteints que sous l'effet d'un choc initial, qui porte le point figuratif au delà du cycle limite instable correspondant a_2, a_4, \dots*

Pour la clarté de l'exposé, nous admettrons dans la suite que le système est initialement au repos, dans un état instable, et qu'il tend naturellement vers le premier cycle limite stable de la séquence précédente. Cela ne restreint nullement la généralité des résultats.

Dans le paragraphe A (*Extension de la méthode opérationnelle*), nous supposons que ce cycle stable est atteint, et nous rechercherons, la solution sous la forme d'une oscillation quasi-sinusoïdale d'amplitude constante.

Dans le paragraphe B. (*Extension de la méthode de Nyquist*), nous étudierons la loi d'évolution vers ce premier cycle limite. En particulier nous obtiendrons une expression générale de la constante de temps de retour au régime stable.

Comme ces résultats restent valables pour un cycle limite instable, ou dans son proche voisinage, le signe de la constante de temps ainsi obtenue conduit à un critère de stabilité :

Le cycle limite est stable si la constante de temps est positive, instable si la constante de temps est négative.

A. — EXTENSION DE LA MÉTHODE OPÉRATIONNELLE.

1. Espace transformé. — Nous avons mis l'équation non linéaire qui régit l'oscillateur sous la forme

$$(15) \quad H(x) \equiv H_1(x) + H_2(x) = 0,$$

dans laquelle H_1 et H_2 sont deux expressions fonctionnelles, la première linéaire, et la deuxième non linéaire.

Le principe de superposition n'est plus applicable à l'opérateur H. C'est dire qu'étant données deux fonctions quelconques $x_1(t)$ et $x_2(t)$, on a

$$H(x_1 + x_2) \neq H(x_1) + H(x_2)$$

et

$$H(kx_1) \neq kH(x_1) \quad (k, \text{ scalaire arbitraire}),$$

Dans le langage vectoriel nous noterons qu'étant donnés deux vecteurs $|x_1\rangle$ et $|x_2\rangle$ de l'espace de Hilbert défini plus haut, on a

$$H\{|x_1\rangle + |x_2\rangle\} \neq H|x_1\rangle + H|x_2\rangle$$

et

$$H\{k|x_1\rangle\} \neq kH|x_1\rangle.$$

La transformation H fait donc subir une « distorsion » à l'espace initial.

Au voisinage de l'origine, la transformation est approximativement linéaire puisque pour de faibles valeurs de x , $H(x)$ tend à se confondre avec $H_1(x)$. Cette transformation limite définit l'espace linéaire tangent, à l'origine. Cet espace tangent admet évidemment pour vecteurs propres les vecteurs $|V_n\rangle$ associés aux exponentielles complexes $e^{j\omega t}$, mais il est aisé de se rendre compte que cette notion de vecteurs propres perd sa signification quand on s'éloigne de l'origine. En effet, lorsque les amplitudes ne sont plus infiniment petites, l'expression $H(ae^{j\omega t})$ comprend un certain nombre de termes harmoniques.

Par exemple si l'on forme cette expression dans le cas de l'équation de Van der Pol :

$$LC \frac{d^2x}{dt^2} + (Ms + rC + 3Mbx^2) \frac{dx}{dt} + x = 0,$$

on trouve

$$H(ae^{j\omega t}) \equiv [1 - LC\omega^2 + j\omega(Ms + rC)]ae^{j\omega t} + 3j\omega Mba^2e^{3j\omega t}.$$

Plus généralement on posera

$$H(ae^{j\omega t}) = H_0^* + H_1^*e^{j\omega t} + H_2^*e^{2j\omega t} + \dots + H_n^*e^{nj\omega t} + \dots,$$

où les coefficients H_0^* , H_1^* , ..., H_n^* , sont fonctions à la fois de a et de ω , c'est-à-dire de la longueur et de la direction du vecteur.

Les directions propres initiales ne sont pas conservées, puisque la transformation fait apparaître des composantes H_0^* , H_1^* , ..., H_n^* sur tous les vecteurs de base. Ces coefficients sont commodes pour

traduire la distorsion de l'espace transformé lorsqu'on s'écarte de l'origine. Suivant l'importance de la distorsion dans la région où nous nous placerons, nous serons amenés à considérer les composantes H_2^* , H_3^* , ... H_n^* , soit comme des termes correctifs, soit comme des termes de dimension finie.

Nous noterons que les coefficients H_0^* , H_1^* , ... H_n^* ne sont plus des opérateurs mais des nombres, qui remplacent la valeur propre unique du cas linéaire. Ils sont calculables à partir de l'intégrale de Fourier,

$$H_n^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(ae^{j\omega t}) e^{-jn\omega t} d(\omega t).$$

2. Recherche de la solution sous la forme d'une série de Fourier. — Nous chercherons une solution de l'équation

$$(15) \quad H(x) = 0$$

sous la forme d'une série de Fourier,

$$x = \sum_n a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t.$$

Nous nous placerons dans le cas où le fondamental

$$x_1 = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t$$

est prépondérant et nous poserons

$$x = x_1 + \varepsilon, \quad \text{avec } \varepsilon = \sum_{n \neq 1} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t.$$

Notons que :

1° L'origine des temps étant arbitraire, nous pouvons choisir pour expression du fondamental

$$x_1 = a \cos \omega t$$

et nous poserons

$$x = a \cos \omega t + \varepsilon(t).$$

2° Nous ne pouvons plus adopter pour terme fondamental l'exponentielle complexe $ae^{j\omega t}$ car l'équation (15) n'est pas linéaire. La

méthode si utile dans le cas linéaire est en défaut ici. On a, en effet

$$H_2(a \cos \omega t) = H_2\left[\frac{a}{2} e^{j\omega t} + \frac{a}{2} e^{-j\omega t}\right] \neq H_2\left(\frac{a}{2} e^{j\omega t}\right) + H_2\left(\frac{a}{2} e^{-j\omega t}\right).$$

ce qui interdit de séparer les deux exponentielles complexes $e^{j\omega t}$ et $e^{-j\omega t}$.

Si nous portons l'expression de x dans l'équation (15), nous obtenons

$$(16) \quad H[a \cos \omega t + \varepsilon] \equiv H_1(a \cos \omega t + \varepsilon) + H_2(a \cos \omega t + \varepsilon) = 0.$$

Deux cas sont alors à envisager :

a. Le cas où H_2 présente une forte distorsion et où, en première approximation, on peut négliger dans $H_2(a \cos \omega t + \varepsilon)$ les harmoniques dus au terme ε devant les harmoniques importants créés par le fondamental (forte distorsion de l'espace transformé dans la région envisagée). L'équation (16) se réduit alors à

$$(17) \quad H_1(a \cos \omega t + \varepsilon) + H_2(a \cos \omega t) = 0,$$

b. Le cas où H_2 présente une faible distorsion et où les harmoniques dus au terme ε sont en concurrence avec ceux qui sont créés par le fondamental, eux-mêmes très petits.

CAS D'UNE FORTE DISTORSION. — Plaçons-nous d'abord dans le premier cas en examinant l'équation (17).

H_2 est un opérateur non linéaire, par conséquent $H_2(a \cos \omega t)$ se présentera sous la forme d'une série de Fourier,

$$H_2(a \cos \omega t) = \sum_n \xi_n \cos n\omega t + \sum_n \eta_n \sin n\omega t.$$

Les coefficients ξ_n et η_n sont réels puisque l'expression différentielle de H_2 ne fait intervenir aucun nombre complexe. Il s'ensuit que si nous utilisons le développement de $H_2(a \cos \omega t)$ sous forme d'exponentielles complexes, les coefficients correspondant à des pulsations opposées seront *complexes conjugués*.

On a

$$(18) \quad H_2(a \cos \omega t) = \sum_{+\infty}^{+\infty} K_n^* e^{jn\omega t},$$

K_n^* et K_{-n}^* sont complexes conjugués. Ces coefficients sont différents des H_n^* rencontrés plus haut, bien que leur signification reste la même. En particulier ils sont fonction de a et de ω .

En ce qui concerne la partie linéaire $H_1(a \cos \omega t + \varepsilon)$, on peut lui appliquer la méthode classique utilisant le développement de $a \cos \omega t + \varepsilon$ en série d'exponentielles complexes.

On a alors

$$(19) \quad H_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_1(\alpha_n e^{nj\omega t}),$$

avec

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{a}{2}, \\ \alpha_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, \\ \alpha_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}. \end{array} \right.$$

L'équation (17) s'écrira donc

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{ K_n^* + \alpha_n H_1(nj\omega) \} e^{nj\omega t} = 0.$$

Elle est équivalente au système de n équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ K_n^* + \alpha_n H_1(nj\omega) = 0, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Pour $n = 1$, on a la première équation

$$(21) \quad K_1^*(a, j\omega) + \frac{a}{2} H_1(j\omega) = 0.$$

Elle est équivalente à deux équations réelles et permet le calcul de la *pulsation fondamentale* et de l'*amplitude stabilisée*. Nous retrouverons cette équation dans la méthode du « diagramme mobile ».

Le premier membre, en effet, est souvent une fonction analytique, représentable sur le plan complexe par un diagramme qui dépend du paramètre a . Il se déforme lorsque l'amplitude varie et passe par l'origine au moment de la stabilisation.

Pour $n \neq 1$, les équations successives permettent le calcul des

amplitudes des divers harmoniques. On a, en effet, a et ω étant connus :

$$(22) \quad \alpha_n = -\frac{K_n^*}{H_1(nj\omega)}.$$

Application à l'équation de Van der Pol. — Pour l'équation de Van der Pol, on a

$$H_2(x) \equiv 3Mbx^2 \frac{dx}{dt}.$$

on en déduit

$$H_2(a \cos \omega t) \equiv j\omega \frac{3Mba^3}{2} \left[-\frac{a^2}{4} e^{-3j\omega t} - \frac{a^2}{4} e^{-j\omega t} + \frac{a^2}{4} e^{j\omega t} + \frac{a^2}{4} e^{3j\omega t} \right]$$

d'où

$$\begin{aligned} K_{-3}^* &= -j\omega \frac{3Mba^3}{8}, & K_{-1}^* &= -j\omega \frac{3Mba^3}{8}, \\ K_3^* &= j\omega \frac{3Mba^3}{8}, & K_1^* &= j\omega \frac{3Mba^3}{8}. \end{aligned}$$

La partie linéaire donne

$$H_1(j\omega) \equiv -LC\omega^2 + j\omega(Ms + rC) + 1.$$

L'amplitude et la pulsation à la stabilisation sont solution de l'équation (21) qui prend ici la forme

$$j\omega \frac{3Mba^3}{8} + \frac{a}{2} [1 - LC\omega^2 + j\omega(Ms + rC)] = 0.$$

Supposant $a \neq 0$, on en déduit les deux équations réelles

$$(23) \quad \begin{cases} 1 - LC\omega^2 = 0, \\ \frac{3Mba^3}{4} + (Ms + rC) = 0. \end{cases}$$

On trouve les valeurs classiques

$$(24) \quad \begin{cases} \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \\ a_s = \sqrt{-\frac{4(Ms + rC)}{3Mb}}. \end{cases}$$

Puisque le coefficient K_2^* est nul, il n'y a pas d'harmonique 2. L'harmonique 3 a pour amplitude complexe

$$\alpha_3 = -\frac{j\omega \frac{3Mb}{8} a_s^2}{1 - 9LC\omega^2 + 3j\omega(Ms + rC)}$$

ou, tenant compte de (24)

$$\alpha_3 = \frac{j\omega \frac{3Mb}{8} a_2^3}{8 - 3j\omega(Ms + rC)}.$$

Au voisinage de l'accrochage ($Ms + rC \simeq 0$) le deuxième terme du dénominateur est négligeable et α_3 se réduit à

$$\alpha_3 = j\omega \frac{3Mb}{64} a_2^3,$$

l'amplitude réelle de l'harmonique 3 s'en déduit d'après (20). On a

$$b_3 = -\frac{3Mb\omega}{32} a_2^3 = \frac{(Ms + rC)\omega}{8} a_2.$$

Validité de la méthode. — Le raisonnement n'est valable que si les harmoniques sont de faible amplitude devant le fondamental. Le module de α_n doit donc être petit, ce qui entraîne la condition

$$(25) \quad |K_n^*| \ll |H_1(nj\omega)|.$$

Généralement la distorsion de l'espace non linéaire est telle qu'on ait

$$|K_n^*| \ll |K_1^*|.$$

Par conséquent la condition

$$|K_1^*| \ll H_1(nj\omega)$$

entraîne l'inégalité (25).

D'autre part l'équation (21) donne

$$|K_1^*| = \frac{a}{2} |H_1(j\omega)|.$$

On peut donc prendre pour condition de validité de la méthode l'inégalité

$$\frac{a}{2} |H_1(j\omega)| \ll |H_1(nj\omega)|.$$

La fonctionnelle H_1 étant donnée, on voit que la condition est vérifiée aux faibles amplitudes, donc au voisinage de l'accrochage.

Pour une amplitude stabilisée imposée, on peut aussi satisfaire la condition par

$$|H_1(j\omega)| \ll |H_1(nj\omega)| \frac{2}{a}.$$

Cette dernière inégalité est vérifiée :

1° Si le système linéaire d'opérateur H_1 est stable et présente une résonance très aiguë, ω étant dans la bande de résonance. Ce sera le cas, par exemple, d'un oscillateur à quartz, dans lequel un quartz de très grande qualité est couplé à un circuit d'entretien plus ou moins non linéaire.

2° Si le système linéaire d'opérateur H_1 est instable, et si l'on est au voisinage de l'accrochage, ω étant voisin de la fréquence propre du système linéaire.

Dans ces deux cas, l'amortissement apparent ($M_s + rC$ pour l'oscillateur de Van der Pol) positif ou négatif est très faible, et la fréquence est voisine de la fréquence qu'aurait le système si l'amortissement était nul.

CAS D'UNE FAIBLE DISTORSION. — Dans le cas où H_2 présente une faible distorsion, les harmoniques créés par le fondamental sont très faibles, c'est-à-dire du même ordre infinitésimal que ceux dus au terme $\epsilon(t)$, et le terme $H_2(a \cos \omega t + \epsilon)$ de l'équation (16) ne se réduit plus à $H_2(a \cos \omega t)$. Le calcul est évidemment plus compliqué, quoique la méthode subisse peu de modifications.

1° En premier lieu on limitera le développement de $\epsilon(t)$ à quelques termes harmoniques. La précision de la méthode dépendra, par suite, de la rapidité avec laquelle converge la série.

2° On fera agir l'opérateur H_2 sur la somme

$$a \cos \omega t + \sum a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \quad (n \text{ limité}),$$

ce qui conduira, comme plus haut, à un développement en série trigonométrique réelle qu'on mettra encore sous la forme

$$\sum K_n^* e^{nj\omega t}.$$

Mais ici K_n^* est fonction de toutes les amplitudes a, \dots, a_n, b_n et de ω , ce qui complique beaucoup la solution dans le cas général.

3° On dispose encore de l'équation

$$\sum \{ K_n^* + \alpha_n H_1(nj\omega) \} e^{nj\omega t} = 0$$

qui est équivalente au système de n équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ K_n^* + a_n H_1(nj\omega) = 0, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Chaque équation se décompose en deux équations réelles, d'où $2n$ équations qui permettent le calcul de a , ω , ..., a_n , b_n , soit au total $2n$ inconnues.

B. — EXTENSION DE LA MÉTHODE NYQUIST

1. Quelques exemples types. — 1. 1. DÉFINITION DU DIAGRAMME MOBILE. — 1. 1. 1. Deux classes de mécanismes limiteurs d'amplitude. — L'équation différentielle qui régit l'oscillation d'un système non linéaire ne peut être étudiée par la méthode de Nyquist sous sa forme classique. On peut néanmoins étendre la méthode à ce cas, comme nous allons le voir sur quelques exemples.

Remarquons qu'on peut rencontrer deux classes de mécanismes limiteurs d'amplitude.

Dans le premier exemple nous supposons qu'il existe un « filtre d'enveloppe ». La limitation est donc assurée, pour ce type d'oscillateur, soit par l'amplitude a , soit par une fonction simple de l'amplitude, par exemple a^2 . Cela nous permettra d'introduire un paramètre limiteur à variation lente et continue.

Dans le deuxième exemple, c'est la variable elle-même qui contrôlera l'amplitude. L'introduction d'un paramètre limiteur analogue au précédent sera moins directe, et même impossible dans le cas général d'une oscillation de forme quelconque. On pourra le faire apparaître cependant tant que l'oscillation restera pseudo-sinusoidale en considérant la moyenne de la variable sur quelques périodes.

1. 1. 2. Exemple d'un limiteur à filtre d'enveloppe. — Reprenons l'oscillateur considéré plus haut, celui de la figure 3, et ajoutons-y un mécanisme de réaction, fonction de l'amplitude d'oscillation.

L'équation linéaire

$$L_1 C_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} + (r_1 C_1 + Ms) \frac{dV_1}{dt} + V_1 = 0,$$

est remplacée par une autre du type suivant :

$$L_1 C_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} + (r_1 C_1 + Ms) (1 - ma^2) \frac{dV_1}{dt} + V_1 = 0,$$

m étant un coefficient caractéristique du système de contrôle choisi. Si ma^2 tend vers 1, par suite de la croissance de l'amplitude a , le terme résistant devient nul et l'oscillation se stabilise pour

$$a = \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Un exemple simple de ce cas est obtenu en ajoutant, à l'oscillateur pris antérieurement comme type, un système à résistance et capacité

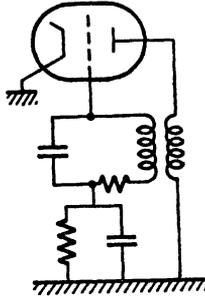


FIG. 8.

en parallèle (fig. 8) apportant par sa grande constante de temps une polarisation automatique de grille.

Linéarisation de l'opérateur différentiel représentatif. — Sur un intervalle de temps assez court, pendant lequel l'amplitude d'oscillation reste voisine d'une valeur a_i , on peut remplacer l'équation non linéaire précédente par l'équation linéaire

$$L_1 C_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} + (r_1 C_1 + Ms) (1 - ma_i^2) \frac{dV_1}{dt} + V_1 = 0,$$

où l'on a donné à a la valeur constante a_i .

L'oscillation pseudo-sinusoïdale représentée par cette équation linéaire a une amplitude qui varie exponentiellement avec le temps. Elle ne coïncide avec l'oscillation du système considéré que lorsque

l'amplitude de cette dernière est voisine de a_t (fig. 9).

Nous l'appellerons « oscillation pseudo-sinusoidale exponentielle tangente » pour $a = a_t$, et l'équation linéaire correspondante « équation linéaire tangente ».

Du point de vue vectoriel, on voit que l'opérateur différentiel linéarisé permet de définir un espace linéaire tangent en tout point de l'espace courbe, défini par l'opérateur non linéaire initial.

On peut faire correspondre un diagramme de Nyquist à chaque équation linéaire tangente, et définir ainsi un diagramme mobile.

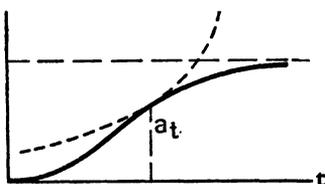


FIG. 9.

Il suffit, pour chaque valeur de a (soit a_t une telle valeur), de remplacer l'équation donnée par l'équation linéaire tangente, auquel cas l'opérateur H devient

$$H \equiv \left[L_1 C_1 \frac{d^2}{dt^2} + (Ms + r_1 C_1) \frac{d}{dt} + 1 - m a_t^2 (r_1 C_1 + Ms) \frac{d}{dt} \right].$$

La pulsation complexe correspondante est encore donnée par l'équation

$$H(j\omega) \equiv -L_1 C_1 \omega^2 + (r_1 C_1 + Ms)j\omega + 1 - m a_t^2 (r_1 C_1 + Ms)j\omega = 0.$$

Pour chaque valeur du paramètre a_t , la pulsation complexe tirée de cette équation, a une valeur différente : elle varie avec l'amplitude.

Déformation lente du diagramme mobile entre l'accrochage et le régime permanent. — Nous construirons, pour $a = a_t$, le diagramme de l'équation linéaire tangente. Le point courant de cette courbe aura pour affixe

$$Z = -L_1 C_1 \omega_r^2 + 1 + j\omega_r (r_1 C_1 + Ms) (1 - m a_t^2)$$

(ω_r désignant une valeur réelle variable donnée à ω).

Lorsque a_t varie au cours du temps, la courbe ainsi obtenue se déforme, engendrant une famille à un paramètre.

La figure 10 représente quelques courbes de la famille. Il ne s'agit pas ici d'une famille de courbes correspondant à différents réglages d'un oscillateur, mais à une évolution continue de l'oscillateur, pour un réglage donné.

En résumé, l'équation d'oscillation est toujours mise sous la forme $H_{op}V = 0$. La différence entre un système linéaire et un système

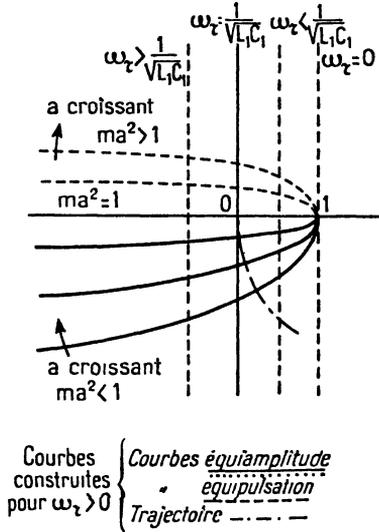


FIG. 10.

non linéaire est marquée par la présence du paramètre a , dans l'expression

$$H_{op} = f \left(\frac{d}{dt}, \frac{d^2}{dt^2}, \dots \right).$$

L'équation aux pulsations déduite de l'équation d'oscillation sera par suite écrite

$$H_1(a_t, \omega) = 0,$$

ce qui permet de remplacer le diagramme unique, construit précédemment à partir de l'affixe $H_1(\omega_r)$ d'un point courant m , par la famille de courbes à un paramètre engendrée par le point d'affixe $H_1(a_t, \omega)$. Nous compléterons le diagramme en représentant les lieux des points pour lesquels ω_r a une valeur donnée, lorsque a_t varie. Nous joignons ainsi à la famille des courbes équi-amplitude précédentes

une deuxième famille, celle des courbes équipulsation dépendant du paramètre ω_r (fig. 10).

1. 1. 3. *Cas d'un limiteur sans filtre d'enveloppe : exemple de l'oscillateur de Van der Pol.* — Partant de l'équation générale

$$H_1(V) + H_2(V) = 0,$$

nous avons vu plus haut qu'à la stabilisation on peut la remplacer, en tenant compte du fait que le régime est très approximativement sinusoïdal, par

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \{ K_n^* + \alpha_n H_1(nj\omega) \} e^{nj\omega t} = 0.$$

Si l'on ne se préoccupe que du fondamental, considérant que dans le cas où nous nous plaçons les harmoniques sont toujours de très faible amplitude, on est amené à porter son attention sur le premier terme :

$$K_1^*(a, j\omega) + \frac{a}{2} H_1(j\omega).$$

Nous nous placerons dans le cas où cette fonction est analytique, et nous noterons que :

1° cette fonction est représentable sur le plan complexe par un diagramme, pour chaque valeur du paramètre a ;

2° à la stabilisation elle s'annule pour les valeurs *réelles* a , et ω . Le diagramme passe dans ce cas par l'origine;

3° en dehors d'un régime stabilisé, pour lequel le diagramme passe par l'origine, l'équation

$$K_1^*(a, j\omega) + \frac{a}{2} H_1(j\omega) = 0,$$

n'admet pas de racine réelle en ω .

4° lorsque l'amplitude a est très faible, comme nous avons supposé que le terme non linéaire H_2 devient négligeable à côté de H_1 , la fonction se réduit à $\frac{a}{2} H_1(j\omega)$. Le diagramme s'identifie alors, au facteur a près, à celui que nous avons tracé dans le cas linéaire, et il nous renseigne sur la stabilité du système dans cet état initial.

En résumé, comme dans le cas d'un limiteur avec filtre d'enveloppe, nous définissons encore un diagramme mobile qui évolue en fonction du paramètre a . Si l'oscillateur est instable aux

faibles amplitudes, l'amplitude croît et la stabilisation est obtenue lorsque le diagramme mobile passe par l'origine. Il reste à montrer que ce diagramme est celui qu'on obtiendrait à partir de l'équation linéaire tangente, qui n'a pas été explicitée ici comme dans le cas d'un limiteur à filtre d'enveloppe. La démonstration de cette propriété est donnée dans l'appendice I.

Remarque. — La définition que nous adoptons ici est légèrement différente de celle du paragraphe ci-dessus. Pour conserver la même notation, nous devons poser ici

$$H_i[a_i, \omega]a_i \equiv K_1^*(a_i, j\omega) + \frac{a_i}{2} H_1(j\omega).$$

Les deux représentations $H_i[a_i, \omega]a_i$ et $H_i[a_i, \omega]$ se déduisent simplement l'une de l'autre.

Dans l'exemple de l'oscillateur de Van der Pol, nous avons

$$K_1^* \equiv j\omega \frac{3Mb a^3}{8},$$

$$H_1(j\omega) \equiv -LC\omega^3 + j\omega(Ms + rC) + 1.$$

1. 2. TEMPS DE RÉACTION A UNE PETITE PERTURBATION. — L'oscillation naturelle, tant qu'elle n'a pas atteint un régime stable, a été assimilée, pendant un court laps de temps, à une pseudo-sinusoïde dont l'amplitude varie exponentiellement avec le temps (*fig. 9*). La constante de temps τ_1 de cette pseudo-sinusoïde tangente servira à définir, pour l'oscillation réelle, une constante de temps instantanée.

Pour chaque valeur a_i de l'amplitude existe une pseudo-sinusoïde tangente différente. La constante de temps τ_1 varie donc avec l'amplitude et nous renseigne, à chaque instant, sur la vitesse d'évolution de l'oscillation.

On peut définir une autre constante de temps τ_2 , liée à la vitesse avec laquelle l'oscillateur, dérangé de son état de régime stable supposé atteint, revient vers cette position d'équilibre. Il existe évidemment une relation entre ces deux constantes de temps. La seconde sera déduite de l'expression trouvée pour la première.

1. 2. 1. *Régime exponentiel tangent (constante de temps τ_1).* — Revenons à l'oscillateur type de la figure 3, dont l'équation aux pulsations est

$$-L_1 C_1 \omega^2 + 1 + j\omega(Ms + r_1 C_1) + \frac{3Mb}{4} a_i^2 j\omega = 0.$$

Nous avons vu que, tant que le régime stabilisé n'est pas atteint, ω est complexe. Posant toujours $\omega = \omega_1 + j\omega_2$ et portant dans cette équation, on obtient

$$\begin{aligned} 1 - L_1 C_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2) - \omega_2 (Ms + r_1 C_1) - \frac{3Mb}{4} a_i^2 \omega_2, \\ - 2jL_1 C_1 \omega_1 \omega_2 + j\omega_1 (Ms + r_1 C_1) + j\omega_1 \frac{3Mb}{4} a_i^2 = 0. \end{aligned}$$

L'annulation des parties réelle et complexe du premier membre donne un système permettant la détermination de ω_1 et ω_2 pour chaque valeur arbitrairement choisie de a_i :

$$(26) \quad \begin{cases} 1 - L_1 C_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2) - \omega_2 \left(Ms + r_1 C_1 + \frac{3Mb}{4} a_i^2 \right) = 0, \\ - 2L_1 C_1 \omega_2 + \left(Ms + r_1 C_1 + \frac{3Mb}{4} a_i^2 \right) = 0. \end{cases}$$

De la seconde, on tire

$$\omega_2 = \frac{Ms + r_1 C_1 + \frac{3Mb}{4} a_i^2}{2L_1 C_1}.$$

Au voisinage de la valeur a_i , l'amplitude de la pseudo-sinusoïde tangente croît donc comme

$$e^{-\omega_2 t} \equiv e^{-\frac{Ms + r_1 C_1 + \frac{3Mb}{4} a_i^2}{2L_1 C_1} t},$$

d'où sa constante de temps

$$\tau_1 = \frac{2L_1 C_1}{Ms + r_1 C_1 + \frac{3Mb}{4} a_i^2},$$

qu'on peut écrire, en faisant apparaître la valeur a_i de l'amplitude stabilisée calculée plus haut :

$$\tau_1 = \frac{2L_1 C_1}{Ms + r_1 C_1} \frac{1}{1 - \frac{a_i^2}{a_i^2}}$$

1. 2. 2. Évolution réelle du système (pseudo-constante de temps τ_2).

— On détermine simplement, comme nous allons le voir, la loi de variation de l'amplitude du phénomène réel avec le temps (courbe en trait plein de la figure 9) et la deuxième constante de temps τ_2 .

Soit $a(t)$ cette loi de variation, qui ne se confond avec celle de la pseudo-sinusoïde tangente qu'au voisinage de a_i .

Au point considéré, il existe entre a_t et la pente $\left(\frac{da}{dt}\right)_{a=a_t}$ la relation

$$\frac{1}{a_t} \left(\frac{da}{dt}\right)_{a=a_t} = -\frac{1}{\tau_1}$$

puisque l'exponentielle en pointillé et la courbe réelle en trait plein ont même tangente (fig. 9). Cette relation s'écrit ici, en remplaçant τ_1 par la valeur calculée ci-dessus :

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_{a=a_t} + \frac{(Ms + r_1 C_1)}{2L_1 C_1} \left(1 - \frac{a_t^2}{a_2^2}\right) a_t = 0.$$

Comme elle est valable quel que soit a_t , l'équation différentielle qui permet de déterminer la loi de variation $a(t)$ représentée par la courbe en trait plein est

$$\dot{a} + \frac{Ms + r_1 C_1}{2L_1 C_1} \left(1 - \frac{a^2}{a_2^2}\right) a = 0.$$

On retrouve ainsi une équation bien connue, d'où l'on tire aisément la valeur classique de la deuxième constante de temps (il suffira de poser $a = a_s + \varepsilon$ et de considérer l'équation comme une équation différentielle en variable infiniment petite)

$$\tau_2 = \frac{L_1 C_1}{Ms + r_1 C_1}.$$

Ces constantes de temps précisent, en même temps que la loi d'évolution de l'amplitude, la loi de variation du diagramme mobile.

La constante de temps τ_2 joue un rôle important dans la détermination de l'effet d'une fonction de bruit sur le système oscillant.

1. 3. LOI FRÉQUENCE-AMPLITUDE; TRAJECTOIRE DE L'OSCILLATEUR.

— Dans le paragraphe précédent, nous avons porté notre attention sur la partie imaginaire pure de ω . Sa partie réelle ω_1 est aussi d'un grand intérêt, puisqu'elle représente la pulsation au sens le plus courant de la pseudo-sinusoïde tangente : $\frac{2\pi}{T}$ si T en désigne la pseudo-période.

De même que ω_2 nous a permis de définir plus haut la constante de temps instantanée de l'oscillation naturelle, cette pulsation réelle ω_1 permet d'en définir la pulsation réelle instantanée.

Comme ω_2 , elle varie avec l'amplitude a_t et c'est cette dépendance que nous examinons ici.

La valeur de ω_1 , pour l'exemple choisi, est immédiatement tirée du système (26), on trouve

$$(27) \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \sqrt{1 - \frac{(Ms + r_1 C_1 + \frac{3Mb}{4} a_i^2)^2}{4L_1 C_1}}$$

ou, en faisant intervenir la valeur a_s de l'amplitude stabilisée

$$(28) \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \sqrt{1 - \frac{(Ms + r_1 C_1)^2}{4L_1 C_1} \left(1 - \frac{a_i^2}{a_s^2}\right)^2}.$$

Cette relation entre la pulsation réelle et l'amplitude peut être traduite sur le diagramme mobile : à chaque valeur réelle ω_1 correspond, en effet, un point particulier du diagramme tracé pour la valeur a_i considérée. Ce point décrit, lorsque a_i varie, une courbe qui sera appelée « trajectoire de l'oscillateur » ; elle est représentée en trait mixte sur la figure 10.

Pour $a_i = a_s$, ω_1 est la pulsation du régime stabilisé, qui vaut

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}.$$

Pour $a_i = 0$, ω_1 vaut

$$\omega_0 = \omega_s \sqrt{1 - \frac{(Ms + r_1 C_1)^2}{4L_1 C_1}},$$

c'est la pulsation de l'oscillation au moment où elle s'amorce, et l'on peut suivre sur le graphique la dérive de fréquence de l'oscillateur entre l'amorçage et la stabilisation de son régime.

Au voisinage de l'amplitude limite la relation (28) peut être écrite

$$\omega_1 = \omega_s \left[1 - \frac{(Ms + r_1 C_1)^2}{8L_1 C_1} \left(1 - \frac{a_i^2}{a_s^2}\right)^2 \right]$$

Si l'on pose

$$\delta\omega = \omega_1 - \omega_s, \quad \delta a = a_i - a_s.$$

On a

$$\delta\omega = -\omega_s \frac{(Ms + r_1 C_1)^2}{2L_1 C_1} \frac{(\delta a)^2}{a_s^2}.$$

On voit qu'une variation infiniment petite d'amplitude, à partir de l'amplitude limite a_s , entraîne une variation de fréquence infiniment petite du second ordre.

Ce cas est assez exceptionnel.

Par exemple pour l'équation de Duffing,

$$\ddot{x} + c\dot{x} + bx + \beta x^3 = 0,$$

on trouverait

$$\omega^2 = b + \frac{3}{4} \beta a^2$$

ou, pour de faibles amplitudes :

$$\omega \simeq \sqrt{b} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{\beta}{b} a^2 \right).$$

On trouverait de même, dans le cas de l'équation

$$LC \frac{d^2 V}{dt^2} + (Ms + rC + 3Mb V^2) \frac{dV}{dt} + (1 + \mu V^2) V = 0,$$

au voisinage de l'amplitude limite

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \left(1 + \frac{3\mu}{4} a^2 \right).$$

De façon générale la dépendance fréquence-amplitude est beaucoup plus marquée lorsque la non-linéarité est introduite dans le coefficient du terme en V ou en $\frac{dV^2}{dt^2}$, que lorsqu'elle est introduite dans le coefficient de $\frac{dV}{dt}$.

2. Adaptation générale de la méthode du diagramme mobile.

Critère de stabilité. — ÉQUATION LINÉAIRE TANGENTE ET SON DIAGRAMME MOBILE. — Nous avons vu sur des exemples qu'étant donnée une équation différentielle non linéaire, et à la condition qu'elle traduise un régime pseudo-sinusoïdal, on peut toujours lui faire correspondre une équation linéaire tangente. Les opérations qui permettent de l'obtenir sont les suivantes :

1° On approche localement le régime par une sinusoïdale

$$a(t) \sin [\omega(t) \cdot t]$$

2° On porte cette expression dans l'équation, et l'on conserve seulement les termes fondamentaux, ce qui la linéarise par rapport aux lignes trigonométriques.

3° Si les coefficients de l'équation ainsi obtenue sont fonction de ω , on y remplace cette pulsation par une valeur approchée, constante (voir appendice I).

4° On remplace les lignes trigonométriques réelles par des exponentielles complexes, et l'opérateur différentiel linéarisé par la fonction analytique

$$H_1(a, \omega).$$

On peut alors construire le diagramme de H_i en donnant à ω une valeur réelle variant de $-\infty$ à $+\infty$. Ce diagramme est déformable puisqu'il dépend du paramètre a_i . Il évolue lorsque l'oscillateur passe de l'amorçage à la stabilisation. Tant que l'oscillateur n'a pas atteint un régime d'équilibre, il ne peut passer par l'origine puisque l'équation

$$H_i(a_i, \omega) = 0$$

n'admet pas de solution réelle en ω .

Il passe par l'origine à l'équilibre.

La détermination de l'amplitude d'équilibre revient à la recherche d'une valeur du paramètre a_i pour laquelle le diagramme mobile passe par l'origine, c'est-à-dire pour laquelle l'équation

$$H_i(a_i, \omega) = 0$$

admet une solution réelle en ω . L'équation peut admettre plusieurs solutions qui correspondent chacune à un cycle limite.

Si l'on appelle a_i et ω_i l'amplitude et la pulsation réelle du régime d'équilibre, on a

$$(29) \quad H_i(a_i, \omega_i) = 0.$$

Remarque. — Nous avons noté au passage la possibilité d'adopter pour le diagramme deux représentations peu différentes l'une de l'autre : la représentation $H_i(a_i, \omega \text{ réel})$ et la représentation $H_i(a_i, \omega \text{ réel}) a_i$, cette dernière se prête mieux à l'étude de certains problèmes, tels que, par exemple, celui de la synchronisation de l'oscillateur. (Dans la suite « ω réel » sera désigné par ω_r).

COURBES ÉQUIAMPLITUDE ET COURBES ÉQUIPULSATION. — Le point courant M , d'affixe $H_i(a_i, \omega_r) a_i$ (ω_r désignant une valeur réelle arbitraire donnée à ω), se déduit de l'image m de $H_i(a_i, \omega_r)$ par l'homothétie de centre O et de rapport a_i . Si l'on donne à a_i une valeur constante, le point M décrit, lorsque ω_r varie, une courbe équi-amplitude que nous désignerons par (a_i) .

Les courbes obtenues dans les deux représentations sont homothétiques l'une de l'autre par rapport à O .

On peut aussi donner à ω une valeur réelle constante ω_r . Lorsque a_i varie, le point M décrit alors une courbe équi-pulsation que nous désignerons par (ω_r) .

Chaque point d'une courbe (ω_r) donnée correspond donc à une

valeur différente de a_i . Par suite, les courbes équipulsation obtenues dans les deux représentations ne sont pas homothétiques l'une de l'autres.

On peut préciser l'aspect des courbes (ω_r) :

Lorsque a_i est petit, $H_i(a_i, \omega_r)$ a_i peut être remplacé par $H_i(\omega_r)a$ et il s'ensuit que les courbes équipulsation correspondantes sont assimilables dans cette région à des segments de droites issus de l'origine.

Lorsque ω_r est égal à la pulsation ω , du régime stabilisé, il existe une valeur de a_i pour laquelle $H_i(a_i, \omega_s)$ est nul : c'est l'amplitude stabilisée a_s . On a alors $H_i(a_s, \omega_s)a_s = 0$. La courbe équipulsation (ω_s) passe donc par O, à la fois pour $a_i = 0$ et pour $a_i = a_s$; elle a donc une forme de boucle comme le représente la figure 11. Cette

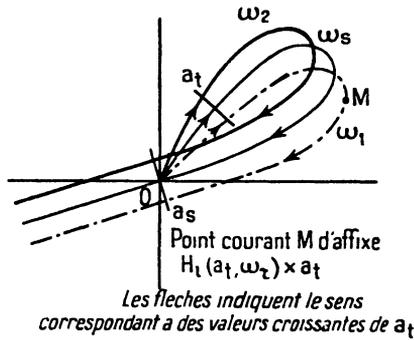


FIG. 11.

boucle peut d'ailleurs, dans certains cas particuliers, s'aplatir suivant un segment de droite, un exemple nous a été donné par l'équation de Van der Pol.

Les courbes pour lesquelles ω_r est voisin de ω_s s'écartent assez peu de la boucle précédente et il est possible de se faire une idée de leur forme (fig. 11).

On peut suivre aussi l'évolution d'une courbe équi-amplitude pour des valeurs croissantes de a_i , depuis $a_i = 0$ (on admet que le système est initialement instable). On voit ainsi que cette courbe, confondue avec l'origine O pour $a_i = 0$, passe par O lorsque a_i a

atteint la valeur a_i , c'est-à-dire lorsque l'oscillateur a atteint son régime d'équilibre.

Nous constaterons que, dans le cas des systèmes linéaires, les courbes équipulsation se réduisent à un faisceau de droites issues de O. Le fait qu'elles ne s'incurvent pas, comme dans les cas non linéaires à cycles limites, entraîne pour les courbes équi-amplitude l'impossibilité de passer par O pour $a_i \neq 0$ et cela traduit l'impossibilité de stabilisation des oscillateurs à loi linéaire.

TRAJECTOIRE DE L'OSCILLATEUR. — Sur chaque courbe équi-amplitude (a_i) existe un point particulier correspondant à la pulsation réelle naturelle instantanée. Le lieu de ce point, lorsque a_i varie, a été appelé « trajectoire de l'oscillateur ».

La trajectoire d'un oscillateur n'est généralement pas une courbe équipulsation puisque, comme nous l'avons vu, la pulsation complexe naturelle instantanée varie avec l'amplitude d'oscillation.

Cette trajectoire passe évidemment par O pour $a_i = 0$. Elle passe à nouveau par O pour $a_i = a$, puisque la pulsation, alors réelle, et l'amplitude stabilisée vérifient $H_i(a_i, \omega_i)a_i = 0$.

On peut montrer, de plus, que cette trajectoire est, au voisinage de la stabilisation, orthogonale à la famille des courbes équi-amplitude correspondantes (appendice III) et qu'il en est de même aux très faibles amplitudes.

Ces remarques apportent quelques renseignements très généraux sur sa forme.

LOI FRÉQUENCE-AMPLITUDE. — Au voisinage de la stabilisation, on est amené à assimiler la trajectoire de l'oscillateur à un segment de droite passant par O. La courbe équi-amplitude (ω_i) est aussi assimilable à un segment de droite passant par O. La divergence entre ces deux tronçons rectilignes indique donc comment la pulsation naturelle instantanée varie avec l'amplitude au voisinage de la stabilisation.

Nous avons exprimé algébriquement cette dépendance pulsation-amplitude dans certains cas particuliers. Il est possible de donner maintenant des formules plus générales exprimant cette loi.

On peut montrer en particulier (appendice IV) que, au voisinage de la stabilisation, les variations $\delta\omega_1$ et $\delta\omega_2$ apportées à la partie

réelle et imaginaire pure de la pulsation complexe par une variation d'amplitude δa , sont données par

$$(30) \quad \delta\omega_1 = - \frac{\left[\frac{\partial U}{\partial\omega} \frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial\omega} \frac{\partial V}{\partial a} \right]_{a=a_s, \omega=\omega_s}}{\left(\frac{\partial U}{\partial\omega} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial\omega} \right)^2}, \quad \delta a = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial\omega} & \frac{\partial V}{\partial\omega} \\ \frac{\partial V}{\partial a} & \frac{\partial U}{\partial a} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial\omega} & \frac{\partial V}{\partial\omega} \\ \frac{\partial V}{\partial\omega} & \frac{\partial U}{\partial\omega} \end{vmatrix}} \delta a,$$

$$(31) \quad \delta\omega_2 = - \frac{\left[\frac{\partial U}{\partial a} \frac{\partial V}{\partial\omega} - \frac{\partial U}{\partial\omega} \frac{\partial V}{\partial a} \right]_{a=a_s, \omega=\omega_s}}{\left(\frac{\partial U}{\partial\omega} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial\omega} \right)^2}, \quad \delta a = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial a} & \frac{\partial U}{\partial\omega} \\ \frac{\partial V}{\partial a} & \frac{\partial V}{\partial\omega} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial\omega} & \frac{\partial V}{\partial\omega} \\ \frac{\partial V}{\partial\omega} & \frac{\partial U}{\partial\omega} \end{vmatrix}} \delta a;$$

U et V sont les parties réelle et imaginaire de $H_i(a_i, \omega_r)$; ω_s est toujours la pulsation du régime stabilisé.

$\omega_s + \delta\omega_1$ est alors la pulsation réelle instantanée de l'oscillation naturelle quand son amplitude est $a_{i_0} = a_s + \delta a$, la pulsation complexe instantanée correspondante étant $\omega_s + \delta\omega_1 + j \delta\omega_2$.

L'expression $\delta\omega_2$ est évidemment liée aux constantes de temps τ_1 et τ_2 introduites antérieurement.

CONSTANTES DE TEMPS τ_1 ET τ_2 . — La définition des constantes de temps τ_1 et τ_2 de l'oscillateur a été donnée plus haut : il s'agit de la constante de temps du régime exponentiel tangent et de la constante de temps de retour au régime stabilisé.

La constante de temps instantanée de l'oscillation naturelle est

$$(32) \quad \tau_1 = \frac{1}{\delta\omega_2}.$$

La constante de temps τ_2 qui caractérise le retour à l'équilibre de l'oscillateur, supposé légèrement écarté de cet état, sera obtenue suivant la méthode déjà développée sur un exemple.

On exprimera d'abord le contact, à l'instant t_0 , entre la pseudo-sinussoïde tangente et la courbe $a(t)$ représentant l'évolution de l'amplitude de l'oscillation naturelle.

On a donc

$$\frac{1}{a_{i_0}} \left(\frac{da}{dt} \right)_{t_0} = -\delta\omega_2$$

ou

$$\left(\frac{da}{dt} \right)_{t_0} + \frac{|N|}{|D|} a_{i_0} \delta a = 0,$$

en posant

$$|N| = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial a} & \frac{\partial U}{\partial \omega} \\ \frac{\partial V}{\partial a} & \frac{\partial V}{\partial \omega} \end{vmatrix}, \quad |D| = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial \omega} & -\frac{\partial V}{\partial \omega} \\ \frac{\partial V}{\partial \omega} & \frac{\partial U}{\partial \omega} \end{vmatrix}.$$

Il est commode de prendre alors δa comme nouvelle variable. (Nous poserons pour simplifier l'écriture, $\delta a = \varepsilon$, avec $\varepsilon = a_{i_0} - a_{s^*}$.)

Compte tenu de ce que ε est petit, l'équation ci-dessus peut être remplacée par

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{t_0} + \frac{|N|}{|D|} a_{s^*} \varepsilon = 0.$$

Cette équation donne la loi d'évolution de ε et traduit le retour à l'équilibre de l'oscillateur. On en tire

$$\varepsilon = e^{-\frac{|N|}{|D|} a_{s^*} t}.$$

D'où l'expression de

$$(33) \quad \tau_2 = \frac{1}{a_s} \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial \omega} & -\frac{\partial V}{\partial \omega} \\ \frac{\partial V}{\partial \omega} & \frac{\partial U}{\partial \omega} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial a} & \frac{\partial U}{\partial \omega} \\ \frac{\partial V}{\partial a} & \frac{\partial V}{\partial \omega} \end{vmatrix}}.$$

CRITÈRE DE STABILITÉ ⁽¹⁾. — Il est facile de contrôler que les résultats précédents, obtenus en supposant que le cycle limite atteint par l'oscillateur est stable, subsistent lorsqu'on se place sur un cycle limite instable, ou dans son proche voisinage. Il s'ensuit que le signe de la constante de temps τ_2 renseigne sur la stabilité du cycle limite obtenu par la méthode du diagramme mobile.

⁽¹⁾ L. LOEB, *Congrès international sur le contrôle automatique*, Cranfield, 1951 (voir aussi la référence [5]).

La formule ci-dessous

$$\tau_2 = \frac{1}{a_s} \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \omega}\right)^2}{\frac{\partial U}{\partial a} \frac{\partial V}{\partial \omega} - \frac{\partial U}{\partial \omega} \frac{\partial V}{\partial a}}$$

montre que le signe de $\frac{\partial U}{\partial a} \frac{\partial V}{\partial \omega} - \frac{\partial U}{\partial \omega} \frac{\partial V}{\partial a}$ constitue un critère de stabilité.

On peut donner de cette expression une interprétation géométrique simple. Soit \mathbf{V}_1 le vecteur de composantes $\frac{\partial U}{\partial a}$, $\frac{\partial V}{\partial a}$, et \mathbf{V}_2 le vecteur de composantes $\frac{\partial U}{\partial \omega}$, $\frac{\partial V}{\partial \omega}$, ces dérivées étant prises pour $\omega = \omega_s$ et $a = a_s$, c'est-à-dire au point O. L'expression $\frac{\partial U}{\partial a} \frac{\partial V}{\partial \omega} - \frac{\partial U}{\partial \omega} \frac{\partial V}{\partial a}$ représente la mesure du produit vectoriel $\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2$.

Par conséquent, si l'angle formé par ces vecteurs est positif, le cycle limite est stable. Il est instable si cet angle est négatif.

Remarquons enfin que le vecteur \mathbf{V}_2 est tangent, au point O, à l'équipulsation qui passe par O, tandis que \mathbf{V}_1 est tangent à l'équiamplitude correspondante. Il suffit d'orienter ces deux courbes dans les sens où ω et a sont croissants pour énoncer le critère sous une autre forme :

Si l'angle que fait l'équiamplitude avec l'équipulsation au point O est positif le cycle limite est stable. Il est instable dans le cas contraire.

CONTINUITÉ DU PASSAGE DES ÉTATS QUASI LINÉAIRES AUX RÉGIMES NETTEMENT NON LINÉAIRES. — A l'approximation linéaire, il est encore possible de faire apparaître un diagramme mobile. Il présentera l'avantage sur le diagramme fixe qu'on trace ordinairement dans ce cas, de faire apparaître la continuité entre les états quasi linéaires et les régimes nettement non linéaires.

Il suffit de remplacer le point courant m image de $H_i(\omega_r)$ par le point courant M image de $H_i(\omega_r)a_i$ (a_i désignant toujours l'amplitude d'oscillation à un instant donné). Cette deuxième représentation présente donc ici encore un avantage sur la première.

Courbes équiamplitude et courbes équipulsation. — Le réseau des courbes équiamplitude et des courbes équipulsation sera construit facilement à partir du diagramme fixe $H_i(\omega$ réel). Les courbes équiamplitude se déduisent de cette dernière par l'homothétie de centre O.

et de rapport a_i , a_i ayant pour chaque courbe une valeur donnée.

Les courbes équipulsation sont obtenues en donnant à ω une valeur réelle constante ω_r . Chaque point d'une courbe équipulsation est donc déduite d'un même point fixe du diagramme fixe. Ces courbes se réduisent donc ici à un faisceau de demi-droites issues de O.

Les courbes équi-amplitude et équipulsation seront encore désignées par (a_i) et (ω_r) .

On peut suivre, comme dans le cas non linéaire, l'évolution du diagramme à un paramètre que nous venons de définir (*fig. 12*).

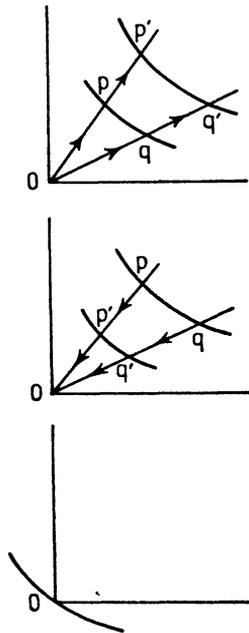


FIG. 12.

L'amplitude d'oscillation a_i étant supposée initialement différente de zéro, l'oscillateur peut se comporter de diverses façons; supposons d'abord que la condition d'accrochage ne soit pas exactement vérifiée :

1° Le système peut être instable. Le diagramme mobile ne passe pas initialement par l'origine et tous ses points s'éloignent ensuite de O suivant la loi d'évolution indiquée plus haut (homothétie de rapport croissant).

2° Le système peut tendre vers le repos. La courbe ne passe pas initialement par l'origine et tous ses points s'en rapprochent, se confondant à la limite en O.

Si la condition d'accrochage est exactement vérifiée, la courbe passe par O et le système n'évolue pas (état d'équilibre indifférent).

On voit qu'un régime d'oscillation stable à cycle limite ne peut jamais s'établir, et que cela tient à l'impossibilité pour le diagramme mobile de passer par l'origine en dehors du cas limite où la condition d'accrochage est vérifiée. Ce passage par l'origine, pour une valeur convenable de l'amplitude, est au contraire permis au diagramme mobile d'un système non linéaire.

Trajectoire de l'oscillateur. — Sur chaque courbe équi-amplitude (a_i) se trouve un point M_0 particulier, correspondant à la partie réelle de la pulsation complexe naturelle. Le lieu de ce point lorsque (a_i) varie est la « trajectoire de l'oscillateur » précédemment définie.

Puisque la pulsation complexe naturelle est, pour un système linéaire, indépendante de l'amplitude, la trajectoire d'un tel oscillateur est une courbe équipulsation particulière. C'est une demi-droite issue de O.

Suivant la propriété générale, cette demi-droite est orthogonale à la famille des courbes (a_i). Il est clair que cela tient ici au fait que, sur chaque courbe (a_i) le point M_0 correspond à un extremum du rayon vecteur.

C. — MÉTHODE DE PERTURBATION; AUTRE CRITÈRE DE STABILITÉ.

Nous nous placerons toujours dans le cas d'un système à un degré de liberté. La définition de la stabilité d'un état nous conduira à envisager deux solutions $x(t)$ et $x(t) + \epsilon(t)$, telles qu'à l'instant initial $\epsilon(0)$ soit infiniment petit par rapport à $x(0)$:

Le régime $x(t)$ est considéré comme stable si $\epsilon(t)$ reste borné au cours de son évolution.

La condition de stabilité se déduit par conséquent de l'équation de perturbation, qu'on obtient en remplaçant $x(t)$ par $x(t) + \epsilon(t)$ dans l'équation donnée, compte tenu de ce que $x(t)$ est solution.

Si nous prenons pour exemple l'équation de Duffing,

$$\ddot{x} + bx + \beta x^3 = 0,$$

L'équation de perturbation est

$$(34) \quad \ddot{\varepsilon} + (b + 3\beta x^2)\varepsilon = 0$$

L'étude de la stabilité du mouvement nous ramène à celle d'une équation de Hill puisque $x(t)$ est une fonction périodique. L'équation (34) est même pratiquement une équation de Mathieu si la non-linéarité est assez faible pour qu'on puisse assimiler $x(t)$ à une sinusoïde.

De façon générale, les équations de perturbation sont linéaires par rapport à $\varepsilon(t)$, et leurs coefficients sont fonctions du temps, ce qui rend ordinairement très difficile une étude rigoureuse. Nous verrons cependant qu'une solution de première approximation suffit à fournir un critère de stabilité, dans le cas des régimes quasi sinusoïdaux où nous nous sommes placés. Elle nous conduira à un système de deux équations linéaires à *coefficients constants*, distinctes lorsque l'équation de départ est non linéaire, et identiques dans les cas linéaires. La discussion sera ainsi considérablement simplifiée. Nous exposerons la méthode sur les deux exemples suivants, ce qui n'en restreint pas la généralité.

1. Exemple I: Équation de Lord Rayleigh. — L'équation, obtenue par Lord Rayleigh, dans son étude des vibrations entretenues

$$\ddot{x} - (\alpha - \beta \dot{x}^2)\dot{x} + Kx = 0$$

peut être aisément ramenée à la forme

$$\ddot{x} + x + \mu f(x, \dot{x}) = 0,$$

par utilisation d'un temps réduit, avec

$$f(x, \dot{x}) = m\dot{x}^3 - n\dot{x}.$$

où m et n sont de nouvelles constantes. Nous adopterons donc pour premier exemple l'équation réduite

$$(35) \quad \ddot{x} + x + \mu(m\dot{x}^3 - n\dot{x}) = 0$$

dans laquelle nous supposerons μ petit.

DIAGRAMME MOBILE. — Pour $\mu = 0$, $x = a \cos t$ est solution de l'équation. Le terme non linéaire $\mu m \dot{x}^3$ devient, lorsqu'on le réduit, en première approximation, à son fondamental

$$\mu m \dot{x}^3 \sim -\frac{3}{4} \mu m a^3 \sin t$$

ou

$$\mu m \dot{x}^3 \sim \frac{3}{4} \mu m a^2 \dot{x}.$$

L'équation linéaire tangente est donc

$$(36) \quad \ddot{x} - \mu \left[n - \frac{3}{4} m a^2 \right] \dot{x} + x = 0$$

On en déduit la forme du diagramme mobile, défini par (fig. 13).

$$(37) \quad H_i(a, \omega) \equiv 1 - \omega^2 - j\omega\mu \left[n - \frac{3}{4} m a^2 \right].$$

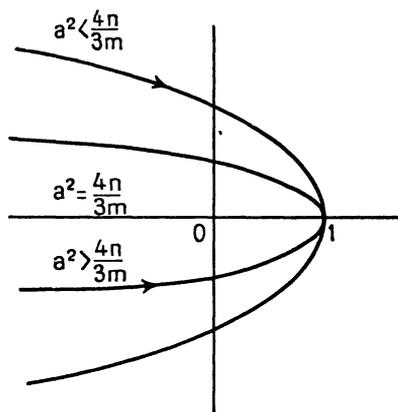
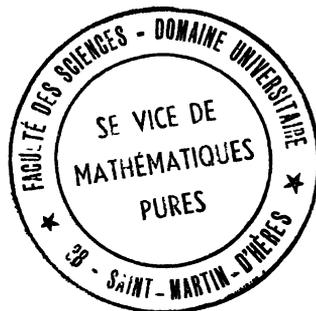


FIG. 13.



ÉQUATION DE PERTURBATION. — Posons $X = x + \varepsilon$, avec les hypothèses suivantes, qui seront justifiées par le fait que la perturbation la plus générale de notre système oscillant se réduit à la somme d'une perturbation de phase et d'une perturbation d'amplitude.

1° $x(t)$ et $\varepsilon(t)$ seront supposés de la forme

$$x(t) \equiv a(t) \cos t \quad \text{et} \quad \varepsilon(t) \equiv \alpha(t) \cos (t + \varphi),$$

$a(t)$ et $\alpha(t)$ étant des fonctions du temps lentement variables.

2° $\alpha(t)$ sera un infiniment petit du premier ordre par rapport à $a(t)$, d'où

$$|\varepsilon(t)| \ll |x(t)|, \quad |\dot{\varepsilon}(t)| \ll |\dot{x}(t)|.$$

Remarquons que pour $\varphi = 0$ la perturbation se réduit à une modification d'amplitude de $x(t)$ sans modification de phase. On a,

en effet, dans ce cas

$$X = [a(t) + \alpha(t)] \cos t.$$

Pour $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, on a

$$X = a(t) \cos t + \alpha(t) \sin t,$$

il s'ensuit que la perturbation se réduit, au premier ordre, à une modification de phase de $x(t)$ sans modification d'amplitude.

Avec nos hypothèses, l'équation de perturbation est

$$(38) \quad \ddot{\varepsilon} + \mu[3m\dot{x}^2 - n] \dot{\varepsilon} + \varepsilon = 0.$$

Comme elle est linéaire par rapport à $\varepsilon(t)$, nous pouvons décomposer $\varepsilon(t)$ en une perturbation en phase et une perturbation en quadrature dont nous envisageons séparément l'effet.

PERTURBATION EN PHASE. — Remplaçons dans l'équation (38), $x(t)$ et $\varepsilon(t)$ respectivement par $a(t) \cos t$ et $\alpha(t) \cos t$. Négligeons les termes en $\dot{a}(t)$, $\alpha(t)$ et $\dot{\alpha}(t)$ pour tenir compte du fait que $a(t)$ et $\alpha(t)$ sont lentement variables, et limitons-nous, comme dans les précédents paragraphes aux termes fondamentaux.

On trouve ainsi

$$\dot{x}^2 \dot{\varepsilon} \sim -\frac{3a^2\alpha}{4} \sin t,$$

ou

$$\dot{x}^2 \dot{\varepsilon} \sim \frac{3a^2}{4} \dot{\varepsilon}.$$

L'équation (38) se réduit donc à

$$(39) \quad \ddot{\varepsilon} + \mu \left[\frac{9m}{4} a^2 - n \right] \dot{\varepsilon} + \varepsilon = 0.$$

PERTURBATION EN QUADRATURE. — Si nous remplaçons maintenant $x(t)$ et $\varepsilon(t)$ par $a(t) \cos t$ et $\alpha(t) \sin t$, nous obtenons avec la même approximation

$$\dot{x}^2 \dot{\varepsilon} \sim \frac{a^2}{4} \dot{\varepsilon},$$

d'où l'équation

$$(40) \quad \ddot{\varepsilon} + \mu \left[\frac{3m}{4} a^2 - n \right] \dot{\varepsilon} + \varepsilon = 0.$$

Ainsi l'équation de perturbation initiale (38), à coefficients dépendant du temps a été réduite au système d'équations (39) et (40) à coefficients *indépendant du temps*, pour chaque valeur du paramètre a .

CRITÈRE DE STABILITÉ. — Lorsqu'un cycle limite est atteint, $x(t)$ est assimilable à une sinusoïde dont l'amplitude est « l'amplitude limite a_s ». Toute variation de phase se traduit par une translation dans le temps, qui se conserve indéfiniment puisqu'elle n'affecte pas la loi. Il s'ensuit que l'opération de perturbation de la phase ne présente pas de termes d'amortissement pour l'amplitude a_s . L'annulation de ce terme dans l'équation (40) redonne la valeur de l'amplitude limite

$$\frac{3m}{4} a_s^2 - n = 0, \quad a_s = \sqrt{\frac{4n}{3m}}.$$

L'évolution de la perturbation d'amplitude nous renseigne d'autre part sur la stabilité du cycle limite correspondant à l'amplitude ainsi calculée.

Pour l'équation de Lord Rayleigh nous voyons que le régime limite est stable puisqu'on a

$$a_s^2 > \frac{4n}{9m}.$$

La constante de temps de retour au régime stable est donnée par l'équation

$$\ddot{\epsilon} + 2\mu n \dot{\epsilon} + \epsilon = 0$$

obtenue à partir de (39), pour $a = a_s$, sa valeur est

$$\tau = \frac{1}{\mu n}.$$

DIAGRAMMES MOBILES DES PERTURBATIONS. — La décomposition de l'équation de perturbation en deux équations à coefficients constants, pour chaque valeur du paramètre a , permet de lui faire correspondre deux diagrammes mobiles dépendant aussi du paramètre a .

L'un d'eux, qui traduit l'évolution de la perturbation de phase, vient passer par l'origine lorsqu'on atteint le cycle limite. Il se comporte comme le diagramme mobile de l'équation de départ. Le second, qui traduit l'évolution de la perturbation d'amplitude nous renseigne sur la stabilité du cycle limite.

Il est bien clair que dans le cas où il n'existe pas de termes non linéaires, les deux équations de perturbation sont identiques. Les deux diagrammes mobiles sont alors confondus.

2. Exemple II: Équation de Van der Pol. — Nous poserons, conformément aux notions classiques :

$$\mu = -\frac{Ms + rC}{2LC}, \quad \beta = -\frac{3Mb}{Ms + rC}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC},$$

auquel cas l'équation de Van der Pol prend la forme

$$(41) \quad \ddot{x} - 2\mu(1 - \beta x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Remplaçant x par $X = x + \varepsilon$ on trouve pour équation de perturbation

$$(42) \quad \ddot{\varepsilon} - 2\mu(1 - \beta x^2)\dot{\varepsilon} + [\omega_0^2 + 4\mu\beta x^2]\varepsilon = 0.$$

PERTURBATION EN PHASE ET PERTURBATION EN QUADRATURE. CRITÈRE DE STABILITÉ. — Si l'on remplace $x(t)$ et $\varepsilon(t)$ respectivement par $a(t) \cos \omega_0 t$ et $\alpha(t) \cos \omega_0 t$, les termes non linéaires deviennent, avec notre approximation

$$\dot{x}x\varepsilon \sim x^2\dot{\varepsilon} \sim \frac{a^2}{4}\dot{\varepsilon},$$

par suite, l'équation d'évolution de la perturbation de l'amplitude devient

$$(43) \quad \dot{\varepsilon} - 2\mu\left(1 - \frac{3\beta a^2}{4}\right)\varepsilon + \omega_0^2\varepsilon = 0.$$

Remplaçant maintenant $x(t)$ et $\varepsilon(t)$ par $a(t) \cos \omega_0 t$ et $\alpha(t) \sin \omega_0 t$, on trouve pour les termes non linéaires

$$x^2\dot{\varepsilon} \sim \frac{3}{4}a^2\dot{\varepsilon}, \quad \dot{x}x\varepsilon \sim -\frac{a^2}{4}\dot{\varepsilon}.$$

L'équation d'évolution de la perturbation de phase devient donc

$$(44) \quad \dot{\varepsilon} - 2\mu\left(1 - \frac{\beta}{4}a^2\right)\varepsilon + \omega_0^2\varepsilon = 0.$$

Nous obtenons l'amplitude limite et la condition de stabilité à partir des équations (43) et (44).

L'équation de perturbation de phase nous donne l'amplitude limite

$$a_s = \frac{2}{\sqrt{\beta}}.$$

L'équation de perturbation d'amplitude montre que le régime est stable puisqu'on a

$$a_s^2 > \frac{4}{3\beta}.$$

La constante de temps τ de retour au régime stable est obtenue en portant dans cette dernière la valeur a_* , d'où

$$\ddot{\varepsilon} + 4\mu\dot{\varepsilon} + \omega_0^2\varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad \tau = \frac{1}{2\mu}.$$

3. Application de la méthode de Fourier à l'équation de perturbation. — Prenons encore pour exemple l'équation de Van der Pol dont la loi de perturbation est

$$(42) \quad \ddot{x} - 2\mu(1 - \beta x^2)\dot{x} + [\omega_0^2 + 4\mu\beta\dot{x}x]\varepsilon = 0.$$

Supposons que l'amplitude limite soit atteinte, (soit a_* sin $\omega_0 t$ le régime limite) et recherchons la solution $\varepsilon(t)$ sous la forme d'un spectre de Fourier.

$$(45) \quad \varepsilon(t) \equiv \int_0^\infty \xi_\omega \sin(\omega t - \varphi_\omega) d\omega.$$

Le problème consiste à déterminer ξ_ω et φ_ω en fonction de ω pour que $\varepsilon(t)$ vérifie l'équation (42). Portons ce développement dans l'équation (42), avec

$$(46) \quad x^2\dot{\varepsilon} = \int_0^\infty \left\{ \frac{2}{\beta} \xi_\omega \omega \cos(\omega t - \varphi_\omega) - \frac{1}{\beta} \xi_\omega \omega \cos[(2\omega_0 + \omega)t - \varphi_\omega] - \frac{1}{\beta} \xi_\omega \omega \cos[(2\omega_0 - \omega)t + \varphi_\omega] \right\} d\omega.$$

et

$$(47) \quad \dot{x}x\varepsilon = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\beta} \xi_\omega \omega_0 \cos[(2\omega_0 - \omega)t + \varphi_\omega] - \frac{1}{\beta} \xi_\omega \omega_0 \cos[(2\omega_0 + \omega)t - \varphi_\omega] \right\} d\omega.$$

On obtient, toutes réductions faites :

$$(48) \quad \int_0^\infty \left\{ (\omega_0^2 - \omega^2) \xi_\omega \sin(\omega t - \varphi_\omega) + 2\mu\omega \xi_\omega \cos(\omega t - \varphi_\omega) \right\} d\omega - \int_0^\infty 2\mu(2\omega_0 + \omega) \xi_\omega \cos[(2\omega_0 + \omega)t - \varphi_\omega] d\omega + \int_0^\infty 2\mu(2\omega_0 - \omega) \xi_\omega \cos[(2\omega_0 - \omega)t + \varphi_\omega] d\omega = 0.$$

Pour déterminer les amplitudes ξ_ω et les phases φ_ω , il suffit d'identifier à zéro la somme des termes de même pulsation. Cette somme de termes se présente sous la forme

$$A(\xi_\omega, \varphi_\omega) \sin \omega t + B(\xi_\omega, \varphi_\omega) \cos \omega t.$$

On égalera donc séparément à zéro A et B, ce qui donne le système

$$A(\xi_\omega, \varphi_\omega) = 0, \quad B(\xi_\omega, \varphi_\omega) = 0,$$

d'où l'on tirera ξ_ω et φ_ω .

Cette application de la méthode de Fourier n'est pas essentiellement différente de celle qui a été développée à propos de l'étude de l'équation non linéaire de départ.

Notons cependant que :

1° La perturbation n'est pas périodique, ce qui nécessite l'emploi d'une intégrale de Fourier.

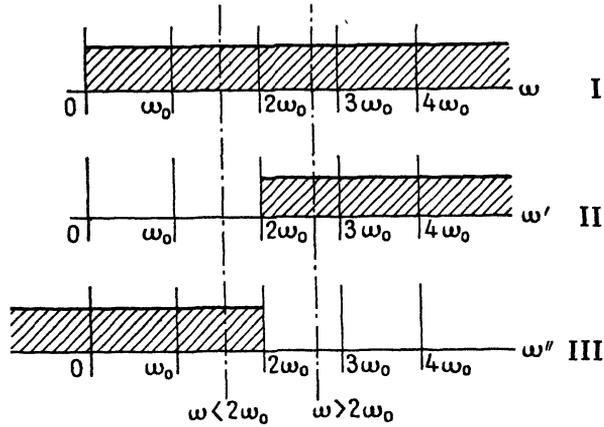


FIG. 14.

2° Les pulsations qui apparaissent dans l'équation (48) sont, à l'exception de ω , engendrées par « battement » avec certains harmoniques du signal (ici l'harmonique 2). On voit sur les expressions (46) et (47) que les termes non linéaires $x^2\epsilon$ et $xx\epsilon$ créent les pulsations $2\omega_0 + \omega$ et $2\omega_0 - \omega$. Ces termes sont appelés « produits de modulation ».

La première ligne de l'équation (48) est un spectre de Fourier, dont la bande des pulsations s'étend de $\omega = 0$ à l'infini.

La deuxième ligne, un spectre formé par les produits de modulation de pulsations $\omega' = 2\omega_0 + \omega$, s'étendant de $\omega' = 2\omega_0$ à l'infini.

La troisième ligne, un spectre formé par les produits de modulation de pulsations $\omega'' = 2\omega_0 - \omega$, s'étendant de $\omega'' = 2\omega_0$ à moins l'infini.

Ces trois bandes sont représentées sur la figure 14, sans tenir compte des amplitudes des diverses composantes spectrales.

Nous appellerons « spectre incident » le spectre des pulsations ω [spectre I de la figure 14, première ligne de l'équation (48)]. « Spectre transmis » le spectre des produits de modulation $2\omega_0 + \omega$ de la deuxième ligne (spectre II), et « spectre réfléchi » le spectre des produits de modulation $2\omega_0 - \omega$ de la troisième ligne (spectre III).

La méthode suivie ici revient à couper l'ensemble des trois bandes par une raie de pulsation variable ω , et à annuler la somme des composantes spectrales définies par cette coupure.

Les fréquences inférieures à $2\omega_0$, font intervenir seulement la « bande incidente » et la « bande réfléchie ». Aussi pour déterminer ces termes, on peut supprimer de l'équation (48) l'intégrale qui représente la « bande transmise », et utiliser l'équation réduite

$$(49) \quad \int \left\{ (\omega_0^2 - \omega^2) \xi_\omega \sin(\omega t - \varphi_\omega) + 2\mu\omega \xi_\omega \cos(\omega t - \varphi_\omega) \right\} d\omega \\ + \int 2\mu(2\omega_0 - \omega) \xi_\omega \cos[(2\omega_0 - \omega)t + \varphi_\omega] d\omega = 0.$$

De même, aux fréquences supérieures à $2\omega_0$, seules interviennent la « bande incidente » et la « bande transmise ». Dans ce cas on supprimera donc de l'équation (48) l'intégrale qui représente la « bande réfléchie » et l'on se limitera à l'équation

$$(50) \quad \int \left\{ (\omega_0^2 - \omega^2) \xi_\omega \sin(\omega t - \varphi_\omega) + 2\mu\omega \xi_\omega \cos(\omega t - \varphi_\omega) \right\} d\omega \\ - \int 2\mu(2\omega_0 + \omega) \xi_\omega \cos[(2\omega_0 + \omega)t - \varphi_\omega] d\omega = 0.$$

Dans le cas des régimes quasi sinusoïdaux envisagé ici, le spectre de Fourier de la perturbation $\varepsilon(t)$ est une bande de faible largeur (fig. 15), ce qui revient à dire que $\varepsilon(t)$ se réduit à une oscillation d'amplitude très lentement variable. Par suite le « spectre incident » s'étend sur l'intervalle étroit $\Delta\omega_0$ entourant la pulsation fondamentale ω_0 .

On observe alors, dans la bande $\Delta\omega_0$ entourant ω_0 , la superposition du « spectre incident » et du « spectre réfléchi ». Le « spectre transmis » étant hors des limites de la bande, nous pouvons supprimer de l'équation (48) l'intégrale qui lui correspond, et la réduire à

$$(51) \quad \int_{\Delta\omega_0} \left\{ (\omega_0^2 - \omega^2) \xi_\omega \sin(\omega t - \varphi_\omega) + 2\mu\omega \xi_\omega \cos(\omega t - \varphi_\omega) \right\} d\omega \\ + \int_{\Delta\omega_0} 2\mu(2\omega_0 - \omega) \xi_\omega \cos[(2\omega_0 - \omega)t + \varphi_\omega] d\omega = 0.$$

Si, au contraire, nous nous intéressons aux harmoniques de l'oscillation, nous devons les rechercher dans la bande transmise $2\omega_0 + \omega$ (avec ω voisin de ω_0), c'est-à-dire dans la bande entourant $3\omega_0$.

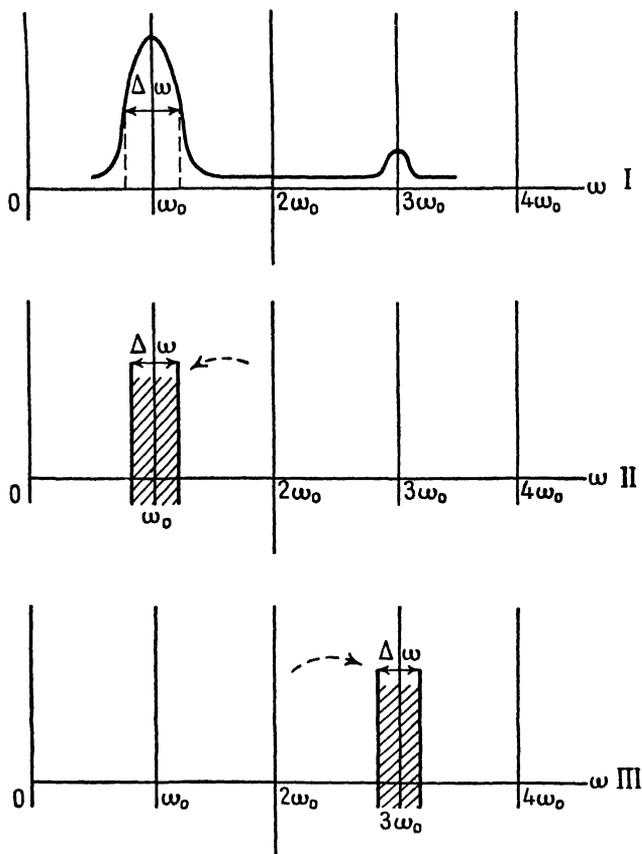


FIG. 15.

Dans cette bande se superposent une « bande harmonique incidente », et la « bande transmise » ci-dessus. On réduira donc encore l'équation (48) à

$$(52) \quad \int_{\Delta\omega_0} (\omega_0^2 - \omega^2) \xi_\omega \sin(\omega t - \varphi_\omega) + \int_{\Delta\omega_0} 2\mu\omega\xi_\omega \cos(\omega t - \varphi_\omega) d\omega \\ - \int_{\Delta\omega_0} 2\mu(2\omega_0 + \omega) \xi_\omega \cos[(2\omega_0 + \omega)t - \varphi_\omega] d\omega = 0.$$

On voit que dans notre exemple il n'y a pas d'harmonique de pulsation $2\omega_0$. Ce résultat est classique.

PERTURBATION DE PHASE ET PERTURBATION D'AMPLITUDE. — Plaçons-nous dans le voisinage de la pulsation ω_0 , l'équation de perturbation se réduit à l'équation (51) ou à

$$(53) \quad \int_{\Delta\omega_0} \left\{ (\omega_0^2 - \omega^2) \xi_\omega \sin(\omega t - \varphi_\omega) d\omega + 2\mu\omega \xi_\omega \cos(\omega t - \varphi_\omega) \right\} d\omega \\ + \int_{\Delta\omega_0} 2\mu\omega \xi_{2\omega_0 - \omega} \cos[\omega t + \varphi_{2\omega_0 - \omega}] d\omega = 0,$$

en prenant $2\omega_0 - \omega$ pour nouvelle variable, dans la dernière intégrale.

a) Supposons que $\varepsilon(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \xi_\omega \sin(\omega t - \varphi_\omega) d\omega$ se réduise uniquement à une perturbation d'amplitude, donc soit représentable par une pseudo sinusoïde en phase avec le signal limite $a, \sin \omega_0 t$:

$$\varepsilon(t) = a(t) \sin \omega_0 t.$$

On vérifie facilement que son spectre de Fourier est du type symétrique par rapport à ω_0 , c'est-à-dire qu'on a

$$\xi_\omega = \xi_{2\omega_0 - \omega} \quad \text{et} \quad \varphi_\omega = -\varphi_{2\omega_0 - \omega}.$$

L'équation (53) ci-dessus devient donc

$$\int_{\Delta\omega_0} (\omega_0^2 - \omega^2) \xi_\omega \sin(\omega t - \varphi_\omega) d\omega + \int_{\Delta\omega_0} 4\mu\omega \xi_\omega \cos(\omega t - \varphi_\omega) d\omega = 0.$$

On voit qu'elle est équivalente à l'équation pendulaire amortie

$$\ddot{\varepsilon} + 4\mu\dot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0.$$

b) Si $\varepsilon(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \xi_\omega \sin(\omega t - \varphi_\omega) d\omega$ est uniquement une perturbation de phase, c'est-à-dire une pseudo-sinusoïdale en quadrature avec le signal, de la forme

$$\varepsilon(t) = \eta(t) \cos \omega_0 t,$$

on vérifie de même que son spectre est du type antisymétrique par rapport à ω_0 . On a

$$\xi_\omega = -\xi_{2\omega_0 - \omega} \quad \text{et} \quad \varphi_\omega = -\varphi_{2\omega_0 - \omega}.$$

L'équation (53) devient donc

$$\int_{\Delta\omega_0} (\omega_0^2 - \omega^2) \xi_\omega \sin(\omega t - \varphi_\omega) d\omega = 0.$$

On voit qu'elle est équivalente à l'équation pendulaire sans terme d'amortissement

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0.$$

En résumé, l'équation de perturbation revêt deux formes différentes suivant que le spectre de Fourier de $\varepsilon(t)$ est symétrique ou antisymétrique par rapport à la pulsation du régime limite.

Dans le premier cas, la superposition du spectre incident et du spectre réfléchi entraîne l'addition des termes d'amortissement, ce qui fait apparaître une constante de temps τ de retour au régime.

Dans le second cas, la superposition du spectre incident et du spectre réfléchi fait disparaître les termes d'amortissement. On en déduit l'équation pendulaire non amortie des déphasages.

Nous retrouvons ici les deux équations linéaires à coefficients constants, équivalentes, dans l'approximation fondamentale, à l'équation de perturbation linéaire mais à coefficients fonction du temps.

TAUX D'HARMONIQUES. — Déterminons maintenant l'effet de la perturbation sur les harmoniques de $x(t)$ en utilisant l'équation réduite

$$(50) \quad \int_{\Delta\omega_0} \left\{ (\omega_0^2 - \omega^2) \xi_\omega \sin(\omega t - \varphi_\omega) + 2\mu\omega \xi_\omega \cos(\omega t - \varphi_\omega) \right\} d\omega \\ - \int_{\Delta\omega_0} 2\mu(2\omega_0 + \omega) \xi_\omega \cos[(2\omega_0 + \omega)t - \varphi_\omega] d\omega = 0.$$

Nous avons mentionné l'absence d'harmoniques pairs. Les harmoniques voisins de la pulsation $3\omega_0$ seront déterminés à partir de l'équation (50) ci-dessus.

Calculons, par exemple, l'amplitude de la raie de pulsation $3\omega_0$. Pour cela, annulons conformément à la méthode indiquée plus haut, la somme des termes de pulsation $3\omega_0$ dans l'équation (50).

Il vient

$$[\omega_0^2 - (3\omega_0)^2] \xi_{3\omega_0} \sin(3\omega_0 t - \varphi_{3\omega_0}) + 6\mu\omega_0 \xi_{3\omega_0} \cos(3\omega_0 t - \varphi_{3\omega_0}) \\ - 6\mu\omega_0 \xi_{\omega_0} \cos[3\omega_0 t - \varphi_{\omega_0}] = 0.$$

D'où l'on tire, en supposant toujours μ petit,

$$\xi_{3\omega_0} = \frac{6\mu\omega_0 \xi_{\omega_0}}{\sqrt{(8\omega_0^2)^2 + (6\mu\omega_0)^2}} \simeq \frac{3\mu}{4\omega_0} \xi_{\omega_0}.$$

La largeur de la bande harmonique 3 est la même que celle de la bande fondamentale, et elle est très faible, ce qui traduit le fait que $\varepsilon(t)$ est assimilable à une pseudo-sinusoïde d'amplitude très

lentement variable, de pulsation ω_0 , tandis que l'harmonique 3 est lui-même une pseudo-sinusoïde d'amplitude lentement variable et de pulsation $3\omega_0$.

Sur quelques périodes, nous pouvons même assimiler $\varepsilon(t)$ ainsi que l'harmonique 3 à des portions de sinusoïdes vraies dont les amplitudes α_3 et α sont dans le rapport $\frac{\xi_{3\omega_0}}{\xi_{\omega_0}}$ soit

$$\frac{\xi_{3\omega_0}}{\xi_{\omega_0}} = \frac{\alpha_3}{\alpha} = \frac{3\mu}{4\omega_0}$$

Ce rapport pouvait être obtenu différemment.

On sait que l'amplitude de l'harmonique 3 de $x(t)$ est

$$a_3 = \frac{\mu}{4\omega_0} \beta \left(\frac{a_1^2}{4} \right) \quad (a_1, \text{ amplitude du fondamental})$$

et l'on a par conséquent

$$\Delta a_3 = \frac{3\mu}{4\omega_0} \beta \frac{a_1^2}{4} \Delta a_1$$

ou, avec $a_1 = \frac{2}{\sqrt{\beta}}$,

$$\Delta a_3 = \frac{3\mu}{4\omega_0} \Delta a_1,$$

ce qui est bien la relation trouvée ici, puisque Δa_3 et Δa_1 se confondent respectivement avec α_3 et α .

CHAPITRE II

EXCITATION SINUSOÏDALE DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES

I. — Résonance non linéaire.

1. Rappel de quelques méthodes classiques. — SYSTÈMES SANS AMORTISSEMENT. MÉTHODE DE DUFFING. — Reprenons l'exemple de l'équation de Duffing qui représente l'évolution d'un système dépourvu de source d'autoentretien. Nous le supposons d'abord non amorti et soumis à l'effet d'une action extérieure sinu-

soïdale, ce qui nous conduit à ajouter au second membre de l'équation le terme d'excitation $F \cos \omega t$.

Soit donc à étudier l'équation

$$(1) \quad \ddot{x} + bx + \beta x^3 = F \cos \omega t.$$

Dans le cas particulier où l'on a $\beta = 0$, elle traduit l'excitation forcée d'un système pendulaire non amorti, dont la courbe de résonance aiguë est bien connue.

Nous plaçant dans le cas où β est petit, nous rappellerons la méthode d'approximations successives utilisée par Duffing. Les diverses étapes du raisonnement sont les suivantes :

1° On adopte pour solution de première approximation la loi pendulaire

$$x_1 = a \cos \omega t$$

dont la pulsation est celle de l'action extérieure.

2° On porte cette expression dans le terme non linéaire βx^3 , ce qui donne

$$\beta x^3 = \beta a^3 \cos^3 \omega t = \beta a^3 \left[\frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t \right].$$

La solution de deuxième approximation est alors obtenue par intégration à partir de

$$\ddot{x} = \left[F - ba - \frac{3}{4} \beta a^3 \right] \cos \omega t - \frac{\beta a^3}{4} \cos 3\omega t.$$

On obtient, en postulant la périodicité de $x(t)$,

$$x_2 = \frac{1}{\omega^2} \left[b + \frac{3}{4} \beta a^2 - \frac{F}{a} \right] a \cos \omega t + \frac{1}{36} \frac{\beta a^3}{\omega^2} \cos 3\omega t.$$

On pourrait poursuivre ainsi la recherche d'approximations successives. Cependant la convergence du développement en série nécessite que les coefficients b , β , F et a soient suffisamment petits. En particulier la méthode est en défaut au voisinage de la résonance.

3° Plutôt que d'adopter cette méthode d'itération simple, Duffing identifie la solution de première approximation $x_1 = a \cos \omega t$ au fondamental de la solution de deuxième approximation, ce qui donne

$$a = \frac{1}{\omega^2} \left[b + \frac{3}{4} \beta a^2 - \frac{F}{a} \right] a$$

ou

$$(2) \quad \omega^2 = b + \frac{3}{4} \beta a^2 - \frac{F}{a}.$$

F étant supposé donné, cette relation exprime la dépendance

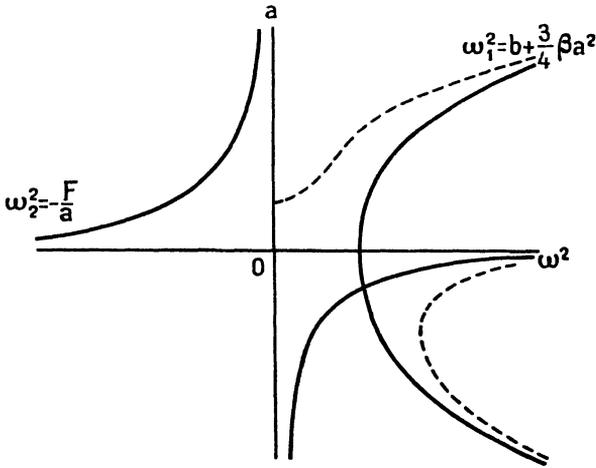


FIG. 16.

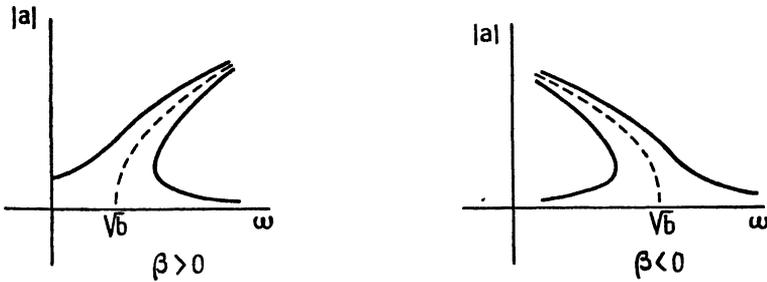


FIG. 17.

entre la pulsation de l'excitation et l'amplitude d'oscillation a .
 Sur les figures 16 et 17 on a représenté les lois

$$a = f(\omega^2) \quad \text{et} \quad |a| = g(\omega).$$

Pour plus de clarté, le premier graphique est obtenu en représentant isolément les deux fonctions

$$\omega_1^2 = b + \frac{3}{4} \beta a^2 \quad \text{et} \quad \omega_2^2 = -\frac{F}{a}.$$

Sur le graphique 18 est représentée, à titre de comparaison, la courbe de résonance du système linéaire, pour $\beta = 0$.

Un autre cas intéressant est celui où l'on a $F = 0$. Il s'agit alors de l'oscillation libre du système, qui apparaît ici comme un cas limite.

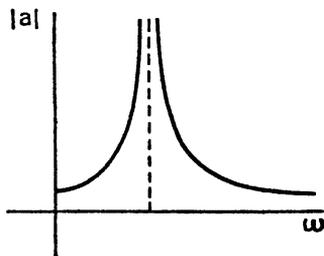


FIG. 18.

Les courbes de résonance des figures 17 et 18 dégèrent comme l'indiquent les figures 19 et 20.

Les courbes 19 et 20 expriment la loi de dépendance « pulsation-amplitude », bien connue dans le cas du pendule simple et étudiée

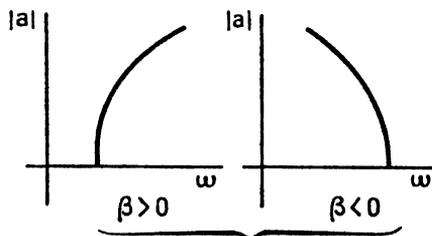


FIG. 19.

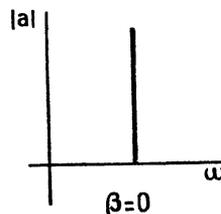


FIG. 20.

plus haut dans le cas général. En particulier on voit que lorsque l'amplitude d'oscillation est très faible, l'isochronisme est vérifié au second ordre près, puisque la tangente à la courbe au point $a = 0$ est perpendiculaire à l'axe des pulsations.

Une différence fondamentale entre la courbe de réponse d'un système non linéaire soumis à une action sinusoïdale imposée, et celle d'un système linéaire, est que, dans le cas non linéaire, il peut exister pour une fréquence donnée trois amplitudes d'oscillations. (Elles ne correspondent d'ailleurs pas, toutes les trois, à des régimes

stables.) C'est la cause d'un phénomène important : « l'hystérésis des systèmes non linéaires » sur lequel nous reviendrons plus loin.

Notons enfin que si l'on porte l'expression de ω^2 dans la solution de seconde approximation, on obtient

$$x_2 = a \cos \omega t + \frac{1}{36} \frac{\beta a^3}{b + \frac{3}{4} \beta a^2 - \frac{F}{a}} \cos 3\omega t.$$

ÉQUATION DE DUFFING AVEC AMORTISSEMENT VISQUEUX. — En l'absence de tout frottement, la méthode de Duffing conduit à une solution forcée qui est, soit en phase, soit en opposition de phase, avec le terme d'excitation :

Nous avons trouvé en effet pour fondamental $a \cos \omega t$, avec $a \geq 0$, le terme d'excitation étant $F \cos \omega t$.

Comme dans le cas des systèmes linéaires, l'amortissement visqueux introduira un déphasage entre l'oscillation du système et l'excitation. Aussi il sera commode de mettre l'équation de Duffing avec second membre sous la forme

$$(3) \quad \ddot{x} + c\dot{x} + bx + \beta x^3 = F_1 \cos \omega t + F_2 \sin \omega t,$$

ce qui laisse la latitude de choisir convenablement le rapport $\frac{F_2}{F_1}$ quand on prend à nouveau pour solution de première approximation

$$x = a \cos \omega t. \bullet$$

L'amplitude de la force excitatrice $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ est donnée.

Remplaçant x par $a \cos \omega t$ dans l'équation (3) on obtient, après identification des fondamentaux des deux membres

$$(4) \quad \begin{cases} (b - \omega^2)a + \frac{3}{4} \beta a^3 = F_1, \\ -ac\omega = F_2. \end{cases}$$

On en tire :

1° la loi de dépendance entre la pulsation et l'amplitude :

$$(5) \quad \left[(b - \omega^2)a + \frac{3}{4} \beta a^3 \right]^2 + a^2 c^2 \omega^2 = F_1^2 + F_2^2 = F^2;$$

2° le déphasage entre l'excitation et l'oscillation forcée, pour chaque valeur de a (et par suite de ω) :

$$(6) \quad \operatorname{tg} \varphi = - \frac{F_2}{F_1} = \frac{ac\omega}{(b - \omega^2)a + \frac{3}{4} \beta a^3}.$$

Si le coefficient d'amortissement c est petit, la courbe $|a| = g(\omega)$ est voisine de celle qu'on obtient en l'absence d'amortissement. Sa forme est indiquée sur la figure 21.

Sans analyser de façon plus détaillée la forme de la courbe de résonance non linéaire, nous indiquerons qu'il est utile de préciser le lieu des points à tangentes verticales lorsque $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

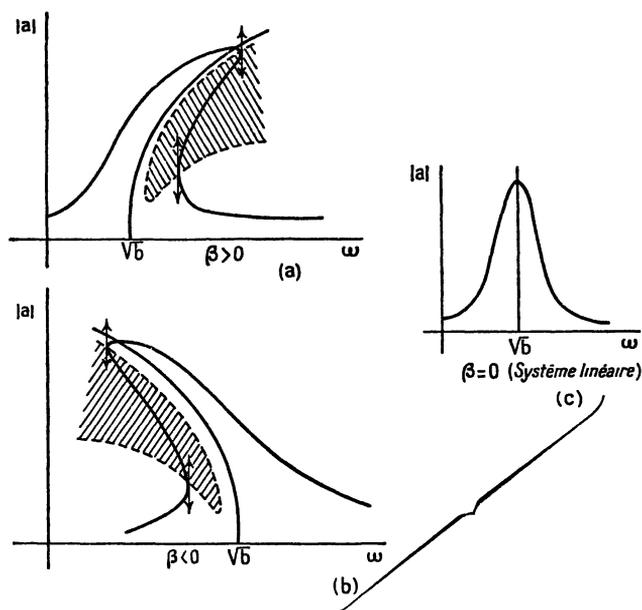


FIG. 21.

varie. Ce lieu est représenté en pointillé sur la figure 21. *Il apparaît en effet comme la limite de stabilité des solutions synchronisées.* Nous montrerons plus loin que les points de la région interne hachurée correspondent à des solutions instables, tandis que les points de la région externe fournissent des solutions stables.

L'équation de la courbe limite sera obtenue plus loin, au cours de cette discussion.

HYSTÉRÉSIS DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES. — Supposons qu'on fasse varier continûment la fréquence de la force excitatrice, tout en maintenant constante son amplitude. Plaçons-nous par exemple

dans le cas $\beta > 0$ (fig. 22) et diminuons la pulsation ω à partir d'une très grande valeur initiale. L'amplitude de l'oscillation forcée est

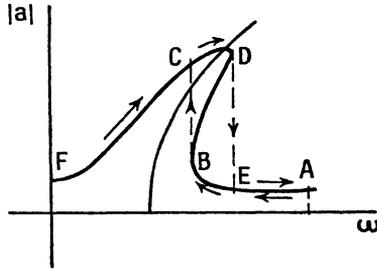


FIG. 22.

définie de façon unique au départ (point A). Elle croît ensuite, et le point figuratif décrit la courbe de façon continue jusqu'au point B où la tangente est verticale. Au delà de ce point l'amplitude subit une augmentation brusque, discontinue, qui amène le point figuratif en C, et l'on décrit ensuite la portion CF.

Si l'on parcourt en sens inverse l'axe des fréquences, le passage en C ne marque aucune discontinuité. Le saut d'amplitude apparaît au point D, deuxième point à tangente verticale, puis le point figuratif passe en E et décrit la portion EA.

Le balayage alternatif de l'axe des pulsations fait ainsi apparaître le cycle d'hystérésis BCDE.

La description du phénomène serait analogue dans le cas $\beta < 0$.

Notons aussi qu'on peut maintenir la fréquence constante et augmenter progressivement F, ce qui fait apparaître un autre cycle d'hystérésis. Il faut alors faire intervenir la déformation de la courbe en fonction du paramètre F. Nous laisserons de côté cette discussion.

LA MÉTHODE DE RAUSCHER. — La méthode de Rauscher, comme la méthode de Duffing, est une méthode d'itération, c'est-à-dire que, partant d'une solution de première approximation, on obtient par une opération répétée des approximations meilleures.

Elle est valable pour toute équation du type suivant :

$$(7) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + k(x) = F \cos \omega t.$$

Première approximation. — On adopte pour première approximation une solution de l'équation sans second membre,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k(x) = 0.$$

Cette équation représente le mouvement d'un point matériel de masse $m = 1$ sous l'effet d'une force de rappel,

$$f = -k(x).$$

Pour simplifier le raisonnement nous supposons que $k(x)$ est une fonction symétrique, telle qu'on ait par conséquent

$$k(-x) = -k(x).$$

La méthode est cependant applicable dans le cas général.

On fera apparaître l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la particule en multipliant l'équation par $v = \frac{dx}{dt}$ et en intégrant. On trouve ainsi

$$v \frac{dv}{dt} + k(x) \frac{dx}{dt} = 0$$

et, en désignant par v_0 la vitesse au point d'abscisse x_0 ,

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = - \int_{x_0}^x k(x) dx = - [V(x) - V(x_0)].$$

$V(x)$ représente l'énergie potentielle de la particule, $\frac{v^2}{2}$ son énergie cinétique.

On a donc

$$v = \frac{dx}{dt} = \varepsilon \sqrt{v_0^2 + 2 [V(x_0) - V(x)]}$$

(en adoptant pour ε une détermination convenable, $+1$ ou -1 , qui change lorsque la vitesse change de sens) et l'on tire par intégration l'expression de t en fonction de x ,

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\varepsilon \sqrt{v_0^2 + 2 [V(x_0) - V(x)]}} + t_0.$$

Nous supposons par la suite qu'on choisit $t_0 = 0$ au point x_0 et, de plus, qu'en ce point la vitesse v_0 est nulle, $v_0 = 0$. La loi ci-dessus se réduit alors à

$$(8) \quad t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\varepsilon \sqrt{2 [V(x_0) - V(x)]}}.$$

Deuxième approximation. — On obtiendra ensuite une expression approchée du second membre de l'équation (7) en fonction de x , en y remplaçant la variable t par sa valeur de première approximation (8).

Il faut aussi connaître ω qu'on calcule aisément à partir de (8). En effet, le temps que met la particule pour aller de la position d'équilibre $x = 0$ au point x_0 où sa vitesse est nulle est égal au quart de la période $\frac{T}{4}$. On a donc

$$\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega} = \int_0^{x_0} \frac{dx}{\varepsilon \sqrt{2[V(x_0) - V(x)]}},$$

ωt est donc une fonction de x qu'on sait déterminer, soit

$$\omega t = g_1(x)$$

et l'équation proposée devient

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k(x) - F \cos [g_1(x)] = 0.$$

On est ramené au problème initial puisqu'on peut poser

$$k_1(x) = k(x) - F \cos [g_1(x)]$$

et trouver une solution de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k_1(x) = 0.$$

Ainsi, de proche en proche, on est conduit à améliorer la solution initiale.

2. Méthode du diagramme mobile. — UTILISATION DES COURBES ÉQUIPULSATION. — L'application de la méthode du diagramme mobile à l'étude de la résonance non linéaire sera d'abord exposée en prenant encore pour exemple l'équation de Duffing.

La recherche d'un régime d'oscillations forcées quasi sinusoïdal $x \sim a_t \cos(\omega_0 t + \varphi)$ nous conduit toujours à remplacer l'opérateur non linéaire du premier membre par l'opérateur linéaire tangent correspondant. On est ainsi ramené à l'équation

$$(9) \quad \ddot{x} + c\dot{x} + \left(b + \frac{3}{4}\beta a_t^2\right)x = F \cos \omega_0 t,$$

dans laquelle l'opérateur linéaire tangent est de la forme

$$H_{op} = (H_1)_{op} + \frac{3a_t^2}{4} (H_2)_{op},$$

avec

$$(H_1)_{op} \equiv \frac{d^2}{dt^2} + c \frac{d}{dt} + b, \quad (H_2)_{op} \equiv \beta.$$

La linéarisation permet de remplacer ensuite les fonctions trigonométriques réelles par des exponentielles complexes, et l'équation (9), après simplification par $e^{j\omega t}$, par

$$(10) \quad H_{op}(a_t, j\omega_0) a_t e^{j\varphi} = F.$$

Pour déterminer a_t et φ , ω_0 et F étant connus, on construira la « courbe équipulsation » représentative de

$$(11) \quad H_{op}(a_t, j\omega_0) a_t \equiv a_t \left[b - \omega_0^2 + \frac{3a_t^2}{4} \beta + j\omega_0 c \right],$$

dont chaque point correspond à une amplitude distincte a_t (nous supposons que la courbe a été cotée en amplitudes), et on la coupe par le cercle de centre O, de rayon F. Soit M l'un des points d'intersection, l'égalité

$$(12) \quad H_{op}(a_t, j\omega_0) a_t = F e^{-j\varphi}$$

montre que l'angle $(-\varphi)$ est l'argument du point M, tandis que l'amplitude a_t est sa cote.

La construction, effectuée sur la figure 23 (graphiques 1a, 2a, 3a), montre que, pour chaque valeur de F, il peut y avoir soit une, soit trois solutions, suivant la valeur donnée à ω_0 .

Il est clair, en effet, que les points symétriques par rapport à O, pour lesquels les valeurs de a_t sont opposées et les arguments différent de π , correspondent à une même solution.

(On voit que pour $\omega_0 \leq \sqrt{b}$, on ne peut trouver qu'une seule solution.

Pour $\omega_0 > \sqrt{b}$ on peut obtenir soit une, soit trois solutions.

Le graphique se prête d'ailleurs aussi bien à la discussion lorsqu'on fait varier ω_0 , F restant constant, que lorsqu'on fait varier F, pour une valeur fixe de ω_0 .

La correspondance avec les résultats auxquels conduit la courbe de résonance non linéaire, lorsqu'on la coupe par une droite $\omega = \text{Cte}$,

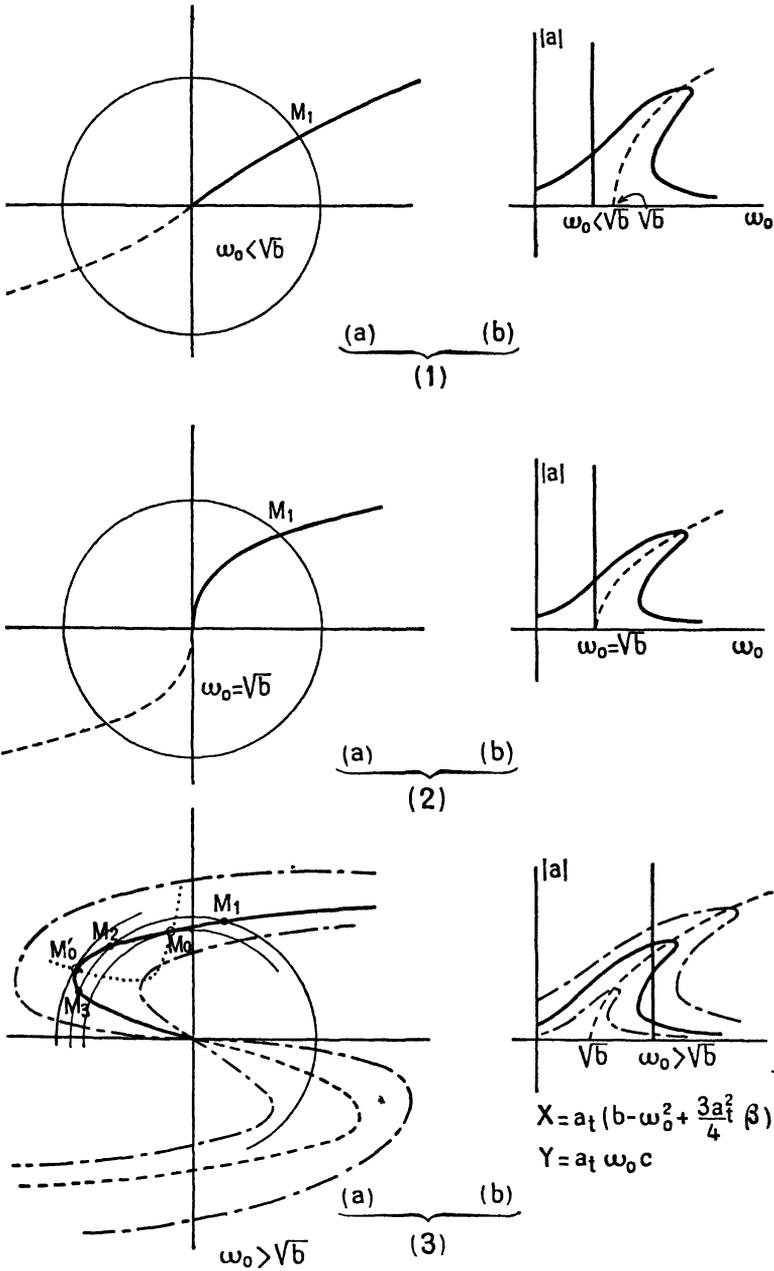


FIG. 23.

ou lorsqu'on fait varier F , est évidente. Elle est illustrée par les graphiques 1 b , 2 b , 3 b .

Solutions doubles. — Le problème précédent admet des solutions doubles lorsque le cercle de rayon E est tangent à la courbe équipulsation (ω_0). On observe ce cas limite lorsque deux des points d'intersection viennent se confondre, soit M_1 et M_2 , soit M_2 et M_3 (fig. 23, 3 a).

Il est intéressant de déterminer le lieu des deux points limites. Il suffit pour cela d'exprimer que l'équation qui donne les points d'intersection de l'équipulsation et du cercle admet une racine double en a . Cette équation se présente sous la forme

$$(13) \quad a^2 \omega_0^2 c^2 + a^2 \left[(b - \omega_0^2) + \frac{3b}{4} a^2 \right]^2 = F^2$$

ou

$$(14) \quad \left(\frac{3\beta}{4} \right)^2 a^6 + \frac{3\beta}{2} (b - \omega_0^2) a^4 + [(b - \omega_0^2)^2 + c^2 \omega_0^2] a^2 = F^2.$$

On l'obtient en égalant les carrés des modules des deux membres de l'équation (12). Évidemment elle se réduit au troisième degré par suite de la symétrie des courbes équipulsation. Il suffit de poser $A = a^2$. Il vient

$$\left(\frac{3\beta}{4} \right)^2 A^3 + \frac{3\beta}{2} (b - \omega_0^2) A^2 + [(b - \omega_0^2)^2 + c^2 \omega_0^2] A = F^2$$

et la condition qui fixe l'existence de solutions doubles est obtenue en annulant la dérivée du premier membre par rapport à A . On trouve ainsi la condition entre pulsation et amplitude :

$$\frac{27}{16} \beta^2 a^4 + 3\beta (b - \omega_0^2) a^2 + [(b - \omega_0^2)^2 + c^2 \omega_0^2] = 0$$

ou, sous une autre forme

$$(15) \quad \left(b - \omega_0^2 + \frac{3}{4} \beta a^2 \right) \left(b - \omega_0^2 + \frac{9}{4} \beta a^2 \right) + c^2 \omega_0^2 = 0.$$

Comme nous le verrons plus loin, cette condition limite les zones de stabilité des solutions synchronisées.

Elle fait correspondre à chaque courbe équipulsation une courbe équi-amplitude, et définit le lieu des points limites par l'intersection de ces deux familles.

Remarque. — Sur le plan des courbes de résonance $|a| = g(\omega)$, il est bien clair que le lieu des points limites se confond avec le lieu des points à tangentes verticales. La courbe limite que nous avons mise en évidence dans le plan complexe apparaît donc comme la transformée de ce lieu, que nous avons précédemment indiqué en pointillé sur les figures 21 a et 21 b.

UTILISATION DES COURBES ÉQUIAMPLITUDE. — Jusque-là nous avons supposé que les données étaient F , l'amplitude de la force excitatrice et ω_0 sa pulsation. Nous pouvons nous fixer au contraire F et l'amplitude d'oscillation forcée a_i , auquel cas l'inconnue est la pulsation ω_0 .

La méthode ne sera pas sensiblement différente de celle que nous venons d'exposer. On prendra seulement l'intersection du cercle de rayon F avec l'équi-amplitude a_i , cette dernière étant cotée en pulsations. Les points d'intersection permettent d'obtenir ω_0 et φ .

La discussion est plus simple car les équi-amplitudes sont ici des paraboles symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Les points symétriques, correspondant à des pulsations opposées, nous ne conserverons que les ordonnées positives. On voit alors que, a_i étant fixé, suivant la valeur de F il peut y avoir zéro solution, deux

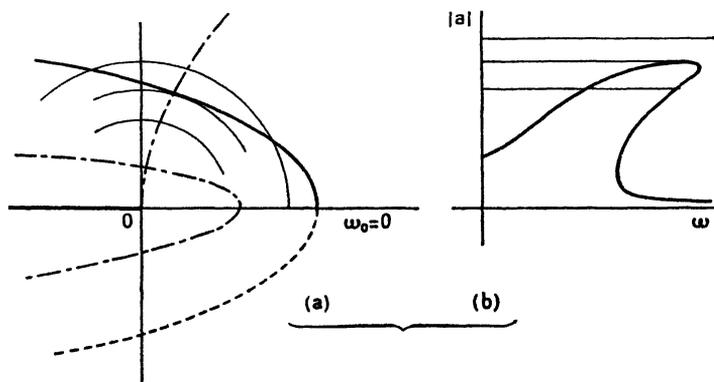


FIG. 24.

solutions confondues, deux solutions distinctes, ou une seule solution (fig. 24 a).

Les résultats de cette discussion sont conformes à ceux qu'on

obtient à partir de la courbe de résonance non linéaire. En particulier on obtient la relation entre la pulsation et l'amplitude d'oscillation forcée, pour une amplitude d'excitation F imposée, en égalant les carrés des modules des deux membres de (12). Elle est exprimée par l'équation (13).

La condition de contact entre le cercle de rayon F et la demi-parabole s'obtient, comme plus haut, en annulant la dérivée par rapport à ω_0 du premier membre. On trouve ainsi la relation

$$(16) \quad \omega_0^2 - \frac{3}{4} \beta a^2 - b + \frac{c}{2} = 0.$$

Sur le plan des courbes de résonance $|a| = g(\omega)$, ce lieu se confond avec le lieu des points à tangentes horizontales.

La courbe limite est représentée sur la figure 24.

FORME GÉNÉRALE DE LA MÉTHODE DU DIAGRAMME MOBILE. — L'exemple de l'équation de Duffing était destiné à illustrer la méthode du diagramme mobile. Résumons maintenant les diverses étapes de son application dans le cas général.

1° Le régime d'oscillations forcées étant supposé quasi sinusoïdal $x \sim a_i \cos(\omega_0 t + \varphi)$, on remplace l'opérateur non linéaire donné par son opérateur linéaire tangent. L'équation non linéaire est ainsi ramenée à la forme

$$(17) \quad H_{op}(a_i) x = F \cos \omega_0 t.$$

2° Les fonctions trigonométriques réelles sont ensuite remplacées par des exponentielles complexes, ce qui transforme l'opérateur du premier membre en une expression complexe. L'équation devient, après simplification par $e^{j\omega t}$,

$$(18) \quad H(a_i, j\omega_0) a_i e^{j\tau} = F.$$

3° Si les données sont F et ω_0 , on construit la courbe équipulsation (ω_0). Cette courbe étant cotée en amplitudes, on la coupe par le cercle de centre O , de rayon F . L'argument des points d'intersection, représente au signe près, les valeurs de φ solutions de l'équation, tandis que les cotes fournissent les amplitudes de synchronisation possibles.

4° Si les données sont F et a_i , la construction reste valable à condition de remplacer l'équipulsation (ω_0) par la courbe équi-amplitude (a_i) cotée en pulsations.

5° L'équation aux points d'intersection des deux diagrammes précédents avec le cercle de rayon F s'obtient en égalant les carrés des modules des deux membres de l'équation (18),

$$(19) \quad |H(a_t, j\omega_0)|^2 a_t^2 = F^2.$$

Selon que F et ω_0 , ou F et a_t , sont donnés, c'est une équation en a_t ou en ω_0 .

6° Le premier membre de l'équation ci-dessus est une fonction réelle de a_t et de ω_0 ,

$$(20) \quad |H(a_t, j\omega_0)|^2 a_t^2 \equiv h(a_t, \omega_0).$$

Si ω_0 est donné, on représentera h en fonction de a_t (fig. 25). Les

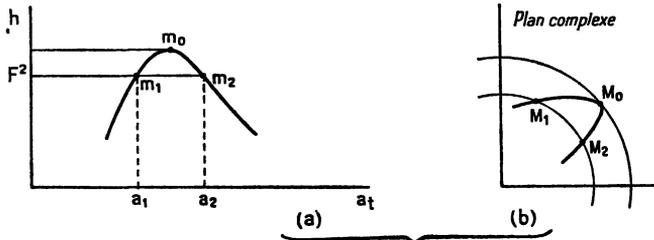


FIG. 25.

solutions en a_t sont obtenues en coupant ce graphique par une parallèle à l'axe des abscisses.

On voit ainsi que les solutions doubles sont obtenues aux extrema de $h(a_t)$. Ainsi les lieux des points de contact des équipulsations et des cercles de rayon F (ω_0 et F variables) sont donnés par l'équation

$$\frac{\partial h}{\partial a_t} \equiv \frac{\partial}{\partial a_t} \{ |H(a_t, j\omega_0)|^2 a_t^2 \} = 0$$

ou

$$(21) \quad \left[1 + \frac{a_t}{2} \frac{\partial}{\partial a_t} \right] |H(a_t, j\omega_0)|^2 = 0.$$

Comme nous le verrons, cette équation joue un rôle important en limitant, dans le plan complexe, les zones de stabilité des solutions forcées et synchronisées. Nous la retrouverons plus loin à propos de la discussion de la stabilité des solutions.

7° Si a_t est donné, on représentera h en fonction de ω_0 (fig. 26). Les solutions en ω_0 sont encore fournies par l'intersection du graphique et d'une parallèle à l'axe des abscisses.

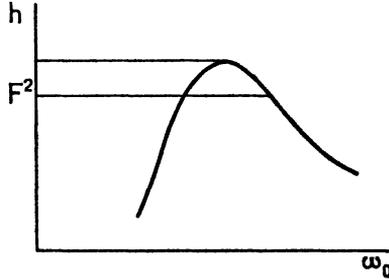


FIG. 26.

Les lieux des points de contact des équiampplitudes et des cercles de rayon F sont alors donnés par

$$\frac{\partial h}{\partial \omega_0} \equiv \frac{\partial}{\partial \omega_0} \{ |H(a_t, j\omega_0)|^2 a_t^2 \} = 0$$

ou

(22)

$$\frac{\partial}{\partial \omega_0} |H(a_t, j\omega_0)|^2 = 0.$$

II. — Synchronisation.

Pour une action excitatrice convenable, un oscillateur autoentretenu adopte la fréquence extérieure imposée : c'est le phénomène de synchronisation.

La méthode du diagramme mobile, utilisée dans le précédent paragraphe pour étudier les oscillations forcées des oscillateurs non linéaires amortis, s'applique sans modification à ce type d'oscillations forcées.

Nous ne reprendrons pas la théorie, qui ne nous conduirait qu'à reproduire le précédent développement. Il suffit de se reporter au paragraphe intitulé : *Forme générale de la méthode du diagramme mobile*, auquel nous ajouterons quelques remarques.

Dans le chapitre I, réservé à l'étude de l'évolution libre d'un auto-oscillateur, nous avons précisé la forme générale des courbes

équipulsation représentatives de la fonction $H[a_i, j\omega] \times a_i$. Nous avons montré en particulier que l'équipulsation particulière ($\omega = \omega_s$) affecte la forme d'une boucle, puisqu'elle passe au moins deux fois par l'origine :

$$\text{pour } a_i = 0 \quad \text{et} \quad \text{pour } a_i = a_s.$$

Les équipulsations tracées pour des pulsations voisines de ω_s s'écartent assez peu de cette dernière comme l'indiquent les figures 11 et 27.

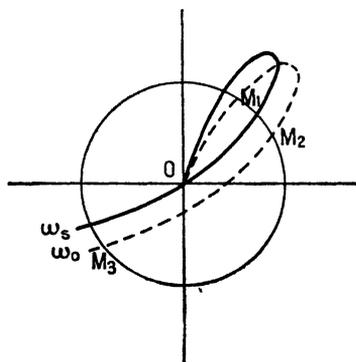


FIG. 27.

Il apparaît sur ce dernier graphique que, pour une action excitatrice $F \cos \omega_0 t$ dont l'amplitude F est assez faible, et la pulsation assez voisine de ω_s , il existe trois points d'intersection de l'équipulsation (ω_0) et du cercle de rayon F . Il y a donc, dans ce cas, trois solutions synchronisées dont nous envisagerons ultérieurement la stabilité.

ω_0 restant voisin de la pulsation stabilisée ω_s , la croissance de F conduit, après confusion de deux des solutions précédentes, à une solution unique, stable comme nous le verrons.

ω_0 étant toujours fixé, la décroissance de F fait apparaître une autre limite, lorsque le cercle de rayon F devient à nouveau tangent à l'équipulsation (ω_0). En dessous de cette limite il n'y a plus qu'un point d'intersection correspondant à une solution instable. C'est dire que la synchronisation disparaît quand l'action excitatrice devient trop faible.

Supposons maintenant que F reste fixe et qu'on fasse varier la pulsation excitatrice ω_0 . Lorsque $|\omega_0 - \omega_s|$ augmente, les courbes équipulsation s'écartent de la courbe particulière (ω_s), et il est clair,

sur la figure 28, qu'il existe une pulsation limite pour laquelle l'équipulsation devient tangente au cercle de rayon F .

Au delà de cette limite il n'existe plus qu'un point d'intersection,

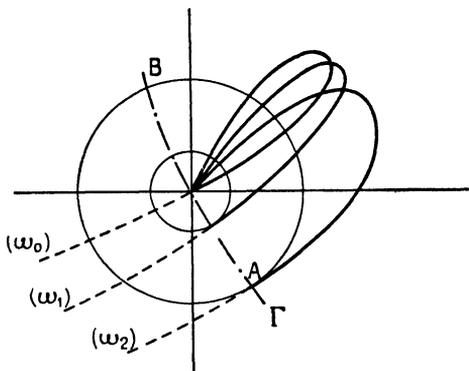


FIG. 28.

correspondant à une solution instable. Par conséquent, la synchronisation disparaît lorsque la pulsation excitatrice s'écarte trop de la pulsation propre de l'auto-oscillateur stabilisé.

Le lieu des points de contact des courbes équipulsation (ω_0) et des cercles (F) , qui fixe la limite de synchronisation, est indiqué sur la figure 28 (courbe limite Γ en trait mixte). On en déduit la largeur de la plage de synchronisation. Cette plage sera définie, pour une amplitude d'attaque F_0 donnée, par l'ensemble des valeurs que peut prendre ω_0 pour qu'il y ait synchronisation. Elle est représentée sur le dessin par la portion de courbe Γ intérieure au cercle de rayon F_0 . Les valeurs de la pulsation d'attaque, au delà desquelles la synchronisation n'est plus possible, sont données par les deux courbes équipulsation limites tangentes au cercle de rayon F_0 .

LIAISON ENTRE LES RÉGIMES NON LINÉAIRES ET LES RÉGIMES LINÉAIRES. — Le fonctionnement des oscillateurs linéaires peut évidemment être décrit en utilisant le diagramme mobile. Dans l'équation

$$(23) \quad H_{op} x = F \cos \omega_0 t,$$

H_{op} représente alors un opérateur linéaire, et nous avons vu plus

haut que les courbes équipulsation représentatives de $H(j\omega)$ sont des demi-droites passant par l'origine.

Le cercle de rayon F coupe la demi-droite équipulsation (ω_0) en un point M , d'où une seule solution dont on doit discuter la stabilité (fig. 29).

La discussion est particulièrement simple dans ce cas : on fera

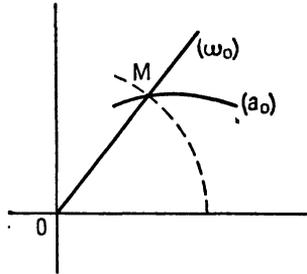


FIG. 29.

subir une petite modification Δx de module ξ à la solution trouvée, et l'on étudiera l'évolution ultérieure de ξ . Comme H_{op} est un opérateur linéaire, on a

$$H_{op}(x + \Delta x) \equiv H_{op}x + H_{op}\Delta x = F \cos \omega_0 t$$

ou, tenant compte de l'équation (23)

$$H_{op}\Delta x = 0.$$

Cette dernière équation nous montre que si l'oscillation libre du système est instable, la solution forcée est aussi instable. On ne peut donc définir une oscillation forcée stable que pour des systèmes dont l'oscillation libre est amortie.

Cette méthode fait apparaître l'analogie entre la solution forcée d'un oscillateur régi par une loi linéaire et la solution synchronisée ou forcée d'un oscillateur régi par une loi non linéaire.

Dans le cas d'un oscillateur non linéaire, les courbes équipulsation (ω_r) , issues toutes de O , s'incurvent lorsqu'on s'éloigne de l'origine. Au voisinage de O , on peut néanmoins assimiler ce faisceau de courbes à un faisceau de segments de droites et, par suite, approcher l'équation non linéaire donnée par une équation linéaire.

Cette équation est évidemment une équation linéaire tangente particulière correspondant aux faibles amplitudes d'oscillation.

En étudiant la synchronisation des systèmes non linéaires, nous avons obtenu une solution correspondant à cette portion à peu près linéaire du faisceau de courbes (ω_r) ; on peut donc prévoir qu'elle ne sera pas stable puisque le système est auto-entretenu.

III. — Stabilité des solutions libres, forcées ou synchronisées. Critère général de stabilité.

L'équation de synchronisation d'un oscillateur non linéaire ayant été écrite sous la forme

$$(24) \quad H_{op} \left(a_t, \frac{d}{dt}, \frac{d^2}{dt^2}, \dots \right) a_t \sin (\omega_0 t + \varphi) = F_0 \sin \omega_0 t,$$

nous avons cherché une solution synchronisée d'amplitude constante a_0 , et nous avons vu que pour déterminer cette amplitude a_0 il suffit de remplacer l'opérateur du premier membre par $H_t [a_0, j\omega_0, (j\omega_0)^2 \dots]$

L'étude du régime libre apparaît comme un cas particulier lorsque $F_0 = 0$.

Pour savoir si la solution trouvée est stable, nous devons étudier le comportement du système lorsqu'on le suppose dans un état voisin du régime envisagée, synchronisé ou libre (nous supposons dans la suite qu'il s'agit d'un régime synchronisé, ce qui est un cas plus général), il faut alors tenir compte des variations de l'amplitude d'oscillation a_t avec le temps, et prévoir si a_t tend vers la valeur a_0 ou s'en écarte.

On pourrait étudier l'évolution de l'oscillateur au voisinage d'un état synchronisé en introduisant, comme nous l'avons fait précédemment une pulsation complexe. Nous utiliserons cependant ici une autre forme d'exposé, en n'envisageant que des fonctions dont la pulsation est réelle et l'amplitude variable avec le temps. Les deux méthodes se ramènent d'ailleurs immédiatement l'une à l'autre.

On notera pour cela que les dérivées

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (a_t \sin \omega t) &= a_t \frac{d}{dt} (\sin \omega t) + \sin \omega t \frac{da}{dt}, \\ \frac{d^2}{dt^2} (a_t \sin \omega t) &= a_t \frac{d^2}{dt^2} (\sin \omega t) + 2 \frac{da}{dt} \frac{d}{dt} (\sin \omega t) + \frac{d^2 a}{dt^2} (\sin \omega t), \end{aligned}$$

peuvent être écrites sous la forme réduite bien connue

$$\frac{d}{dt} (a_t \sin \omega t) = (p + q) a \sin \omega t,$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (a_t \sin \omega t) = (p + q)^2 a \sin \omega t,$$

en posant

$$p^m = \left(\frac{\partial^m}{\partial t^m} \right)_a, \quad q^n = \left(\frac{\partial^n}{\partial t^n} \right)_{\sin \omega t}.$$

Plus généralement, on sait que si deux fonctions u et v dépendent du temps, on a

$$\frac{d^m}{dt^m} (uv) = (p + q)^m uv,$$

avec

$$p^m = \left(\frac{\partial^m}{\partial t^m} \right)_a, \quad q^n = \left(\frac{\partial^n}{\partial t^n} \right)_v.$$

Il en résulte que si l'on veut tenir compte à la fois des variations de a_t et de $\sin (\omega_0 t + \varphi)$, on sera amené à remplacer l'opérateur qui figure dans l'équation d'oscillation par le nouvel opérateur

$$(25) \quad H_{op} [a_t, (p + q), (p + q)^2 \dots].$$

Si a_t devient constant, on a $q = 0$ et l'opérateur H_{op} se réduit à celui que nous avons utilisé pour trouver les solutions synchronisées : $H_{op}(a_t, p, p^2, \dots)$.

Si a_t est lentement variable à côté de $\sin \omega_0 t$ on pourra, dans les calculs, considérer q comme un paramètre petit devant p et utiliser les méthodes d'approximation classiques du calcul algébrique (1).

On voit qu'on peut remplacer encore les expressions réelles $a_t \sin (\omega_0 t + \varphi)$ et $F_0 \sin \omega_0 t$ qui figurent dans l'équation

$$(26) \quad H_{op}[a_t, (p + q), (p + q)^2, \dots] a_t \sin (\omega_0 t + \varphi) = F_0 \sin \omega_0 t$$

par les expressions complexes

$$(27) \quad V = a_t e^{j(\omega_0 t + \varphi)}, \quad F = F_0 e^{j\omega_0 t},$$

(avec ω_0 réel et a_t réel, variable avec le temps).

L'équation (26) devient

$$(28) \quad H_{op} [a_t, (j\omega_0 + q), (j\omega_0 + q)^2, \dots] V = F$$

ou, plus simplement

$$(29) \quad H_{op} [a_t, j\omega_0 + q] V = F.$$

(1) Il est clair que cette méthode revient à utiliser la pulsation complexe $j\omega + q$ où q est un terme réel très petit.

Faisons alors subir à V , à partir de l'état

$$(30) \quad V_0 = a_0 e^{j(\omega_0 t + \varphi)},$$

correspondant à une solution synchronisée, une petite modification ΔV de module ξ :

$$(31) \quad \Delta V = \xi e^{j(\omega_0 t + \varphi)},$$

il vient

$$H [a_0 + \Delta a_t, j\omega_0 + q] (V_0 + \Delta V) = F$$

ou au premier ordre :

$$H [a_0, j\omega_0 + q] V_0 + H [a_0, j\omega_0 + q] \Delta V + \left[\frac{\partial H}{\partial a_t} \right]_{a_t=a_0} V_0 \Delta (a_t) = F.$$

Si q est toujours très petit devant $\Delta(a_t)$, l'équation peut être approchée par :

$$H [a_0, j\omega_0] V_0 + H [a_0, j\omega_0 + q] \Delta V + \left[\frac{\partial H}{\partial a_t} \right]_{a_t=a_0} V_0 \Delta (a_t) = F.$$

Tenant compte de l'égalité $H[a_0, j\omega_0]V_0 = F$, on en déduit

$$H [a_0, j\omega_0 + q] \Delta V + \left[\frac{\partial H}{\partial a_t} \right]_{a_t=a_0} V_0 \Delta (a_t) = 0,$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta V &= \xi e^{j(\omega_0 t + \varphi)}, \\ V_0 \Delta (a_t) &= a_0 \xi e^{j(\omega_0 t + \varphi)} = a_0 \Delta V. \end{aligned}$$

L'équation de perturbation est donc de la forme

$$(32) \quad \left\{ H [a_0, j\omega_0 + q] + a_0 \left[\frac{\partial H(a_t, j\omega_0 + q)}{\partial a_t} \right]_{a_t=a_0} \right\} \Delta V = 0.$$

Si on considère l'équation :

$$\left\{ H[a_0, j\omega_0 + q] + a_0 \left[\frac{\partial H(a_t, j\omega_0 + q)}{\partial a_t} \right]_{a_t=a_0} \right\} = 0$$

comme une équation algébrique en q , on la mettra aisément sous la forme :

$$\left[1 + \frac{a_0}{2} \frac{\partial}{\partial a_t} \right]_{a_t=a_0} |H|^2 = 0.$$

Si on restitue à q sa signification d'opérateur, on est conduit à l'équation différentielle équivalente :

$$(33) \quad \left[1 + \frac{a_t}{2} \frac{\partial}{\partial a_t} \right]_{a_t=a_0} |H|^2 \xi = 0.$$

On négligera, dans l'expression $H(a_t, \omega_0, q)$, les termes non linéaires en q .

L'équation ainsi trouvée est une équation différentielle du second ordre en ξ , si l'on remplace, à la fin des calculs, q par l'opérateur $\frac{d}{dt}$ et q^2 par $\frac{d^2}{dt^2}$. Elle permet d'étudier l'évolution de ξ .

Notons que cette équation est également applicable à l'étude de la stabilité d'un régime libre, forcé ou synchronisé.

LIMITES DE STABILITÉ. — Le premier membre de l'équation (33) apparaît comme un polynôme du second degré en q ,

$$(34) \quad \left[1 + \frac{a_t}{2} \frac{\partial}{\partial a_t} \right]_{a_t=a_0} |H(a_t, \omega_0, q)|^2 \equiv \left\{ \frac{1}{2a_0} \frac{\partial}{\partial a_t} \left[|H(a_t, \omega_0, q)|^2 a_t^2 \right] \right\}_{a_t=a_0} \equiv Aq^2 + Bq + C.$$

La discussion de la stabilité des oscillations se ramène, par conséquent, à celle du signe des trois coefficients A, B, C.

L'expression de C est obtenue en égalant q à zéro dans (34), on trouve ainsi

$$C \equiv \left[1 + \frac{a_t}{2} \frac{\partial}{\partial a_t} \right]_{a_t=a_0} |H(a_0, \omega_0)|^2.$$

Or nous avons vu plus haut que le lieu des points de contact des équipulsations et des cercles centrés à l'origine est justement donné par

$$C \equiv \left[1 + \frac{a_t}{2} \frac{\partial}{\partial a_t} \right]_{a_t=a_0} |H(a_0, \omega_0)|^2 = 0.$$

Ce lieu joue donc un rôle très important en limitant dans le plan complexe des plages de stabilité.

En effet, à la traversée de cette courbe, C change de signe (appendice II).

Par exemple dans le cas de l'équation de Duffing, avec des coefficients tous positifs, nous vérifierons que A et B sont toujours positifs. Il s'ensuit que dans la zone où C est positif la solution générale de

l'équation est stable et, au contraire, instable dans la zone où C est négatif.

Dans le cas général, il faut porter sur un même graphique les trois courbes représentatives de

$$\begin{aligned} A(a_0, \omega_0) &= 0, \\ B(a_0, \omega_0) &= 0, \\ C(a_0, \omega_0) &= 0. \end{aligned}$$

(La discussion se simplifie, comme dans l'exemple de l'équation de Duffing, lorsque les courbes $A = 0$ et $B = 0$ sont imaginaires.) Les plages de stabilité sont alors caractérisées par les conditions

$$\frac{B}{A} > 0, \quad \frac{C}{A} > 0,$$

c'est-à-dire soit

$$\begin{cases} A > 0, \\ B > 0, \\ C > 0; \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} A < 0, \\ B < 0, \\ C < 0. \end{cases}$$

En ce qui concerne, les fonctions $A(a_0, \omega_0)$, $B(a_0, \omega_0)$ et $C(a_0, \omega_0)$, nous remarquerons que si l'on pose

$$(35) \quad f(a_0, \omega_0, q) \equiv \frac{1}{2a_0} |H(a_t, \omega_0, q)|^2 a_t^2,$$

on a

$$(36) \quad \begin{cases} C(a_0, \omega_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial a_t} \right]_{q=0, a_t=a_0}, \\ B(a_0, \omega_0) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial a_t \partial q} \right]_{q=0, a_t=a_0}, \\ A(a_0, \omega_0) = \left[\frac{\partial^3 f}{\partial a_t \partial q^2} \right]_{q=0, a_t=a_0}. \end{cases}$$

Ces résultats découlent immédiatement de la forme polynomiale de $f(a_0, \omega_0, q)$.

Remarque. — Lorsque l'amplitude ne figure que par son carré dans l'expression de l'opérateur H , il est possible d'adopter une autre forme de l'équation de stabilité. On a, en effet

$$\frac{\partial |H|^2}{\partial a_t} = \frac{\partial |H|^2}{\partial (a_t^2)} 2a_t,$$

d'où la loi

$$(37) \quad \boxed{\left[1 + a_t^2 \frac{\partial}{\partial (a_t^2)} \right]_{a_t=a_0} |H(a_0^2, \omega_0)|^2 = 0.}$$

APPLICATION A L'ÉQUATION DE DUFFING. — Dans l'exemple de l'équation de Duffing,

$$\ddot{x} + c\dot{x} + (bx + \beta x^3) = 0, \quad \text{avec } c, b, \beta > 0,$$

on a trouvé

$$H(a_i, j\omega_0) \equiv p^2 + cp + b + \frac{3}{4}\beta a_i^2, \quad \text{avec } p = j\omega_0,$$

on a donc

$$H(a_i, j\omega_0 + q) \equiv (j\omega_0 + q)^2 + c(j\omega_0 + q) + b + \frac{3}{4}\beta a_i^2,$$

Soit, après linéarisation en q et calcul du carré du module :

$$|H|^2 = \left(b + \frac{3}{4}\beta a_i^2 + cq - \omega_0^2 \right)^2 + \omega_0^2 (c + 2q)^2,$$

$$a_i^2 \frac{\partial |H|^2}{\partial a_i^2} = \frac{3}{2}\beta a_i^2 \left[b + \frac{3}{4}\beta a_i^2 + cq - \omega_0^2 \right].$$

On en tire

$$\left[1 + a_i^2 \frac{\partial}{\partial (a_i^2)} \right]_{a_i=a_0} |H|^2 = (c^2 + 4\omega_0^2)q^2 + \left\{ 2c \left(b - \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta a_0^2 \right) + 4c\omega_0^2 + \frac{3}{2}\beta c a_0^2 \right\} q$$

$$+ \left(b + \frac{3}{4}\beta a_0^2 - \omega_0^2 \right)^2 + \omega_0^2 c^2 + \left(b + \frac{3}{4}\beta a_0^2 - \omega_0^2 \right) \frac{3}{2}\beta a_0^2.$$

La condition $C = 0$ nous conduit à retrouver le lieu des points limites

$$\left(b + \frac{3}{4}\beta a_0^2 - \omega_0^2 \right)^2 + \omega_0^2 c^2 + \left(b + \frac{3}{4}\beta a_0^2 - \omega_0^2 \right) \frac{3}{2}\beta a_0^2$$

$$\equiv \left(b - \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta a^2 \right) \left(b - \omega_0^2 + \frac{9}{4}\beta a^2 \right) + c^2 \omega_0^2 = 0.$$

D'autre part nous constatons que A et B sont toujours positifs. On a, en effet

$$A \equiv c^2 + 4\omega_0^2, \quad B \equiv (2b + 2\omega_0^2 + 3\beta a_0^2)c.$$

La courbe $C = 0$ apparaît alors comme la seule limite de stabilité.

Ce résultat subsiste lorsque β et b sont de signes quelconques avec $c = 0$.

APPLICATION A L'ÉQUATION DE VAN DER POL. — 1° Dans le cas de l'équation de Van der Pol, l'opérateur $H_{op}(a_i, p)$ est de la forme

$$H_{op}(a_i, p) = L_1 C_1 p^2 + \left(Ms + r_1 C_1 + \frac{3Mb}{4} a_i^2 \right) p + 1.$$

2° L'opérateur $H_{op}(a_i, j\omega_0 + q)$ est donc de la forme

$$L_1 C_1 (j\omega_0 + q)^2 + \left(Ms + r_1 C_1 + \frac{3Mb}{4} a_i^2 \right) (j\omega_0 + q) + 1.$$

Suivant des notations classiques, nous poserons ici

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1}, \quad \mu = -\frac{Ms + r_1 C_1}{2L_1 C_1}, \quad V_1^2 = -\frac{Ms + r_1 C_1}{3Mb};$$

$H_{op}(a, \omega_0, q)$ devient

$$(j\omega_0 + q)^2 - 2\mu \left[1 - \frac{a_1^2}{4V_1^2} \right] (j\omega_0 + q) + \omega_1^2.$$

3° Négligeant les termes en q^2 , ainsi que le produit $(1 - \frac{a_1^2}{4V_1^2})q$ si l'on suppose que l'amplitude de la solution synchronisée est voisine de l'amplitude stabilisée, on en tire

$$|H|^2 = (\omega_1^2 - \omega_0^2)^2 + \left[2q\omega_0 - 2\mu\omega_0 \left(1 - \frac{a_1^2}{4V_1^2} \right) \right]^2,$$

nous utiliserons, conformément aux traités classiques⁽¹⁾, la valeur réduite $\frac{|H|^2}{4\omega_0^2}$ et poserons

$$\Delta\omega = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{2\omega_0}.$$

4° Nous retrouvons l'expression classique de l'équation différentielle du second ordre qui permet d'étudier la stabilité de l'oscillation synchronisée :

$$\frac{1}{4\omega_0^2} \left[1 + a_1^2 \frac{\partial}{\partial(a_1^2)} \right]_{a_1=a_0} |H(a, \omega_0, q)|^2 \xi \equiv \left[q^2 - 2\mu \left(1 - \frac{a_0^2}{2V_1^2} \right) q + \mu^2 \left(1 - \frac{a_0^2}{4V_1^2} \right) \left(1 - \frac{3a_0^2}{4V_1^2} \right) + (\Delta\omega)^2 \right] \xi = 0.$$

Nous ne poursuivons pas la discussion de cette équation qui est classique⁽¹⁾. Nous nous contenterons de retrouver le critère de stabilité du régime libre en portant dans cette équation générale $a_0 = a$, et $\omega_0 = \omega$. On obtient ainsi l'équation

$$(q^2 + 2\mu q) \xi = 0 \quad \text{ou} \quad (q + 2\mu) \xi = 0,$$

d'où l'on déduit la constante de temps τ de retour au régime libre

$$\tau = \frac{1}{2\mu}.$$

(1) Y. ROCARD, *Dynamique générale des vibrations*. Masson et C^{ie}, 1943, p. 225.

CHAPITRE III

EXCITATION ALÉATOIRE DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES

Dans le précédent chapitre, nous avons examiné l'effet d'une excitation sinusoïdale sur un système oscillant non linéaire. Nous nous placerons ici dans un autre cas extrême, celui où l'action extérieure est parfaitement aléatoire. Une telle fonction de bruit est appelée « bruit blanc » pour indiquer qu'elle admet, dans son spectre de Fourier, toutes les fréquences, de $-\infty$ à $+\infty$.

Nous introduirons une hypothèse simplificatrice en nous plaçant dans le cas où le bruit reste faible devant l'amplitude d'oscillation.

Rappelons d'abord quelques définitions concernant le « bruit blanc », et quelques méthodes d'étude.

I. — Propriétés élémentaires et statistiques du bruit blanc (rappel).

A. — PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES, « STRUCTURE » DU BRUIT BLANC

1. Les impulsions originelles. — *a. FONCTION IMPULSIVE.* — Les chocs élémentaires produits par une source de bruit peuvent être commodément représentés au moyen de fonctions impulsives dont le type est la fonction $\delta(t)$ de Dirac.

Rappelons les propriétés qui servent à définir cette fonction :

1° Elle est nulle pour toute valeur de t extérieure à un intervalle Δt infiniment étroit entourant l'origine des temps.

2° L'intégrale $S \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt$ a une valeur finie (valeur posée égale à 1); il s'ensuit que $\delta(t)$, nul pour toute valeur de t différente de zéro, est infini pour $t = 0$.

Empruntons un exemple à la mécanique, en supposant que la fonction impulsive soit une force $F(t)$ appliquée pendant un temps très court à un point matériel (on la supposera nulle en dehors de ce laps de temps); elle entraîne une variation brutale de la quantité de mouvement du point solide.

Il faut que, pendant cette durée extrêmement courte, la force

en action devienne extrêmement grande pour que la vitesse du point matériel varie d'une façon sensible.

Dans ce cas, l'intégrale de Dirac, $q = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)dt$ mesure la variation de la quantité de mouvement du point matériel considéré. On l'appelle « percussion ».

Un autre exemple est celui où l'on applique entre deux bornes d'un réseau conducteur une force électromotrice $E(t)$ pendant un temps très court. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} E(t)dt$ est alors appelée « échelon » de la fonction $E(t)$ ⁽¹⁾, le terme « percussion » étant surtout réservé à une action mécanique.

Dans le cas général, l'impulsion est produite à un instant t_j quelconque (différent de zéro), et son échelon q est différent de 1; nous la désignerons alors par $G(t - t_j)$.

Cette fonction $G(t - t_j)$ se déduit de la fonction normalisée $\delta(t)$ par translation dans le temps et multiplication par q .

b. DÉVELOPPEMENT DE FOURIER DE LA FONCTION IMPULSIVE $G(t - t_j)$. — Les impulsions produites par une source de bruit n'ont, bien entendu, aucun caractère sinusoïdal. Il est possible cependant d'introduire une périodicité fictive en imaginant qu'une impulsion donnée se reproduira au bout de temps $T, 2T, 3T, \dots$

Toutes les fois que cette impulsion, à répétition périodique, agira sur un système, son action sera la même que celle de l'impulsion unique donnée, à la condition que T soit assez grand pour que le système n'ait pas gardé la mémoire du choc antérieur.

On a ainsi le droit d'assimiler l'action d'une impulsion unique à celle d'une impulsion de la suite de période T , qu'il est possible de représenter par une série de Fourier.

Nous rappelons ci-dessous la forme d'un tel développement pour la fonction impulsive $G(t - t_j)$ d'échelon q , avec un intervalle de répétition $0, T$:

$$(1) \quad G(t - t_j) = \frac{q}{T} + \frac{2q}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n (t - t_j)}{T}.$$

⁽¹⁾ On a choisi cette appellation, car la représentation graphique de la fonction $\int_{-\infty}^t E(t)dt$, primitive de la fonction impulsive $F(t)$, a la forme d'un échelon ou d'une marche d'escalier de hauteur q .

Les harmoniques successifs de ce développement ont des fréquences qui diffèrent de la quantité constante $\Delta\nu = \frac{1}{T}$ (pour l'intervalle 0, T choisi).

Désignons par ν_n la fréquence du $n^{\text{ième}}$ harmonique, nous pourrons écrire

$$(2) \quad G(t - t_j) = q\Delta\nu + 2q\Delta\nu \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2\pi\nu_n(t - t_j),$$

avec

$$\nu_n = \frac{n}{T}, \quad \Delta\nu = \frac{1}{T}.$$

Si l'on autorise les fréquences négatives, cette expression se réduit à la forme suivante, où le terme constant ne se distingue plus des autres :

$$(3) \quad G(t - t_j) = q\Delta\nu \sum_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi\nu_n(t - t_j).$$

Nous mentionnerons enfin une dernière forme sous laquelle peut être mis ce développement, si l'on remarque qu'on a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \sin 2\pi\nu_n(t - t_j) = 0$$

(les termes de fréquences opposées s'annulant deux à deux).

On joindra à la série (3) une deuxième série de ce type, ce qui donne

$$(4) \quad G(t - t_j) = q\Delta\nu \sum_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi\nu_n(t - t_j) + q\Delta\nu \sum_{-\infty}^{+\infty} j \sin 2\pi\nu_n(t - t_j) \\ = q\Delta\nu \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\nu_n(t - t_j)}.$$

Si l'on fait tendre T vers l'infini, les différences finies $\Delta\nu$ deviennent des termes infiniment petits, et l'on est amené à remplacer les séries de Fourier précédentes par des intégrales de Fourier. Ce passage à la limite est nécessaire lorsque la « mémoire » du système sur lequel agit le choc ne s'annule jamais complètement.

c. SPECTRE D'AMPLITUDE D'UNE IMPULSION, IMPULSION RÉDUITE, IMPULSION FILTRÉE. — Reprenant la série trigonométrique

$$G(t - t_j) = q\Delta\nu \sum_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi\nu_n(t - t_j),$$

avec

$$\nu_n = \frac{n}{T}, \quad \Delta\nu = \frac{1}{T},$$

nous voyons que le spectre, obtenu en portant en abscisse la fréquence de chaque harmonique et en ordonnée l'amplitude correspondante, est formé d'une succession de raies de même longueur $q\Delta\nu$, distantes de $\Delta\nu$.

Si l'intervalle de répétition T tend vers l'infini, $\Delta\nu$ et $q\Delta\nu$ tendent vers zéro. Le spectre vient se confondre avec l'axe des abscisses, mais si nous portons en ordonnée q au lieu de $q\Delta\nu$, les raies gardent une longueur constante et le spectre de raies doit être remplacé, à la limite, par un spectre continu.

Le spectre d'amplitude d'une impulsion, ainsi défini, a donc la

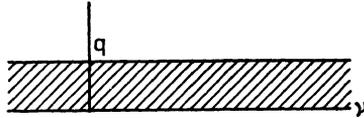


FIG. 30.

forme très simple représentée sur la figure 30, c'est une bande indéfinie de hauteur q .

Supposons que l'impulsion traverse un filtre :

Nous supposons que la bande de fréquences comprises entre deux valeurs limites ν_1 et ν_2 ne subit aucune modification d'amplitude et de phase, tandis que les autres fréquences sont arrêtées.

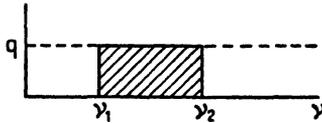


FIG. 31.

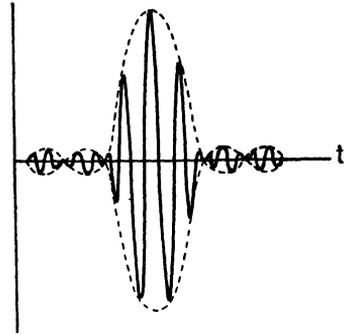


FIG. 32.

Le spectre de l'impulsion transmise est donc réduit à la bande rectangulaire représentée sur la figure 31. L'impulsion transmise est une nouvelle fonction du temps représentée sur la figure 32.

Une impulsion, ainsi déduite du choc initial *par simple découpage de sa bande spectrale* sera appelée « impulsion réduite ». L'influence d'un filtre sera généralement plus compliquée : il modifiera à la fois l'amplitude et la phase des diverses composantes spectrales admises à l'entrée.

Tenant compte de ce que les harmoniques de l'impulsion initiale situés nettement en dehors de la bande que peut transmettre le filtre ne jouent aucun rôle, on voit qu'on pourra toujours déterminer la « réponse » en remplaçant cette impulsion initiale par une « impulsion réduite ».

La largeur du spectre de l'impulsion réduite d'entrée devra être évidemment du même ordre que la largeur de bande du système considéré.

d. IMPULSION PAIRE, IMPULSION IMPAIRE. — Il est souvent commode de décomposer l'impulsion en deux parties que nous appellerons « impulsion paire » et « impulsion impaire ».

L'impulsion paire et l'impulsion impaire sont deux oscillations en quadrature (la première du type cos, la deuxième du type sin), dont les amplitudes sont des fonctions lentement variables $X(t)$ et $Y(t)$.

Cette définition nécessite, comme nous allons le voir, que l'impulsion puisse être remplacée par une « impulsion réduite » de faible largeur spectrale. Elle est donc utilisable toutes les fois que le choc agit sur un système sélectif. $X(t)$ et $Y(t)$ varient d'autant plus lentement avec le temps que la largeur spectrale est plus faible.

Il est facile d'obtenir les deux composantes, paire et impaire, du choc en groupant convenablement les termes de son développement de Fourier.

Soit ν_0 la fréquence centrale de la bande spectrale rectangulaire qui caractérise l'impulsion réduite donnée, cette bande s'étendant de la fréquence ν_1 à la fréquence ν_2 .

Le développement de Fourier correspondant sera

$$G(t - t_j) = q\Delta\nu \sum_{\nu_1}^{\nu_2} \cos 2\pi\nu_n(t - t_j),$$

avec

$$\nu_n = \frac{n}{T}, \quad \Delta\nu = \frac{1}{T}, \quad T \rightarrow \infty.$$

Il est facile de voir qu'on a, en mettant en évidence les termes dont les fréquences sont symétriques par rapport à ν_0 ,

$$G(t - t_j) = q\Delta\nu \sum_{\nu=0}^{\nu=\nu_0-\nu_1} [\cos 2\pi(\nu_0 - \nu)(t - t_j) + \cos 2\pi(\nu_0 + \nu)(t - t_j)],$$

ce qu'on peut écrire sous la forme

$$G(t - t_j) = 2q\Delta\nu \left[\sum_{\nu=0}^{\nu=\nu_0-\nu_1} \cos 2\pi\nu(t - t_j) \right] \cos 2\pi\nu_0(t - t_j)$$

ou, en développant le facteur $\cos 2\pi\nu_0(t - t_j)$:

$$\begin{aligned} G(t - t_j) = 2q\Delta\nu \cos 2\pi\nu_0 t_j & \left[\sum_{\nu=0}^{\nu=\nu_0-\nu_1} \cos 2\pi\nu(t - t_j) \right] \cos 2\pi\nu_0 t \\ & + 2q\Delta\nu \sin 2\pi\nu_0 t_j \left[\sum_{\nu=0}^{\nu=\nu_0-\nu_1} \cos 2\pi\nu(t - t_j) \right] \sin 2\pi\nu_0 t \end{aligned}$$

Le résultat final est plus facile à interpréter si l'on change les limites de sommation qui figurent dans l'expression ci-dessus. Il vient alors

$$\begin{aligned} G(t - t_j) = q\Delta\nu \cos 2\pi\nu_0 t_j & \left[\sum_{\nu=-(\nu_0-\nu_1)}^{\nu=\nu_0-\nu_1} \cos 2\pi\nu(t - t_j) \right] \cos 2\pi\nu_0 t \\ & + q\Delta\nu \sin 2\pi\nu_0 t_j \left[\sum_{\nu=-(\nu_0-\nu_1)}^{\nu=\nu_0-\nu_1} \cos 2\pi\nu(t - t_j) \right] \sin 2\pi\nu_0 t. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant poser

$$\begin{aligned} X(t) &= q\Delta\nu \cos 2\pi\nu_0 t_j \left[\sum_{\nu=-(\nu_0-\nu_1)}^{\nu=\nu_0-\nu_1} \cos 2\pi\nu(t - t_j) \right], \\ Y(t) &= q\Delta\nu \sin 2\pi\nu_0 t_j \left[\sum_{\nu=-(\nu_0-\nu_1)}^{\nu=\nu_0-\nu_1} \cos 2\pi\nu(t - t_j) \right]. \end{aligned}$$

Ces deux fonctions représentent des « chocs réduits » au temps t_j , elles varient donc d'autant plus lentement que leur bande spectrale est plus étroite.

Notons que :

1° La bande spectrale de chacun de ces chocs réduits composants

a pour largeur $2(\nu_0 - \nu_1)$. C'est précisément la largeur de bande de l'impulsion réduite résultante, initialement donnée.

2° La bande spectrale de chacun des chocs réduits composants admet pour fréquence centrale $\nu = 0$. Les courbes représentatives

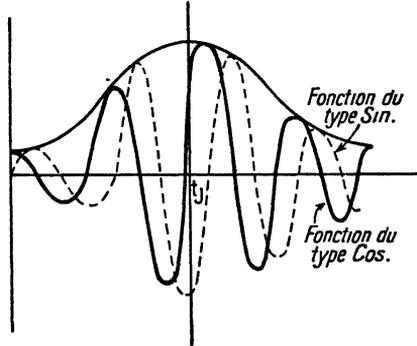


FIG. 33.

de $X(t)$ et $Y(t)$ sont classiques. On peut souvent les approcher par des « courbes en cloche » du type de Gauss (fig. 33).

3° Si l'on appelle « échelons des chocs réduits » les échelons qu'auraient les chocs correspondants non réduits (obtenus en étendant les sommations ci-dessus de $-\infty$ à $+\infty$), on voit que $X(t)$ et $Y(t)$ ont pour échelons respectifs $q \cos 2\pi\nu_0 t$, et $q \sin 2\pi\nu_0 t$, tandis que le choc réduit résultant a pour échelon q .

2. La « réponse » d'un système linéaire à une impulsion.

— a. ÉTUDE DIRECTE DE L'EFFET D'UNE IMPULSION. — Considérons,

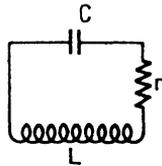


FIG. 34.

pour fixer les idées, le circuit oscillant à self, capacité, résistance série (L, C, r) de la figure 34.

On suppose que la tension aux plaques du condensateur, choisie

comme variable, oscille librement suivant une loi pseudo-sinusoidale très lentement amortie, de la forme

$$V = a(t) \sin \omega_0 t, \quad \text{avec} \quad a(t) = a_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

(a_0 , amplitude au temps $t = 0$, τ constante de temps du circuit t).

Une impulsion, produite par exemple par un saut électronique dans la résistance r , entraîne une modification instantanée de l'amplitude en même temps qu'un petit déphasage. La fréquence n'est pas affectée, puisqu'elle est déterminée par la donnée de L , C , r .

Les variations d'amplitude Δa et de phase $\Delta \varphi$, entraînées par le choc, seront aisément calculées (appendice V) en écrivant que ce dernier produit une discontinuité de la vitesse $\frac{dV}{dt}$ sans modifier V , c'est la méthode qu'on emploie ordinairement dans tous les problèmes de percussions.

On trouve ainsi, en supposant que le choc est très faible à côté de l'amplitude d'oscillation libre, et en conservant seulement les parties principales de Δa et de $\Delta \varphi$:

$$(5) \quad \Delta a = q \omega_0 \cos \omega_0 t_j,$$

$$(6) \quad a \Delta \varphi = -q \omega_0 \sin \omega_0 t_j,$$

t_j désignant l'instant du choc, q son échelon, a l'amplitude de l'oscillation juste avant le choc.

Les expressions (5) et (6) nous conduisent aux remarques suivantes :

Remarque 1. — 1° Si l'instant t_j auquel est produit le choc est de la forme $t_j = kT_0$ (k , nombre entier), et coïncide par conséquent avec un point d'élongation nulle, on a

$$\sin \omega_0 t_j = 0, \quad \text{donc} \quad \Delta \varphi = 0.$$

Le choc entraîne la variation d'amplitude $\Delta a = q \omega_0$ sans modification de phase.

2° Si l'instant t_j est de la forme $t_j = \frac{T_0}{4} + kT_0$ et coïncide avec un point d'élongation maximum, on a

$$\cos \omega_0 t_j = 0, \quad \text{donc} \quad \Delta a = 0.$$

Le choc entraîne la variation de phase $\Delta \varphi = -\frac{q \omega_0}{a}$ sans modification d'amplitude.

3° Si l'instant t_j est quelconque, le choc entraîne à la fois une varia-

tion d'amplitude et une variation de phase. On peut donc le remplacer par deux chocs composants du type précédent :

— Le premier, appliqué au point d'élongation nulle

$$t_{j_1} = k_1 T_0,$$

le plus voisin de t_j , produira la même variation d'amplitude que le choc initial (sans variation de phase). Nous l'appellerons « choc composant $[a]$ ».

— Le deuxième, appliqué au point d'élongation maximum

$$t_{j_2} = \frac{T_0}{4} + k_2 T_0,$$

le plus voisin de t_j , produira la même variation de phase que le choc initial (sans variation d'amplitude). Nous l'appellerons de même « choc composant $[\varphi]$ ».

Les expressions (5) et (6) nous montrent que les échelons de ces deux chocs composants devront être respectivement

$$q \cos \omega_0 t_j \quad \text{et} \quad q \sin \omega_0 t_j,$$

l'échelon du choc initial unique étant q .

Ce résultat est à rapprocher de celui qui a été établi à la fin du

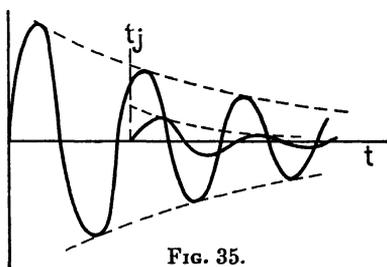


FIG. 35.

paragraphe 1d. Nous verrons plus loin, en effet, que les composants pair et impair ne sont autre que des composants $[a]$ et $[\varphi]$ réduits.

Remarque 2. — Le système sur lequel agit l'impulsion étant linéaire, on peut appliquer le principe de superposition des états.

On obtient ainsi simplement la modification de régime entraînée par l'impulsion en superposant, à l'oscillation exponentielle amortie qu'aurait le circuit en l'absence d'impulsion, l'oscillation que produirait l'impulsion d'échelon q infligée au système initialement au repos.

Les deux oscillations sont représentées sur la figure 35.

La remarque 1 nous donne un procédé équivalent. Elle nous montre qu'on peut superposer à l'oscillation non perturbée deux oscillations obtenues comme suit :

— La première, provenant de l'action du choc composant $[a]$ sur le circuit initialement au repos, est en phase ou en opposition de phase avec l'oscillation non perturbée. Nous l'appellerons « oscillation $[a]$ ».

— La deuxième, provenant de l'action du choc composant $[\varphi]$ sur le circuit initialement au repos, est en quadrature avancée ou retardée avec l'oscillation non perturbée. Nous l'appellerons, de même, « oscillation $[\varphi]$ ».

Les deux oscillations composantes sont représentées sur la figure 36.

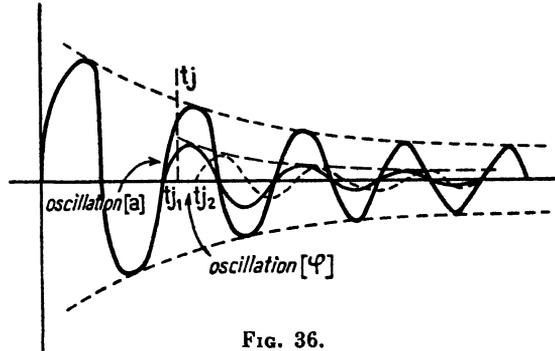


FIG. 36.

On doit noter que les deux oscillations composantes, $[a]$ et $[\varphi]$, ainsi que l'oscillation résultant du choc initial unique, sont ici du même type. Ce sont des oscillations amorties exponentiellement, de même constante de temps et de même pseudo-période que l'oscillation du régime non perturbé.

On introduira encore, lorsque l'oscillateur ne sera plus linéaire, une oscillation $[a]$ et une oscillation $[\varphi]$. Nous verrons qu'une différence profonde entre ce dernier cas et le cas linéaire envisagé ici proviendra de ce que ces deux oscillations composantes ne seront plus du même type.

b. TRANSMISSION DES COMPOSANTES SPECTRALES DU CHOC. — Le problème résolu au paragraphe précédent (2.a) en conservant à l'impulsion sa personnalité peut être considéré sous un autre angle.

On peut utiliser le développement de Fourier de la fonction impulsive donnée et étudier isolément la transformation de chacune de ses composantes spectrales. On obtient ainsi directement le spectre de la réponse.

Le système oscillant se comporte comme un filtre. Il modifie suivant des lois caractéristiques l'amplitude et la phase de chacune des raies du spectre d'entrée et il suffit, pour déterminer le spectre de sortie, de remplacer le choc initial par un choc réduit ayant pour largeur de spectre la « bande passante » du filtre.

c. DÉTERMINATION GRAPHIQUE DU SPECTRE TRANSMIS, EMPLOI DU DIAGRAMME DE NYQUIST. — L'étude algébrique sera complétée par une méthode graphique utilisant le diagramme de Nyquist de l'oscillateur linéaire.

Supposons le diagramme tracé sur le plan complexe. Chaque point $m(\nu)$ de cette courbe, image à un paramètre du nombre complexe $H(\nu)$ caractéristique du système, est lié à une fréquence ν (le paramètre en question). La courbe complète est obtenue en balayant toute la gamme des fréquences.

Le choc étant développé en série de Fourier sur un intervalle de répétition O, T , nous aurons à déterminer graphiquement les « réponses » correspondant à chacune des raies spectrales de ce choc.

On utilisera pour cela une construction simple qui permet d'obtenir rapidement l'amplitude et la phase de l'oscillation forcée qui s'établit

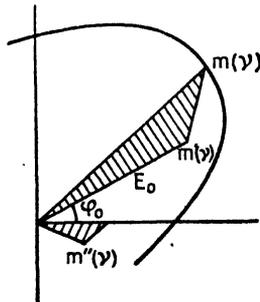


FIG. 37.

lorsque le système oscillant est excité par une action extérieure de fréquence ν donnée (fig. 37)

$$E = E_0 \sin(2\pi\nu t + \varphi_0).$$

Nous indiquerons ci-dessous les étapes de la construction dont la justification est simple (appendice VI).

1° On fera correspondre à l'action extérieure un point du plan complexe, pour cela :

a. On remplacera la loi sinusoïdale donnée par une loi exponentielle complexe

$$E^* = E_0 e^{j\tau_0} e^{j2\pi \nu t}.$$

b. On marquera sur le plan du diagramme l'image $m'(\nu)$ du nombre complexe

$$E_0 e^{j\tau_0} = z(\nu).$$

2° On construira le point $m''(\nu)$, image du rapport complexe

$$\frac{z(\nu)}{H(\nu)} \quad [z(\nu), \text{ affixe de } m'(\nu); H(\nu), \text{ affixe de } m(\nu)].$$

L'amplitude et la phase cherchées sont respectivement la longueur du rayon vecteur et l'angle polaire du point $m''(\nu)$.

Lorsque l'action extérieure n'est plus sinusoïdale, il suffit d'appliquer à chacun des termes de son développement de Fourier la méthode graphique précédente.

La construction devient particulièrement simple lorsque l'action extérieure est une impulsion donnée à l'origine des temps. Nous avons vu, en effet, que l'amplitude et la phase de tous les termes de Fourier sont alors indépendants de la fréquence

$$G(t) = q\Delta\nu \sum_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi\nu_n t.$$

Par suite, les points du plan complexe qui représentent ces divers harmoniques, correspondant au même rayon vecteur et au même angle polaire, sont confondus.

En résumé, la méthode consiste à transformer le diagramme de Nyquist point par point par une opération simple, et le spectre de l'oscillation du système est représenté graphiquement par la courbe transformée.

Bien entendu, il faut superposer à la réponse ainsi trouvée, comme dans la méthode algébrique précédente, l'oscillation libre qu'aurait le système en l'absence de choc.

La méthode graphique peut être adaptée au cas où le système oscillant n'est plus régi par une loi linéaire. Il suffit de remplacer le diagramme de Nyquist précédent par le diagramme mobile dont nous avons indiqué la définition et les principales propriétés dans les chapitres I et II.

d. « RÉPONSE PAIRE » ET « RÉPONSE IMPAIRE ». — Nous utiliserons maintenant la décomposition du choc en une « impulsion paire » et une « impulsion impaire ».

L'équation qui représente l'effet du choc sur le système peut être écrite, pour l'exemple simple envisagé, sous la forme

$$(7) \quad LC \frac{d^2V}{dt^2} + rC \frac{dV}{dt} + V = G(t - t_j),$$

$G(t - t_j)$ représentant la fonction impulsive donnée au temps t_j .

Les composantes paire et impaire de cette impulsion sont, en choisissant pour fréquence privilégiée la fréquence $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ de l'oscillation libre du circuit

$$\begin{aligned} G_1(t - t_j) &= X(t - t_j) \cos 2\pi\nu_0 t, \\ G_2(t - t_j) &= Y(t - t_j) \sin 2\pi\nu_0 t. \end{aligned}$$

La réponse du système à l'impulsion $G(t - t_j)$ sera obtenue, puisque le système est linéaire, en superposant les effets produits séparément par $G_1(t - t_j)$ et $G_2(t - t_j)$.

L'équation (7) devra donc être remplacée par l'ensemble des deux équations

$$(8) \quad LC \frac{d^2V_1}{dt^2} + rC \frac{dV_1}{dt} + V_1 = G_1(t - t_j),$$

$$(9) \quad LC \frac{d^2V_2}{dt^2} + rC \frac{dV_2}{dt} + V_2 = G_2(t - t_j).$$

On vérifie aisément (appendice VII) que V_1 et V_2 sont, comme $G_1(t - t_j)$ et $G_2(t - t_j)$, deux oscillations en quadrature (des types sin et cos) dont les amplitudes sont des fonctions $\xi(t - t_j)$ et $\eta(t - t_j)$ lentement variables.

Il est important de noter, d'ailleurs, qu'à l'impulsion paire $G_1(t - t_j)$ correspond une solution impaire V_1 de l'équation (8), de la forme

$$V_1 = \xi(t - t_j) \sin 2\pi\nu_0 t,$$

tandis qu'à l'impulsion impaire $G_2(t - t_j)$ correspond une solution paire V_2 , de l'équation (9), de la forme

$$V_2 = \eta(t - t_j) \cos 2\pi\nu_0 t.$$

Il est, par suite, plus logique d'intervertir les indices 1 et 2 :

L'indice 1 et la lettre ξ seront réservés à une oscillation paire, et l'indice 2 et la lettre η à une oscillation impaire.

Nous réécrivons donc les équations (8) et (9) sous la forme

$$(10) \quad LC \frac{d^2 V_2}{dt^2} + rC \frac{dV_2}{dt} + V_2 = G_1(t - t_j),$$

$$(11) \quad LC \frac{d^2 V_1}{dt^2} + rC \frac{dV_1}{dt} + V_1 = G_2(t - t_j),$$

avec

$$V_1 = \xi(t - t_j) \cos 2\pi\nu_0 t, \quad V_2 = \eta(t - t_j) \sin 2\pi\nu_0 t.$$

L'oscillation complète du système après le choc sera obtenue, comme plus haut, en superposant à l'oscillation $V_1 + V_2$ ainsi déterminée, l'oscillation libre qu'aurait le système en l'absence d'impulsion.

Nous concluerons cette première partie, réservée à l'étude de la fonction impulsive originelle et de la « réponse » d'un système linéaire à une impulsion, par une remarque utile pour la suite.

Nous avons été amené à introduire, par deux procédés différents une décomposition de l'impulsion initiale en deux impulsions composantes dont l'effet couplé est équivalent.

Nous avons été conduits d'abord à définir une « impulsion paire » $G_1(t - t_j)$ et une « impulsion impaire » $G_2(t - t_j)$.

L'action d'un choc sur un système linéaire nous a conduit, de même, à une « impulsion [a] » et à une « impulsion [φ] » (infligées au système aux temps $t_{j1} = kT_0$ et $t_{j2} = \frac{T_0}{4} + kT_0$, les plus voisins de t_j , T_0 étant la période du signal théorique).

Il est facile de se rendre compte que l'impulsion paire $G_1(t - t_j)$ peut être remplacée, au second ordre près, par

$$G_1(t - t_j) = X(t - t_{j1}) \cos 2\pi\nu_0 t.$$

De même, l'impulsion impaire $G_2(t - t_j)$ peut être remplacée par

$$G_2(t - t_j) = Y(t - t_{j2}) \sin 2\pi\nu_0 t.$$

Dans ces conditions, l'impulsion paire $G_1(t - t_{j1})$ et l'impulsion

[*a*] appliquée au temps t_{j1} sont identiques, ainsi que l'impulsion impaire $G_2(t - t_{j2})$ et l'impulsion [φ] appliquée au temps t_{j2} , à cela près que les impulsions paire et impaire sont des impulsions [*a*] et [φ] réduites.

Les réponses V_1 et V_2 se confondent alors avec les oscillations [φ] et [*a*] représentées sur la figure 36.

B. — PROPRIÉTÉS STATISTIQUES DU BRUIT BLANC

a. DÉFINITION DE LA FONCTION DE BRUIT BLANC. — Les principales caractéristiques d'une fonction de bruit blanc $E(t)$ sont les suivantes :

1° La fonction $E(t)$ ne présente aucune périodicité.

2° Connaissant la valeur $E(t_1)$ de la fonction à un instant t_1 , il est impossible de prédire la valeur $E(t_2)$ que prendra la fonction à un autre instant t_2 .

$E(t_1)$ et $E(t_2)$ sont deux valeurs de la fonction sans relation entre elles. Elles sont dites « parfaitement non corrélées ».

3° $E(t)$ a autant de chances de prendre une valeur positive donnée que la valeur opposée. Il s'ensuit que sa « moyenne dans le temps » définie par l'expression

$$\overline{E(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt.$$

est nulle.

Dans certains cas on pourra se passer de cette troisième hypothèse et admettre que la moyenne $\overline{E(t)}$ a une valeur non nulle. Les propriétés 1°, 2°, 3°, resteront alors valables pour la fluctuation $E(t) - \overline{E(t)}$ de $E(t)$.

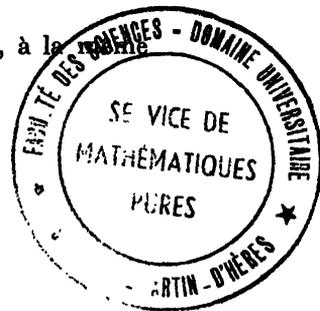
4° La fonction $E(t)$ est stationnaire.

b. CARACTÈRE STATIONNAIRE DE LA FONCTION DE BRUIT. — S'il est impossible de prédire la valeur que prendra la fonction $E(t)$ à un instant futur, on peut du moins évaluer la probabilité pour qu'elle ait, à cet instant, une valeur E_n avec une plage d'erreur dE_n .

Soit $P(E_n)dE_n$ cette probabilité. $P(E_n)$ dépend évidemment de E_n , on l'appelle « loi de distribution » ou « densité de probabilité ».

On aura à envisager souvent aussi « la valeur moyenne » de $E(t)$; rappelons ce qu'on entend par là :

Supposons que nous déterminions $E(t)$ tous les jours, à la



époque, cette grandeur prendra en p jours consécutifs les valeurs $E_1, E_2, E_3, \dots, E_p$.

Sa valeur moyenne ou « *espérance mathématique* » est la limite de

$$M_s(E_p) = \frac{E_1 + E_2 + \dots + E_p}{p} \quad \text{quand } p \rightarrow \infty.$$

On peut aussi suivre de façon continue les variations au cours du temps de $E(t)$ pendant une durée T aussi longue que possible, la « *moyenne temporelle* » est alors définie comme la limite de

$$M_T(E(t)) = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt \quad \text{quand } T \rightarrow \infty.$$

Les deux définitions sont généralement distinctes.

Tandis que la moyenne temporelle ne renferme plus la variable t , l'espérance mathématique d'une variable aléatoire peut, au contraire, dépendre de l'époque à laquelle sont effectuées les mesures.

Dans le cas d'un bruit blanc, les qualités statistiques de la variable sont indépendantes de l'instant où on les envisage. L'espérance mathématique est alors indépendante du temps, et l'on montre qu'elle se confond avec la moyenne temporelle [cette moyenne sera notée $\overline{E(t)}$].

Les grandeurs aléatoires présentant cette propriété sont appelées « *variables aléatoires stationnaires* » et les deux définitions de la moyenne se confondent dans ce cas.

On vérifie facilement que la moyenne d'une variable aléatoire stationnaire, de la forme $f(E)$, est liée à la loi de distribution $P(E)$ par la relation

$$\overline{f(E)} = \int_0^\infty f(E) P(E) dE.$$

Nous rencontrerons par la suite les expressions suivantes :

$\overline{E(t)}$, moyenne de $E(t)$;

$\overline{E^2(t)}$, carré moyen de $E(t)$;

$\overline{E(t) - \overline{E(t)}}$, écart à la moyenne ou fluctuation de $E(t)$;

$[\overline{E(t) - \overline{E(t)}}]^2$, carré moyen de la fluctuation de $E(t)$.

c. FONCTION DE CORRÉLATION DE $E(t)$. — Il peut arriver que l'on soit conduit à modifier l'hypothèse 2^o et que les valeurs $E(t_1)$ et $E(t_2)$

correspondant à deux instants voisins ne soient pas *absolument indépendantes*. Dans ce cas, on est amené à préciser l'intervalle limite au delà duquel cesse, en moyenne, la corrélation de $E(t_1)$ et $E(t_2)$. Cet intervalle est appelé « intervalle de corrélation λ_0 ».

Cela revient à dire que $E(t) E(t + \lambda)$ est, en moyenne, différent de zéro tant que λ est inférieur à λ_0 , et identiquement nul lorsque λ est supérieur à l'intervalle de corrélation λ .

On introduit ainsi la fonction

$$\overline{\psi(\lambda)} = \overline{E(t) E(t + \lambda)},$$

appelée « fonction de corrélation de $E(t)$ ».

d. DÉVELOPPEMENT DE FOURIER DE LA FONCTION DE BRUIT. — Soit T l'intervalle d'étude de la fonction de bruit, un jour par exemple, la même observation répétée le jour suivant conduira certainement à un graphique d'évolution différent. On ne modifie cependant nullement les propriétés de la fonction en imaginant que l'observation effectuée les jours suivants redonnera un graphique d'évolution parfaitement identique. Cette hypothèse a l'avantage de faire apparaître un intervalle de répétition T . Elle permet donc la décomposition de la fonction de bruit en série de fonctions trigonométriques.

Donnons quelques formes utiles du développement de la fonction de bruit blanc sur l'intervalle de répétition T .

1° Somme de fonctions trigonométriques réelles à fréquences positives :

$$E(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{T} \cos(2\pi\nu_n t - \varphi_n) \quad \left(\nu_n = \frac{n}{T}\right).$$

2° La même série où l'on a développé les fonctions trigonométriques en sommes de sin et de cos :

$$E(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{T} \cos 2\pi\nu_n t + \frac{B_n}{T} \sin 2\pi\nu_n t,$$

avec

$$\nu_n = \frac{n}{T}, \quad a_n = C_n \cos \varphi_n, \quad B_n = C_n \sin \varphi_n.$$

3° Somme de fonctions trigonométriques réelles à fréquences positives ou négatives :

$$E(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{C_n}{T} \cos(2\pi\nu_n t - \varphi_n).$$

4° Somme d'exponentielles complexes à fréquences positives ou négatives :

$$E(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{C_n}{T} e^{i(2\pi\nu_n t - \varphi_n)}.$$

Les coefficients doivent être déterminés pour chaque intervalle d'étude particulier : toutes les fois qu'on enregistre l'évolution de la fonction sur un intervalle particulier T , on obtient en effet un lot de valeurs C_n et φ_n , ou A_n et B_n différent. C_n et φ_n , ainsi que A_n et B_n sont des couples de coefficients aléatoires, qui vérifient

$$\overline{A_n} = \overline{B_n} = 0, \quad \overline{A_n^2} = \overline{B_n^2} = \frac{\overline{C_n^2}}{2}.$$

Les composantes de Fourier des fonctions de bruit blanc sont uniformément réparties sur toute la gamme des fréquences. Cependant les systèmes sur lesquels elles agissent apportent généralement une sélection des fréquences qui limite considérablement la bande de fréquences utile.

e. PUISSANCE DE BRUIT. — Supposons que la fonction de bruit soit une force électromotrice $E(t)$ (exprimée en volts), et que nous l'appliquions aux extrémités d'une résistance de 1Ω . Elle y dépenserait pendant l'intervalle de temps dt l'énergie $E^2(t)dt$ joules, ou la puissance $E^2(t)$ watts. Il sera commode d'assimiler toujours de cette façon le carré de la fonction de bruit à une puissance instantanée, que nous appellerons *puissance réduite instantanée*.

La *puissance efficace* de la fonction de bruit est alors par définition la moyenne temporelle de $E^2(t)$ prise sur la durée T d'observation. Comme nous l'avons vu, cette moyenne temporelle se confond ici avec l'espérance mathématique de $E^2(t)$.

Si $E(t)$ à une valeur moyenne non nulle $\overline{E(t)}$, une partie de la puissance réduite moyenne est due à $\overline{E(t)}$. Une autre partie provient des variations irrégulières de $E(t)$ autour de cette valeur moyenne.

Mettons, en effet, en évidence la moyenne $\overline{E(t)}$ et la partie variable de $E(t)$,

$$E(t) = \overline{E(t)} + [E(t) - \overline{E(t)}].$$

La puissance réduite moyenne a pour valeur

$$\overline{E^2(t)} = (\overline{E(t)})^2 + 2\overline{E(t)}[\overline{E(t) - \overline{E(t)}}] + \overline{[E(t) - \overline{E(t)}]^2}$$

ou, plus simplement, puisqu'on a $\overline{E(t) - \overline{E(t)}} = 0$,

$$\overline{E^2(t)} = (\overline{E(t)})^2 + \overline{[E(t) - \overline{E(t)}]^2}.$$

$\overline{(\overline{E(t)})^2}$ est la puissance réduite dépensée par la partie constante $\overline{E(t)}$. $\overline{[E(t) - \overline{E(t)}]^2}$, carré moyen de la fluctuation de $E(t)$ représente la puissance dépensée par la partie variable de la fonction $E(t)$.

f. DÉCOMPOSITION DE LA FONCTION DE BRUIT EN UN TERME PAIR ET UN TERME IMPAIR. — Dans tous les cas où le bruit se superpose à un signal sinusoïdal

$$S = a_0 \sin 2\pi\nu_0 t,$$

il est particulièrement commode de décomposer la fonction de bruit en deux composantes, dont l'une est une sinusoïde d'amplitude variable en phase avec le signal, et l'autre, de même, une sinusoïde d'amplitude variable, mais en quadrature avec le signal.

On y parvient en remarquant que chaque terme de Fourier de la décomposition classique

$$\frac{C_n}{T} \cos (2\pi\nu_n t - \varphi_n)$$

peut être mis sous la forme

$$\frac{C_n}{T} \cos [2\pi (\nu_n - \nu_0) t - \varphi_n] \cos 2\pi\nu_0 t - \frac{C_n}{T} \sin [2\pi(\nu_n - \nu_0)t - \varphi_n] \sin 2\pi\nu_0 t.$$

Il ne reste plus qu'à faire la somme des termes en $\cos 2\pi\nu_0 t$ d'une part et, d'autre part, des termes en $\sin 2\pi\nu_0 t$, y compris le signal.

On voit que la sinusoïde en phase avec le signal a une amplitude qui varie suivant la loi

$$Y(t) = - \sum_n \frac{C_n}{T} \sin [2\pi(\nu_n - \nu_0)t - \varphi_n].$$

La sinusoïde en quadrature a une amplitude qui obéit de même

à la loi.

$$X(t) = \sum_n \frac{C_n}{T} \cos [2\pi (v_n - v_0)t - \varphi_n],$$

et l'amplitude du signal entaché de bruit est de la forme

$$R(t) = \sqrt{X(t)^2 + [Y(t) + a_0]^2}.$$

g. RELATION ENTRE LES PROPRIÉTÉS STATISTIQUES ET LES PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES. — Une fonction de bruit blanc peut toujours être considérée comme la somme de fonctions impulsives élémentaires, réparties de façon aléatoire. Cette fonction a donc une « structure grenue », et l'on peut relier ses propriétés à celles des motifs originels. Il serait long d'établir les relations existant entre les propriétés élémentaires et les propriétés statistiques, aussi nous contenterons-nous d'indiquer les plus importantes :

Théorèmes de Campbell. — Soit T l'intervalle de répétition de la fonction de bruit et K le nombre moyen de motifs élémentaires $F(t - t_j)$ (qu'on peut supposer identiques et répartis au hasard sans restreindre la généralité des raisonnements) de 0 à T . La valeur moyenne de la fonction est égale à K fois la moyenne d'un motif, soit

$$\overline{E(t)} = K \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt.$$

La puissance dépensée par la partie fluctuante $E(t) - \overline{E(t)}$ est donnée d'autre part par la formule

$$\overline{[E(t) - \overline{E(t)}]^2} = K \frac{1}{T} \int_0^T F^2(t) dt.$$

Fonction de corrélation de la fonction de bruit. — Lorsque la fonction de bruit a une moyenne nulle, on démontre aisément que la fonction de corrélation moyenne s'obtient en multipliant par K celle d'un motif élémentaire, on a

$$\overline{\psi(\lambda)} = K \frac{1}{T} \int_0^T F(t)F(t + \lambda) dt.$$

Lorsque la fonction de bruit a une moyenne non nulle, il suffit d'ajouter le carré de sa moyenne à la fonction de corrélation moyenne ci-dessus.

Ces deux derniers théorèmes supposent évidemment qu'on peut définir la fonction de corrélation d'un motif élémentaire, ce qui ne serait pas le cas s'il s'agissait de fonctions impulsives parfaites. Il

s'agit cependant le plus souvent d'impulsions filtrées pour lesquelles on sait définir la fonction de corrélation.

Composantes paire et impaire. — On établit aussi que les composantes paire et impaire de la fonction de bruit s'obtiennent en sommant les composantes paire et impaire des motifs élémentaires.

II. — Effet du bruit blanc sur le régime des auto-oscillateurs non linéaires.

Nous adopterons encore pour exemple l'équation de Van der Pol, et nous exprimerons l'effet d'une action extérieure aléatoire en ajoutant au second membre une fonction de bruit blanc $E(t)$.

Une application radioélectrique est fournie par la figure 38, dans

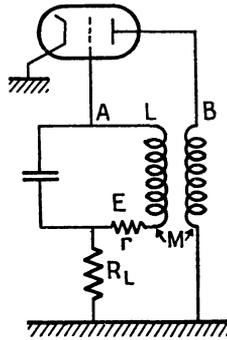


FIG. 38.

lequel la source de bruit blanc est la résistance r du circuit oscillant. On peut montrer que le bruit dû à la lampe d'entretien est négligeable, et se ramener à notre exemple type.

Soit donc à étudier l'équation

$$(12) \quad LC \frac{d^2V}{dt^2} + (Ms + rC + 3MbV^2) \frac{dV}{dt} + V = E(t).$$

Nous déterminerons d'abord la perturbation apportée au régime stabilisé théorique par une impulsion élémentaire. Ensuite les impulsions seront supposées très nombreuses et réparties de façon aléatoire.

A. — INFLUENCE D'UNE IMPULSION ÉLÉMENTAIRE

1. Étude directe de l'excitation par un choc. — PHASE D'AMORÇAGE, APPROXIMATION LINÉAIRE. — Dans la phase d'amor-

çage des oscillations, l'équation (12) peut être remplacée par l'équation linéaire

$$(13) \quad LC \frac{d^2V}{dt^2} + (Ms + rC) \frac{dV}{dt} + V = E(t).$$

Le terme résistant $Ms + rC$ étant négatif par hypothèse, l'oscillation, en l'absence d'impulsion perturbatrice, a une amplitude qui croît exponentiellement avec le temps. La constante de temps de l'exponentielle est

$$\tau = \frac{-2LC}{Ms + rC}.$$

Cette oscillation libre est donc de la forme

$$V(t) = a_0 e^{\frac{t}{\tau}} \sin \omega_0 t.$$

Nous exprimerons l'effet d'une impulsion isolée en remplaçant la fonction du second membre de l'équation (13) par la fonction impulsive $G(t - t_j)$, à l'instant t_j . Les modifications d'amplitude Δa et de phase $\Delta \varphi$ qu'elle produit, à cet instant, sont encore obtenues en exprimant la discontinuité de $\frac{dV}{dt}$, V restant inchangé.

On trouve toujours, au premier ordre

$$\Delta a = q\omega_0 \cos \omega_0 t_j, \quad a\Delta\varphi_0 = -q\omega_0 \sin \omega_0 t_j,$$

a , amplitude d'oscillation juste avant le choc; q échelon de $G(t - t_j)$.

La fréquence n'est pas affectée puisqu'elle est déterminée uniquement par des données géométriques.

Ces modifications instantanées d'amplitude et de phase, Δa , et $\Delta \varphi$, et leur évolution ultérieure, résultent encore de l'addition, à l'oscillation libre, d'une oscillation de perturbation $\nu(t)$:

L'oscillation libre et son terme de perturbation $\nu(t)$ sont respectivement une solution de l'équation (13) sans second membre, et la solution forcée avec second membre.

On détermine facilement cette dernière, dont l'amplitude croît exponentiellement suivant la même loi que celle de $V(t)$, à partir de la valeur initiale $q\omega_0$,

$$\nu(t) = q\omega_0 e^{\frac{t-t_j}{\tau}} \sin \omega_0(t - t_j), \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{-2LC}{Ms + rC}.$$

Les deux oscillations sont représentées sur la figure 39 qu'on comparera avec la figure 35 du paragraphe 2 a, remarque 2.

Si nous décomposons l'impulsion donnée $G(t - t_j)$ en son « compo-

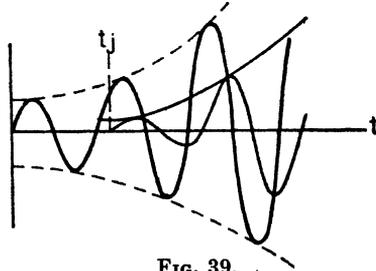


FIG. 39.

sant $[a]$ » et son « composant $[\varphi]$ », nous devons aussi décomposer l'oscillation forcée élémentaire $v(t)$ précédente en une « oscillation élémentaire en phase » (ou en opposition de phase) et une « oscillation en quadrature » représentées sur la figure 40.

Les deux oscillations composantes, ainsi que l'oscillation résultante

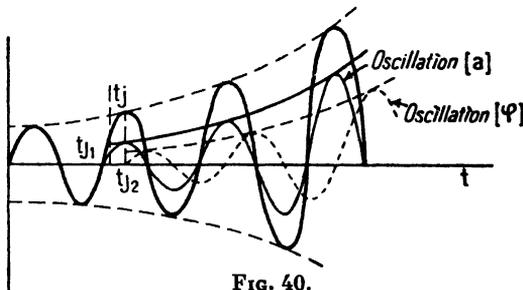


FIG. 40.

$v(t)$ sont encore du même type. Ce sont des oscillations à croissance exponentielle, de même constante de temps et de même pseudo-période que l'oscillation libre.

Ce caractère est propre à tous les oscillateurs linéaires, amortis ou autoentretenus : les oscillations de réponse, en phase (ou en opposition de phase) et en quadrature, sont de même type.

LA PERTURBATION DU RÉGIME LIMITE. — Lorsque l'amplitude est stabilisée en l'absence de bruit, l'oscillation est sensiblement sinusoïdale. Comme dans le cas linéaire ci-dessus, une impulsion

produit une petite modification de cette amplitude, en même temps qu'un petit déphasage.

Une différence importante se présente avec le cas du paragraphe précédent lorsqu'on suit l'évolution ultérieure des deux perturbations, d'amplitude et de phase. Nous allons voir, en effet, que les lois qui les régissent ne sont plus identiques.

De plus, il faut tenir compte de la variation de fréquence avec l'amplitude. Une impulsion qui altère l'amplitude altère corrélativement la fréquence.

En résumé, les trois effets d'une impulsion sont :

1° *Un déphasage*, qu'on peut représenter par une petite translation de la sinusoïde des temps parallèlement à l'axe des temps Ot :

2° *Une variation d'amplitude*, représentée par une petite dilatation de cette sinusoïde perpendiculairement à Ot .

3° *Une variation de fréquence*, représentée par une dilatation de la sinusoïde parallèlement à Ot .

La perturbation du régime sera donc connue lorsqu'on aura déterminé, d'une part ces trois modifications fondamentales à l'instant t , du choc, d'autre part leurs lois d'évolution après le choc.

Nous envisagerons d'abord les variations d'amplitude et de phase, et ensuite la variation de fréquence.

EFFET DE L'IMPULSION DONNÉE ET DE SES COMPOSANTS $[a]$ ET $[\varphi]$.
— Représentons l'oscillation libre stabilisée par la sinusoïde

$$V = a \sin \omega_0 t.$$

Il est facile de voir que les variations d'amplitude et de phase, Δa et $\Delta \varphi$, apportées à ce régime par une impulsion, sont encore données par

$$\Delta a = q \omega_0 \cos \omega_0 t_j, \quad \Delta \varphi = -\frac{q \omega_0}{a} \cos \omega_0 t_j$$

au premier ordre.

La variation d'amplitude produite au temps t_j tend ensuite exponentiellement vers zéro.

Le déphasage, au contraire, reste constant puisque sa présence revient à changer, dans l'équation d'oscillation, l'origine des temps arbitrairement choisie.

Si l'on décompose l'impulsion en ses composants $[a]$ et $[\varphi]$, on

voit que l'impulsion $[a]$ ne produit aucun déphasage mais simplement une modification instantanée de l'amplitude, de valeur

$$\Delta a = q\omega_0 \cos \omega_0 t_j.$$

Cette perturbation décroîtra ensuite exponentiellement avec le temps, le système tendant à nouveau vers le régime stable. L'impulsion $[\varphi]$ a pour seul effet un déphasage de valeur

$$\Delta \varphi = -\frac{q\omega_0}{a} \sin \omega_0 t_j.$$

Ce déphasage, invariable ensuite au cours du temps, décale rigidement la sinusoïde parallèlement à Ot .

Il est facile de traduire ces résultats sous une forme analogue à celle que nous avons adoptée dans le cas linéaire de l'amorçage :

L'oscillation du système, après le choc appliqué à l'instant t_j , est obtenue en superposant à l'oscillation libre limite :

— une sinusoïde amortie, en phase avec elle, représentant l'effet de l'impulsion $[a]$ (sa constante de temps sera déterminée plus loin);

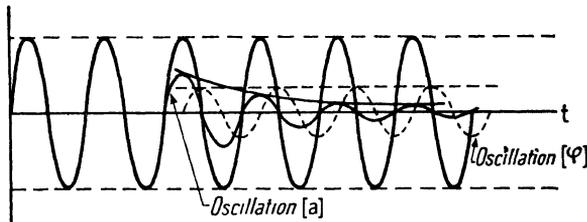


FIG. 41.

— une sinusoïde, en quadrature avec l'oscillation libre limite, représentant l'effet de l'impulsion $[\varphi]$.

Elles sont représentées toutes deux sur la figure 41 qu'on comparera aux figures 36 et 40.

Les oscillations en phase et en quadrature ne sont plus identiques. La non-linéarité a introduit une dissymétrie.

Si nous suivons l'évolution continue de l'oscillateur, dans son passage de l'amorçage à la stabilisation, nous voyons que l'oscillation en phase, dont l'amplitude allait en croissant dans la phase transitoire, est étouffée dès que le régime stable est atteint.

L'oscillation en quadrature, au contraire, se stabilise en amplitude en même temps que le régime (*fig. 42*).

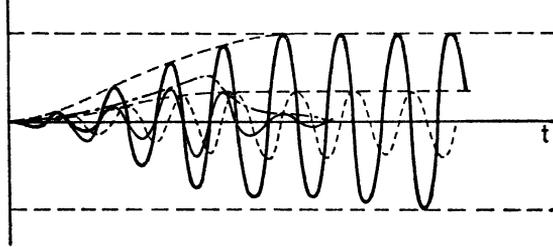


FIG. 42.

2. Oscillation paire et oscillation impaire. — Nous allons retrouver les conclusions du paragraphe précédent en décomposant l'impulsion donnée en une « impulsion paire » et une « impulsion impaire ».

Nous n'examinerons plus la phase d'établissement du régime, qui nous a servi à suivre le passage continu d'un état quasi linéaire à l'état non linéaire limite, et nous supposerons ce régime stabilisé limite atteint lorsque l'impulsion est appliquée.

L'équation générale des oscillations avec bruit ayant été mise sous la forme

$$LC \frac{d^2V}{dt^2} + (Ms + rC + 3MbV^2) \frac{dV}{dt} + V = E(t),$$

nous remplacerons d'abord, comme plus haut, la fonction du second membre par la fonction impulsive $G(t - t_j)$ à l'instant t_j .

Nous décomposerons ensuite $G(t - t_j)$ en sa partie paire $G_1(t - t_j)$ et sa partie impaire $G_2(t - t_j)$.

On emploiera une décomposition analogue pour caractériser l'effet du choc.

Cet effet a été réduit à l'addition au régime limite d'un terme de perturbation $\nu(t)$ donné par l'équation

$$LC \frac{d^2V}{dt^2} + [Ms + rC + 3MbV^2] \frac{dV}{dt} + \left[1 + 6MbV_s \frac{dV_s}{dt} \right] \nu = G(t - t_j)$$

(V_s , régime stabilisé limite).

On décomposera maintenant $\nu(t)$ en sa partie paire et sa partie impaire. On posera donc

$$\nu(t) = \nu_1 + \nu_2 = \xi(t) \cos \omega_0 t + \eta(t) \sin \omega_0 t.$$

Dans ces conditions, l'équation précédente est équivalente (si l'on ne tient pas compte des termes de pulsation $2\omega_0, 3\omega_0, \dots$), à

$$(14) \quad \begin{aligned} \nu_2'' + 4\varepsilon\omega_0 [1 + \beta V_s(\nu_1 + \nu_2)]\nu_2' + [\omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\beta V_s'(\nu_1 + \nu_2)]\nu_2 \\ + \nu_1'' + 4\varepsilon\omega_0 [\beta V_s(\nu_1 + \nu_2)]\nu_1' + [\omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\beta V_s'(\nu_1 + \nu_2)]\nu_1 \\ = \omega_0^2 G_1(t - t_j) + \omega_0^2 G_2(t - t_j), \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$(15) \quad 2\varepsilon\omega_0 = -\frac{Ms + rC}{LC}, \quad \beta = -\frac{3Mb}{Ms + rC}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Cette équation se sépare en deux équations distinctes

$$(16) \quad \begin{cases} \nu_2'' + 4\varepsilon\omega_0\nu_2' + \omega_0^2\nu_2 = \omega_0^2 G_1(t - t_j) & (\text{équation aux amplitudes}), \\ \nu_1'' + \omega_0^2\nu_1 = \omega_0^2 G_2(t - t_j) & (\text{équation aux phases}). \end{cases}$$

On remarque alors que l'équation qui donne $\nu_1(t)$ ne comporte pas de terme d'amortissement : c'est que l'oscillateur garde indéfiniment la mémoire de la partie $G_2(t - t_j)$ du choc. $G_1(t - t_j)$ a, au contraire, un effet qui disparaît suivant une loi exponentielle de constante de temps

$$\tau = \frac{1}{2\varepsilon\omega_0} = -\frac{LC}{Ms + rC}.$$

3. La perturbation du régime limite et le diagramme mobile.

— Reportons-nous au diagramme mobile de l'oscillateur considéré. Lorsque le régime limite est atteint, il passe par l'origine O, et subit un petit déplacement à partir de cet état sous l'effet d'une impulsion. L'oscillateur, perturbé à l'instant t_j , revient ensuite exponentiellement au régime limite, supposé stable, tandis que le diagramme reprend sa position initiale.

Le « point de fonctionnement » de l'oscillateur perturbé ne coïncide évidemment plus avec l'origine O. Nous avons montré que la trajectoire qu'il décrit pendant le retour au régime est un petit segment de droite passant par O, trajectoire de l'oscillateur orthogonale au diagramme mobile.

Sous l'effet d'une succession de chocs répartis de façon aléatoire, le point de fonctionnement fluctue sur le segment AB (fig. 43).

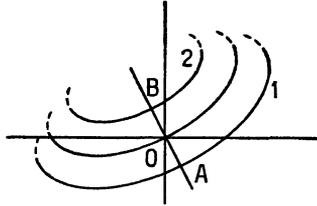


FIG. 43.

La position du segment AB par rapport à la portion d'équipulsion passant par O, assimilable aussi au voisinage de O à un petit segment de droite, renseigne sur la « dérive » de fréquence, c'est-à-dire sur la fluctuation de fréquence entraînée par la fluctuation d'amplitude.

Sa position par rapport à l'équiamplitude passant par O renseigne sur la fluctuation d'amplitude de l'oscillateur.

On pourrait aussi traduire l'évolution de l'oscillateur en utilisant les « diagrammes mobiles des perturbations » (chap. II), on mettrait alors en évidence séparément les fluctuations d'amplitude et de phase.

B. — EFFET D'UNE FONCTION DE BRUIT BLANC SUR LE RÉGIME LIMITE.

Nous supposons que les impulsions qui constituent le bruit blanc sont réparties de façon très dense et parfaitement aléatoire. Leur effet sur le régime limite de l'oscillateur sera obtenu en les remplaçant par deux suites distinctes :

Une succession d'impulsions paires, d'échelons aléatoires, régulièrement répartis aux points d'élongation nulle, débuts de cycles de l'oscillation sinusoïdale qui représente le régime limite.

D'autre part, une succession d'impulsions impaires, d'échelons aléatoires, régulièrement répartis aux points d'élongation maximum du régime limite.

Ainsi les fluctuations d'amplitude sont dues uniquement aux impulsions paires, tandis que les impulsions impaires produisent exclusivement des fluctuations de phase.

Aux fluctuations d'amplitude et de phase s'ajoutent d'ailleurs,

comme nous l'avons vu, des fluctuations de fréquence. Ces dernières seront aisément reliées aux modifications d'amplitude connaissant la loi de dépendance fréquence-amplitude de l'oscillateur considéré.

1. Fluctuations de l'amplitude d'oscillation. — Nous avons vu que si une impulsion, considérée isolément, dérange l'oscillateur de son état de régime supposé stable, ce dernier tend à y revenir suivant une loi exponentielle. Nous supposons que la constante de temps τ de l'exponentielle est assez grande pour que, à chaque instant t , un très grand nombre de chocs antérieurs à t apportent une contribution notable au mouvement du système au voisinage de cet instant.

La perturbation locale produite par un choc est donc très faible à côté de la perturbation due à l'ensemble de tous les chocs antérieurs; par suite, l'amplitude varie très lentement, à de petites fluctuations locales près.

Ces deux types de fluctuations nous conduisent à préciser la définition de « l'amplitude d'oscillation instantanée » :

Il s'agira par la suite de la valeur moyenne de l'amplitude prise sur un intervalle de temps t^* , faible à côté de la durée de vie moyenne des fluctuations générales, mais très grand au contraire à côté de la durée de vie moyenne des fines fluctuations locales.

L'étude des propriétés statistiques de l'amplitude d'oscillation comprendra, d'une part la détermination du carré moyen de ses fluctuations générales, d'autre part la détermination de leur durée de vie moyenne, c'est-à-dire de leur intervalle moyen de corrélation.

CARRÉ MOYEN DES FLUCTUATIONS GÉNÉRALES D'AMPLITUDE. — Chaque impulsion sera remplacée, comme il a été dit, par l'impulsion paire correspondante, et nous déterminerons l'amplitude d'oscillation, à chaque instant, en tenant compte de toutes les impulsions paires dont l'effet s'ajoute à cet instant.

Il suffira donc, pour obtenir l'amplitude résultante, de superposer à l'oscillation libre limite, les oscillations de perturbation élémentaires produites indépendamment par ces impulsions paires.

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent A, les oscillations de perturbation élémentaires sont exponentiellement amorties, en phase ou en opposition de phase avec l'oscillation limite théorique.

Elles sont réparties de façon très dense et leurs amplitudes au départ sont évidemment aléatoires comme les impulsions qui les produisent.

On les a considérées comme la réponse aux impulsions paires d'un pendule amorti de pulsation ω , (celle de l'oscillation limite), et de constante de temps τ (celle de retour au régime limite).

Le terme de perturbation d'amplitude résultant, qui s'ajoute à l'oscillation libre limite, est donc le résultat de l'excitation de ce pendule amorti équivalent par la suite d'impulsions paires.

L'amplitude de cette oscillation de bruit (comptée algébriquement) a une valeur moyenne nulle, comme les impulsions paires.

Le carré moyen de l'amplitude du pendule amorti équivalent est obtenu simplement par l'emploi des méthodes courantes. On trouve (appendice VIII)

(17)

$$\overline{\rho^2(t)} = \frac{1}{4} n q^2 \omega^2 \tau;$$

n , nombre moyen d'impulsions élémentaires par unité de temps;

q^2 , carré moyen de l'échelon d'une impulsion élémentaire;

τ , constante de temps de retour au régime limite;

ω , pulsation du régime limite.

C'est le carré moyen des fluctuations générales d'amplitude.

INTERVALLE DE CORRÉLATION. — Définissons l'*intervalle de corrélation* des fluctuations générales d'amplitude.

Soient Δa_1 , et Δa_2 les fluctuations d'amplitude, aux instants t_1 et t_2 ; l'intervalle de corrélation λ_0 est l'intervalle limite $[t_2 - t_1]$ au delà duquel Δa_1 et Δa_2 ne sont plus corrélés.

En d'autres termes, si l'on désigne par $\overline{\psi(\lambda)}$ la fonction de corrélation moyenne des fluctuations générales d'amplitude, λ_0 est la plus petite valeur de λ au delà de laquelle $\overline{\psi(t)}$ est identiquement nulle.

Cette définition suppose *a priori* l'existence d'une telle valeur λ_0 , ce qui n'est pas toujours le cas. Il est fréquent que la fonction $\overline{\psi(\lambda)}$ tende vers zéro asymptotiquement. Dans ce cas λ_0 sera la plus petite valeur de λ au delà de laquelle $\overline{\psi(\lambda)}$ est inférieur à une valeur ε donnée, arbitrairement petite.

La limite λ_0 est liée à la structure de la loi $\Delta a(t)$.

Pour simplifier le raisonnement, supposons d'abord que la fonction

$\Delta a(t)$ soit construite à partir de fonctions élémentaires de durée bien définie.

Nous avons vu plus haut que $\overline{\psi(\lambda)}$ se déduit simplement de la fonction de corrélation moyenne $\overline{\psi(\lambda)}$ des motifs élémentaires qui constituent la fonction. On a

$$(18) \quad \overline{\psi(\lambda)} = K \overline{\Psi(\lambda)},$$

K , nombre moyen total des motifs élémentaires sur la durée d'étude T de la fonction de bruit.

Cette égalité nous montre que $\overline{\psi(\lambda)}$ et $\overline{\Psi(\lambda)}$ ont même intervalle de corrélation. Or, il est facile de voir que l'intervalle de corrélation de $\overline{\Psi(\lambda)}$ se confond avec la durée de vie moyenne des motifs élémentaires; par suite, λ_0 représente la durée de vie moyenne de ces motifs.

L'emploi de la formule (18) nous conduit à représenter la fonction $\overline{\psi(\lambda)}$ dans le cas où les motifs élémentaires n'ont plus une durée finie, mais sont, par exemple des portions d'exponentielles amorties.

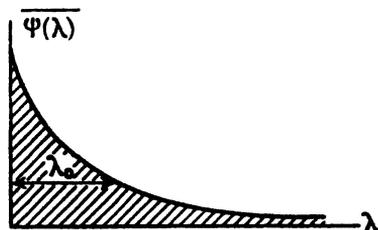


FIG. 44.

La courbe obtenue est encore une portion d'exponentielle amortie de même constante de temps que les motifs originels (fig. 44).

Dans ce cas nous choisirons, par exemple, pour intervalle de corrélation moyenne, l'intervalle $\lambda_0 = \tau$ pour lequel $\overline{\psi(\lambda_0)}$ est égale à la valeur maximum $\psi(0)$ divisée par e .

Dans l'exemple de l'équation de Van der Pol, on a donc

$$(19) \quad \lambda_0 = \tau = -\frac{1}{(Ms + rC)\omega_0^2}.$$

2. Fluctuations de la phase. — Les fluctuations de phase ont, comme les fluctuations d'amplitude, un caractère local et un caract-

tère général. Les propriétés statistiques de ce dernier seront déduites simplement de l'effet des impulsions impaires élémentaires.

Comme nous l'avons précisé plus haut, chaque impulsion impaire a pour effet d'ajouter à l'oscillation limite une oscillation forcée sinusoïdale, de faible amplitude, en quadrature avec elle. Cette oscillation forcée est apparue comme la réponse à l'impulsion d'un pendule non amorti.

L'étude de l'évolution de la phase de l'oscillation présentera donc des points communs avec celle de l'évolution de l'amplitude. Elle s'en distinguera néanmoins par le fait que le pendule équivalent a ici une mémoire infinie. Par suite, le carré moyen des fluctuations de phase, comme le carré moyen de l'amplitude de ce pendule non amorti équivalent, ira en croissant avec le temps.

Les méthodes classiques, couramment employées pour déterminer les carrés moyens de fluctuations, donnent rapidement, comme au paragraphe précédent, le carré moyen de l'amplitude du pendule non amorti équivalent au bout du temps t^* . On trouve (appendice IX)

$$(20) \quad \overline{\nu^2(t)} = \frac{1}{2} nq^2\omega_s^2 t^* ;$$

n , nombre moyen d'impulsions par unité de temps ;

q^2 , carré moyen de l'échelon d'une impulsion élémentaire ;

t^* , temps au bout duquel est calculé le carré moyen de l'amplitude du pendule non amorti équivalent ;

ω_s , pulsation de l'oscillation limite.

On en déduit immédiatement la valeur du carré moyen de la fluctuation de phase au bout du temps

$$(21) \quad \overline{\Delta\Phi^2} = \frac{\overline{\nu^2(t)}}{a_s^2} = \frac{nq^2\omega_s^2 t^*}{2a_s^2} ;$$

a_s , amplitude du régime limite.

Remarque. — On aurait pu se dispenser de faire intervenir ici la structure élémentaire de la fonction de bruit. Il aurait suffi de décomposer la fonction de bruit $E(t)$ qui figure dans l'équation

$$LC \frac{d^2V}{dt^2} + (Ms + rC + 3MbV^2) \frac{dV}{dt} + V = E(t)$$

en sa partie paire $E_1(t)$ et sa partie impaire $E_2(t)$.

Tous les calculs relatifs au cas d'une impulsion isolée restent valables et l'on aboutit, de même, aux équations distinctes

$$\begin{cases} \ddot{\nu}_2 + 4\varepsilon\omega_0\dot{\nu}_2 + \omega_0^2\nu_2 = \omega_0^2 E_1(t), \\ \ddot{\nu}_1 + \omega_0^2\nu_1 = \omega_0^2 E_2(t), \end{cases}$$

où l'on a posé

$$2\varepsilon\omega_0 = -\frac{Ms + rC}{LC}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Elles traduisent respectivement les fluctuations d'amplitude et les fluctuations de phase de l'oscillation.

ν_1 et ν_2 représentent toujours les termes de perturbation pair et impair :

$$\nu_1 = \xi(t) \cos \omega_0 t, \quad \nu_2 = \eta(t) \sin \omega_0 t$$

qui s'ajoutent à l'oscillation libre limite. Ces termes se confondent évidemment avec les oscillations des pendules équivalents, le premier amorti, le second non amorti, introduits aux paragraphes précédents.

Il est aisé de retrouver par cette méthode, la valeur du carré moyen de l'amplitude du pendule amorti équivalent, ainsi que celle du pendule non amorti.

3. Fluctuations de fréquence — L'effet de chaque impulsion sur le système a été supposé d'assez longue durée pour que l'état d'oscillation dépende à chaque instant d'un très grand nombre d'impulsions antérieures. Ainsi l'amplitude d'oscillation subit de lentes fluctuations générales et de petites perturbations locales, à la cadence des chocs, d'importance négligeable à côté des premières.

Il est donc possible d'assimiler l'oscillation entachée de bruit, sur un intervalle de temps assez long, à une portion de sinusoïde dont l'amplitude diffère de la valeur limite stabilisée a , d'une faible quantité δ_a , aux petites irrégularités locales près.

On sait que la fréquence d'un oscillateur non linéaire dépend de l'amplitude d'oscillation. Ainsi, tout écart d'amplitude avec l'amplitude limite entraîne un écart de fréquence avec la fréquence limite. Aux fluctuations d'amplitude précédemment déterminées correspondront, par suite, des fluctuations de fréquence que nous allons déterminer.

Nous avons noté antérieurement que, dans le cas de l'équation de Van der Pol, des variations infiniment petites d'amplitude à

partir de l'amplitude limite a_s , entraînent des variations de fréquence infiniment petites du second ordre, aussi choisirons-nous ici pour exemple l'équation

$$LC \frac{d^2V}{dt^2} + (Ms + rC + 3MbV^2) \frac{dV}{dt} + (1 + \mu V_s)V = 0.$$

Elle conduit à une loi de dépendance « fréquence-amplitude » de la forme

$$v^2 = \frac{1}{LC} \left(1 + \frac{3\mu}{4} a^2 \right)$$

au voisinage du régime limite.

Il s'ensuit que la variation de fréquence Δv entraînée par une variation d'amplitude Δa , à partir de l'amplitude limite, est donnée par

$$\Delta v = \frac{3\mu}{4LC} \frac{a_s}{v_s} \Delta a.$$

Cette expression nous montre que les fluctuations de fréquence sont tantôt positives, tantôt négatives, nulles en moyenne.

Connaissant le carré moyen des fluctuations d'amplitude précédemment déterminé, on en déduit le carré moyen des fluctuations de fréquence

$$\overline{(\Delta v)^2} = \frac{9}{(4LC)^2} \mu^2 \frac{a_s^2}{v_s^2} \overline{(\Delta a)^2}.$$

Les fluctuations de fréquence entraînées par les fluctuations d'amplitude représentent un grave inconvénient toutes les fois qu'on cherche à obtenir une oscillation de fréquence extrêmement bien définie. C'est le cas pour tous les oscillateurs exceptionnellement soignés, tels que les horloges radioélectriques, les maîtres oscillateurs des émetteurs de radiodiffusion, etc...

CONCLUSION

L'objet de ce travail était de rassembler un certain nombre de propriétés importantes des oscillateurs non linéaires, à un degré de liberté, en régime quasi sinusoïdal, de retrouver les conclusions classiques par des méthodes originales qui permettent de les établir rapidement et clairement, d'indiquer enfin des résultats qu'on n'obtient pas directement par les méthodes traditionnelles.

Les points les plus saillants de cette étude sont :

1° *L'extension de la notion d'opérateur aux systèmes non linéaires :*

Les méthodes classiques de Poincaré, Liapounoff, etc., décrivent l'évolution d'un oscillateur en faisant intervenir deux variables, un paramètre de position x et sa vitesse d'évolution $y = \frac{dx}{dt}$.

De cette façon, la loi qui le régit apparaît sous la forme d'un système

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

qui ne fait pas intervenir explicitement le temps si le système est « autonome », et qui s'écrit, dans le cas plus général des systèmes « non autonomes »

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, t).$$

Nous nous sommes placé ici à un tout autre point de vue, partant de l'équation différentielle du second ordre

$$f(x, x', x'') = 0$$

qu'on obtient en éliminant y du système précédent, dans le cas d'un système autonome. Nous avons associé à cette équation, comme on le fait dans le cas linéaire, un opérateur H d'où nous avons déduit toutes les propriétés de l'oscillateur ;

2° *un essai de représentation des opérateurs non linéaires dans un espace courbe, ce qui généralise la représentation classique des opérateurs linéaires dans un espace de Hilbert ;*

3° *l'extension de la méthode de Nyquist du cas linéaire, au cas des oscillateurs non linéaires :*

La théorie linéaire fait correspondre à l'opérateur linéaire H caractéristique d'un oscillateur, une fonction analytique $H(\omega)$, représentée par un diagramme sur le plan complexe. De même, les opérateurs H non linéaires nous ont conduit à une fonction analytique à deux paramètres $H(a, \omega)$ d'où nous avons déduit sur le plan complexe deux familles de courbes, selon qu'on fait varier a ou ω , l'autre grandeur restant fixe.

Ces courbes ont été appelées « courbes équi-amplitude » et « courbes équipulsation », et nous en avons déduit un certain nombre de pro-

priétés intéressantes, en particulier un critère géométrique de stabilité.

4° *l'analyse des régimes d'oscillation forcée, à la lumière de la méthode de Nyquist généralisée :*

Nous avons été conduits à définir dans le plan complexe des séparatrices qui délimitent des zones de stabilité et d'instabilité. Elles nous ont conduit à retrouver et à généraliser les théorèmes de stabilité de O. Haupt, dont on trouvera une indication dans la référence [2].

Cette analyse nous a conduit aussi à une *équation générale de stabilité*, qui permet d'étudier la stabilité des régimes d'oscillation forcée (ou synchronisée), ainsi que la stabilité des régimes d'oscillation libre ;

5° *l'analyse du comportement d'un oscillateur non linéaire sous l'effet d'une excitation aléatoire :*

A l'exception d'une étude très détaillée effectuée par I. Berstein [3] il existe assez peu de textes traitant de cette question, pourtant importante. On en trouvera une application aux horloges radioélectriques dans la référence [4].

APPENDICE I,

Comme nous l'avons vu, on déduit l'équation

$$K_1^*(a, j\omega_r) + \frac{a}{2} H_1(j\omega_r) = 0$$

(l'indice r signifiera qu'il s'agit de valeurs réelles données à ω) de l'équation

$$(1) \quad H_1(a \cos \omega_r t + \varepsilon) + H_2(a \cos \omega_r t) = 0.$$

A ce stade du calcul, on laisse subsister seulement les termes en $\sin \omega_r t$ et en $\cos \omega_r t$ dans le développement du premier membre, et l'on élimine provisoirement les termes harmoniques. On obtient ainsi une expression de la forme

$$H_1(a \cos \omega_r t) + H_2(a \cos \omega_r t) \equiv \varphi(a, \omega_r, \sin \omega_r t, \cos \omega_r t),$$

où φ représente encore une fonctionnelle, qui est linéaire par rapport aux \sin et aux \cos , puisque des puissances de la forme $\sin^n \omega_r t$ ou $\cos^n \omega_r t$

sont systématiquement réduites à leurs termes fondamentaux. (L'expression est évidemment non linéaire par rapport à l'amplitude a .)

Supposons que a et ω_r soient lentement variables, c'est-à-dire que nous nous intéressions à un régime transitoire de la forme

$$V = a(t) \cos [\omega_r(t) \cdot t]$$

Le raisonnement subsiste et nous conduit à une expression différentielle

$$\varphi[a(t), \omega_r(t), \sin \omega_r t, \cos \omega_r t]$$

toujours *linéaire par rapport à* $\sin \omega_r t$ et $\cos \omega_r t$. On peut la mettre aussi sous la forme

$$H[a, \omega_r] V,$$

où $H[a, \omega_r]$ est un opérateur différentiel, renfermant les paramètres $\omega_r(t)$ et $a(t)$, qui agit sur V .

Ainsi, à l'approximation fondamentale, l'équation (1) se réduit à

$$(2) \quad H(a, \omega_r) V = 0,$$

équation non linéaire.

Si nous remplaçons a par a_t , valeur de l'amplitude d'oscillation au temps t , et ω_r par ω_t , pulsation réelle au temps t , nous obtenons

$$H[a_t, \omega_t] V = 0$$

qui est l'équation linéaire tangente : équation linéaire qui se confond avec l'équation (2) pour $a = a_t$ et $\omega_r = \omega_t$.

Si maintenant partant de cette équation linéaire tangente, nous remplaçons les lignes trigonométriques réelles par des exponentielles complexes, nous obtenons l'équation

$$K_1^*[a_t, \omega_t, j\omega] + \frac{a_t}{2} H_1(j\omega) = 0.$$

Supposons que l'opérateur linéaire tangent soit fonction seulement de a_t , dans ce cas le premier membre de l'équation ci-dessus se réduit à la fonction analytique.

$$K_1^*(a_t, j\omega) + \frac{a_t}{2} H_1(j\omega) = 0.$$

Nous nous sommes placés dans ce cas, fréquent en pratique.

Pour $a_t \neq a$, la solution ω est complexe, de la forme $\omega_0 + j\omega_r$,

ce qui traduit le fait que l'oscillation linéaire tangente croît exponentiellement, suivant une constante de temps ainsi calculable, tant que le régime stabilisé n'est pas atteint.

Nous illustrerons ce raisonnement par son application à l'équation de Van der Pol.

Nous cherchons un régime oscillant pseudo-sinusoidal, de la forme

$$V = a(t) \sin \omega t.$$

L'équation d'oscillation dans laquelle nous avons porté cette expression peut être écrite

$$\left[L_1 C_1 \frac{d^2}{dt^2} + (Ms + r_1 C_1) \frac{d}{dt} + 1 \right] a(t) \sin \omega t + Mb \frac{d}{dt} a^3(t) \sin^3 \omega t = 0.$$

Tenant compte de

$$\sin^3 \omega t = \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3 \omega t.$$

et conservant seulement le fondamental $\frac{3}{4} \sin \omega t$, on obtient

$$\left[L_1 C_1 \frac{d^2}{dt^2} + (Ms + r_1 C_1) \frac{d}{dt} + 1 \right] a(t) \sin \omega t + \frac{3Mb}{4} \frac{d}{dt} a^3(t) \sin \omega t = 0$$

ou

$$\left[L_1 C_1 \frac{d^2}{dt^2} + (Ms + r_1 C_1) \frac{d}{dt} + 1 + \frac{3Mb}{4} \left(\frac{d}{dt} a^2 \right) + \frac{3Mb}{4} a^2 \frac{d}{dt} \right] V = 0.$$

Si l'on remplace a par a_t , on obtient l'équation linéaire tangente, à partir de laquelle l'étude peut être poursuivie par la méthode des exponentielles complexes

$$\left[L_1 C_1 \frac{d^2}{dt^2} + (Ms + r_1 C_1) \frac{d}{dt} + 1 + \frac{3Mb}{4} \left(\frac{d}{dt} a^2 \right)_{a=a_t} + \frac{3Mb}{4} a_t^2 \frac{d}{dt} \right] V = 0.$$

Remarquons qu'en général le terme $\left[\frac{d}{dt} (a^2) \right]_{a=a_t}$ n'est pas connu, mais qu'il peut être négligé au voisinage de la stabilisation.

Dans le cas où l'opérateur linéaire tangent est fonction à la fois de a_t et ω_r , on peut remplacer ω_r par une valeur de première approximation et se ramener ainsi au cas d'une fonction analytique. L'analyticité de la fonction déduite de l'opérateur linéaire tangent ne pose donc pratiquement aucun problème.

APPENDICE II.

Le changement de signe de C à la traversée de la courbe limite est une conséquence de l'étude développée dans le paragraphe intitulé : *Forme générale de la méthode du diagramme mobile.*

Les solutions en a_t de l'équation $|H(a_t, j\omega_0)|^2 a_t^2 = F^2$, qui localise les points d'intersection de l'équipulsation (ω_0) et du cercle de rayon F, étaient obtenues en coupant la courbe

$$h(a_t) = |H(a_t, j\omega_0)|^2 a_t^2$$

par une parallèle à l'axe des abscisses, et l'extremum de $h(a_t)$ fixait la position du point limite de contact.

Considérons une sécante infiniment voisine de la tangente à l'extremum (*fig. 25 a*). Les deux solutions a_1 et a_2 qu'on obtient correspondent aux points M_1 et M_2 du plan complexe, infiniment voisins du point limite M_0 et de part et d'autre (*fig. 25 b*).

Au point M_1 , correspondant à a_1 , on a

$$\frac{\partial h}{\partial a_t} = \frac{\partial}{\partial a_t} \{ |H(a_t, j\omega)|^2 a_t^2 \} = 2a_t, C > 0,$$

tandis qu'au point M_2 , correspondant à a_2 , on a

$$\frac{\partial h}{\partial a_t} > 0.$$

On observe donc le changement de signe de C lorsqu'on franchit la courbe limite.

APPENDICE III.

On a représenté sur la figure 45 la courbe $H(a, +\delta a, \omega \text{ réel})$ voisine de la courbe équiampitude (a_s) correspondant à la stabilisation.

Le point m de cette courbe correspondant aux valeurs

$$a_t = a_s + \delta a, \quad \omega \text{ réel} = \omega_s + \delta \omega_1$$

a pour coordonnées

$$\left(\frac{\partial U}{\partial a} \right)_{a_s} \delta a + \left(\frac{\partial U}{\partial \omega} \right)_{\omega_s} \delta \omega_1$$

et

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)_{\omega_s} \delta a + \left(\frac{\partial V}{\partial \omega}\right)_{a_s} \delta \omega_1.$$

Le vecteur t de composantes $\left(\frac{\partial U}{\partial \omega}\right)_{a_s}$ et $\left(\frac{\partial V}{\partial \omega}\right)_{a_s}$ étant tangent à la courbe (a_s) en O, nous connaissons l'angle de \mathbf{Om} et de cette courbe

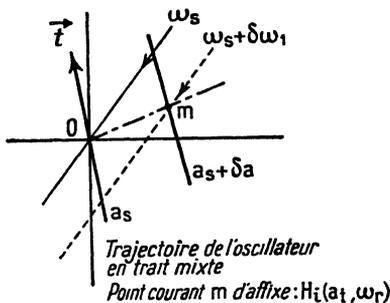


FIG. 45.

en formant le produit scalaire $t \cdot \mathbf{Om}$. Son expression est

$$t \cdot \mathbf{Om} = \left(\frac{\partial U}{\partial \omega} \frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial \omega} \frac{\partial V}{\partial a}\right)_{a_s} \delta a + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \omega}\right)^2\right]_{a_s} \delta \omega_1,$$

il est nul comme le montre l'égalité (30), et par suite, \mathbf{Om} est normal à t .

Cette propriété, démontrée pour les courbes du diagramme $H_i(a_t, \omega \text{ réel})$, est aussi valable pour les courbes $H_i(a_t, \omega \text{ réel})$ a_t comme on s'en rend compte aisément en faisant subir à ces dernières l'homothétie de centre O et de rapport a_t .

La condition pour que la pulsation de l'oscillation naturelle soit indépendante de l'amplitude est, par suite,

$$\frac{\partial U}{\partial \omega} \frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial \omega} \frac{\partial V}{\partial a} = 0,$$

elle exprime l'orthogonalité du tronçon rectiligne de courbe (ω_s) et du vecteur t . La trajectoire effective se confond alors avec la courbe équipulsation (ω_s) passant par O, au voisinage de O.

APPENDICE IV.

Les parties réelle et imaginaire pure de $H_i(a_i, \omega_r)$ (« ω réel » est désigné simplement ici par ω_r) seront mises en évidence en écrivant cette expression sous la forme

$$H_i(a_i, \omega_r) = U(a_i, \omega_r) + jV(a_i, \omega_r),$$

$U(a_i, \omega_r)$ et $V(a_i, \omega_r)$ sont des expressions réelles qui représentent les coordonnées du point m , considéré précédemment, dont l'affixe est $H_i(a_i, \omega_r)$ (fig. 45).

Nous supposons que, à l'instant où nous considérons le système, son régime est stabilisé; m est alors en O comme nous l'avons vu.

Considérons un état voisin pour lequel la stabilisation n'est pas atteinte. Le point m représentant cet état se trouve sur la portion de trajectoire effective [dans la représentation $H_i(a_i, \omega_r)$] voisine de O. L'amplitude a pour valeur $a_i = a_s + \delta a$ et la pulsation complexe est

$$\omega = \omega_s + \delta\omega_1 + j\delta\omega_2.$$

L'équation

$$H_i(a_i, \omega) = 0$$

qui relie la pulsation complexe instantanée de l'oscillation naturelle à son amplitude a_i prend la forme

$$H_i(a_s + \delta a, \omega_s + \delta\omega_1 + j\delta\omega_2) \equiv U(a_s, \omega_s) + jV(a_s, \omega_s) + \delta a \left[\frac{\partial U}{\partial a} + j \frac{\partial V}{\partial a} \right]_{\substack{a=a_s \\ \omega=\omega_s}} + (\delta\omega_1 + j\delta\omega_2) \left[\frac{\partial U}{\partial \omega} + j \frac{\partial V}{\partial \omega} \right]_{\substack{a=a_s \\ \omega=\omega_s}} = 0.$$

ou, puisque

$$U(a_s, \omega_s) = V(a_s, \omega_s) = 0$$

$$\delta a \left[\frac{\partial U}{\partial a} + j \frac{\partial V}{\partial a} \right]_{\substack{a=a_s \\ \omega=\omega_s}} + (\delta\omega_1 + j\delta\omega_2) \left[\frac{\partial U}{\partial \omega} + j \frac{\partial V}{\partial \omega} \right]_{\substack{a=a_s \\ \omega=\omega_s}} = 0.$$

En égalant à zéro les parties réelle et imaginaire pure du premier membre, on obtient

$$\delta\omega_1 = - \frac{\left[\frac{\partial U}{\partial \omega} \frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial \omega} \frac{\partial V}{\partial a} \right]_{\substack{a=a_s \\ \omega=\omega_s}}}{\left(\frac{\partial U}{\partial \omega} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \omega} \right)^2} \delta a,$$

$$\delta\omega_2 = - \frac{\left[\frac{\partial U}{\partial a} \frac{\partial V}{\partial \omega} - \frac{\partial U}{\partial \omega} \frac{\partial V}{\partial a} \right]_{\substack{a=a_s \\ \omega=\omega_s}}}{\left(\frac{\partial U}{\partial \omega} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \omega} \right)^2} \delta a.$$

Au voisinage de la stabilisation la pseudo-sinusoïde tangente est donc de la forme

$$V = a_{t_0} e^{-\delta \omega_0 (t - t_0)} e^{j(\omega_0 + \delta \omega_0)t}.$$

APPENDICE V.

L'influence d'une impulsion sur l'oscillation du système pris pour exemple (circuit de la figure 34) est traduite par l'équation

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{dV}{dt} + \omega_0^2 V = \omega_0^2 G(t - t_j)$$

avant l'instant t_j du choc, la variable V obéit à la loi pseudo-sinusoidale.

$$V = a(t) \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Si $a(t)$ est lentement variable, $\frac{da}{dt}$ est négligeable et l'on a

$$\frac{dV}{dt} \simeq a \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Exprimons que le choc produit, à l'instant t_j , une discontinuité de la vitesse $\frac{dV}{dt}$ sans modification de V , on a

$$\begin{aligned} \Delta V &= \{ \Delta a \sin(\omega_0 t + \varphi) + a \Delta \varphi \cos(\omega_0 t + \varphi) \}_{t=t_j} = 0, \\ \Delta \left(\frac{dV}{dt} \right) &= \{ \omega_0 \Delta a \cos(\omega_0 t + \varphi) - a \omega_0 \Delta \varphi \sin(\omega_0 t + \varphi) \}_{t=t_j} = q \omega_0 \end{aligned}$$

(en désignant par q l'échelon $\int G(t - t_j) dt$):

On en tire

$$\Delta a = q \omega_0 \cos(\omega_0 t_j + \varphi), \quad a \Delta \varphi = -q \omega_0 \sin(\omega_0 t_j + \varphi),$$

t_j désignant l'instant du choc.

Il peut être commode de supposer qu'on a $\varphi = 0$ avant le choc, les formules deviennent alors

$$\Delta a = q \omega_0 \cos \omega_0 t_j, \quad a \Delta \varphi = -q \omega_0 \sin \omega_0 t_j.$$

Ces expressions ne font pas intervenir l'amortissement du circuit, elles sont donc valables quand on fait tendre cet amortissement vers zéro. Elles sont aussi valables pour un circuit auto-entretenu fonctionnant en régime quasi sinusoidal.

APPENDICE VI.

L'oscillation forcée d'un système linéaire soumis à l'action extérieure

$$E = E_0 \sin (2\pi\nu t + \varphi_0)$$

est donnée par l'équation

$$H_i(\nu)V = E_0 \sin (2\pi\nu t + \varphi_0).$$

La solution cherchée est de la forme

$$V = V_0 \sin (2\pi\nu t + \psi_0).$$

Le remplacement des lignes trigonométriques réelles par des exponentielles complexes conduit à l'équation équivalente

$$H_i(\nu)V_0 e^{j\psi_0} e^{j2\pi\nu t} = E_0 e^{j\varphi_0} e^{j2\pi\nu t}$$

ou

$$H_i(\nu)V_0 e^{j\psi_0} = E_0 e^{j\varphi_0}.$$

qui exprime que $V_0 e^{j\psi_0}$ est le quotient des deux nombres complexes $E_0 e^{j\varphi_0}$ et $H_i(\nu)$.

$E_0 e^{j\varphi_0}$ ayant pour image $m'(\nu)$, et $H_i(\nu)$ ayant pour image le point $m(\nu)$ du diagramme du réseau, nous voyons que $m''(\nu)$, image de $E_0 e^{j\varphi_0}$ se déduit de m' et m par la construction bien connue.

APPENDICE VII.

$G_1(t - t_j)$ est de la forme

$$G_1(t - t_j) = \sum_n C_n \cos (\omega_n t - \varphi_n) \cos \omega_0 t,$$

avec

$$C_n = q\Delta\nu \cos 2\pi\nu_0 t_j,$$

$$\Delta\nu = \frac{1}{T}, \quad \omega_n = 2\pi \frac{n}{T}, \quad \omega_0 = \frac{n_0}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Considérons l'un des termes de cette somme :

$$C_n \cos (\omega_n t - \varphi_n) \cos \omega_0 t$$

et mettons-le sous la forme

$$\frac{C_n}{2} \{ \cos [(\omega_0 + \omega_n)t - \varphi_n] + \cos [(\omega_0 - \omega_n)t + \varphi_n] \}.$$

L'équation

$$LC \frac{d^2 V_1}{dt^2} + rC \frac{dV_1}{dt} + V_1 = G_1(t - t_j)$$

devient, lorsqu'on remplace $G_1(t - t_j)$ par le terme choisi

$$LC \frac{d^2 V_1}{dt^2} + rC \frac{dV_1}{dt} + V_1 = \frac{C_n}{2} [\cos (\omega t - \varphi_n) + \cos (\omega' t + \varphi_n)],$$

en posant

$$\omega = \omega_0 + \omega_n, \quad \omega' = \omega_0 - \omega_n.$$

On en tire, en supposant que ω_n reste petit, c'est-à-dire que le système a une faible largeur de bande (amortissement faible)

$$V_1 = \frac{\omega_0 C_n}{2\sqrt{r^2 C^2 \omega_0^2 + 4\omega_n^2}} [\cos (\omega t - \varphi_n + \psi_n) + \cos (\omega' t + \varphi_n + \psi'_n)].$$

ω et ω' étant deux valeurs symétriques par rapport à ω_0 , on peut écrire

$$\psi_n = -\frac{\pi}{2} - \varepsilon_n, \quad \psi'_n = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon_n.$$

On a alors

$$V_1 = \frac{\omega_0 C_n}{\sqrt{r^2 C^2 \omega_0^2 + 4\omega_n^2}} \left[\cos \left(\frac{\omega + \omega'}{2} t - \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(\frac{\omega - \omega'}{2} t - \varphi_n - \varepsilon_n \right) \right]$$

ou

$$V_1 = \frac{\omega_0 C_n}{\sqrt{r^2 C^2 \omega_0^2 + 4\omega_n^2}} \cos (\omega_n t - \varphi_n - \varepsilon_n) \sin \omega_0 t.$$

Il ne reste plus qu'à sommer par rapport à l'indice n pour obtenir la solution générale avec $G_1(t - t_j)$ au second membre.

Cette solution est donc

$$V_1 = \sin \omega_0 t \sum_n \frac{\omega_0 C_n}{\sqrt{r^2 C^2 \omega_0^2 + 4\omega_n^2}} \cos (\omega_n t - \varphi_n - \varepsilon_n).$$

Elle est bien de la forme cherchée.

Le raisonnement est le même lorsque c'est $G_2(t - t_j)$ qui figure au second membre.

APPENDICE VIII.

La variation d'amplitude élémentaire infligée à l'oscillation du système $a_s \sin (\omega_s t + \varphi)$, par une impulsion d'échelon q a été calculée plus haut; on a trouvé

$$\Delta a = q \omega_s \cos (\omega_s t_j + \varphi).$$

On ne restreint pas la généralité des raisonnements en supposant que les impulsions très nombreuses produites par la source de bruit sont identiques et réparties au hasard. Les variations d'amplitude qu'elles produisent sont tantôt positives, tantôt négatives, et leurs amortissements, après chaque impulsion, suivent une loi exponentielle.

La variation d'amplitude résultante

$$\sum_{ij} q \omega_s e^{-\frac{t-t_j}{\tau}} \cos (\omega_s t_j + \varphi)$$

a donc une moyenne nulle.

Si n est le nombre moyen d'impulsion par unité de temps, le nombre total moyen d'impulsions de 0 à t^* est nt^* . Le carré moyen de la fluctuation d'amplitude résultante au bout du temps est

$$\overline{V^2(t)} = nt^* q^2 \omega_s^2 e^{-2\frac{t-t_j}{\tau}} \cos^2 (\omega_s t_j + \varphi) = nt^* q^2 \omega_s^2 \frac{\tau}{4} \frac{1}{t^*} = \frac{1}{4} n q^2 \omega_s^2 \tau.$$

APPENDICE IX.

Le déphasage élémentaire infligé à l'oscillation du système, $a_s \sin (\omega_s + \varphi)$, par une impulsion d'échelon q est, de même

$$\Delta \varphi = -\frac{q \omega_s}{a_s} \sin (\omega_s t_j + \varphi).$$

Les déphasages produits par les nombreux chocs sont tantôt positifs, tantôt négatifs, nuls en moyenne.

Le nombre total moyen d'impulsions de 0 à t^* étant nt^* , le carré moyen de la fluctuation de phase résultante au bout du temps t^* est

$$\overline{\Delta \Phi^2} = nt^* \left(\frac{q \omega_s}{a_s} \right)^2 \overline{\sin^2 (\omega_s t_j + \varphi)} = \frac{1}{2} nt^* \frac{q^2 \omega_s^2}{a_s^2}.$$

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. N. MINORSKY. — *Introduction to non-linear mechanics*, J. W. Edwards, 1947, Ann. Arbor.
2. J. J. STOKER. — *Non-linear vibrations in mechanical and electrical systems*, Interscience Publishers, inc, New York.
3. I. BÉRSTEIN. — *Fuctuations d'amplitude et de phase des oscillateurs à lampes* (*Bull. Ivestia acad. Sc., U.R.S.S., série physique* t. 14, 1950, p. 187.)
4. A. BLAQUIÈRE. — *Extension de la théorie de Nyquist au cas de caractéristiques non linéaires*, (*C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 345).
Effet du bruit de fond sur la fréquence des auto-oscillateurs à lampes. Précision ultime des horloges radioélectriques. (*Ann. Radioélectr.*, t. 8, 1953, p. 36.)
Spectre de puissance d'un oscillateur non linéaire perturbé par le bruit *Ann. Radioélectr.*, t. 8, 1953, p. 153.
Les oscillateurs non linéaires et le diagramme de Nyquist. Adaptation générale de la méthode du diagramme de Nyquist dans le domaine non linéaire, (*J. Phys. Rad.*, t. 13, novembre 1952, p. 527; t. 13, décembre 1952, p. 636).
5. J. LOEB. — *Un critérium général de stabilité des servomécanismes sièges de phénomènes héréditaires* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 344).
Phénomènes héréditaires dans les servomécanismes; un criterium général de stabilité, (*Ann. Télécomm.*, t. 6, décembre 1951, p. 346).
6. B. VAN DER POL. — *On relaxation oscillations* (*Phil. Mag.*, vol. 2, novembre 1926).
Forced oscillations in a system with non-linear resistance (*Phil. Mag.*, 1927).
7. H. POINCARÉ. — *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris, vol. 1, 1892.
Sur les courbes définies par une équation différentielle (*Œuvres*, Gauthier-Villars, Paris, vol. 1, 1928).
8. K. F. THEODORCHIK. — *Systèmes autooscillants*, Moscou, 1948.
9. J. HAAG. — *Étude asymptotique des oscillations de relaxation* (*Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, t. 60, 1943, p. 35-111).
Exemples concrets d'étude asymptotique d'oscillations de relaxation, (*Ann. Ec. Norm. Sup.*, t. 61, 1944, p. 73-117).
10. Y. ROCARD. — *Théorie des oscillateurs*, éd., *Revue Scientifique*, 1941.
Dynamique générale des vibrations, Masson et C^{ie}, Paris.

11. O. HAUPT. — *Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten* (*Math. Ann.*, vol. 79, 1919, p. 278).
 12. M. RAUSCHER. — *Steady oscillations of systems with nonlinear and unsymmetrical elasticity* (*J. App. Mech.*, vol 5, 1938).
 13. N. KRYLOFF et N. BOGOLIUBOFF. — *Introduction to non-linear mechanics* (en russe), traduction en anglais par S. Lefschetz, Princeton University, Press, 1943.
 14. G. DUFFING. — *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz*, F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1918.
 15. A. A. ANDRONOW et C. E. CHAIKIN. — *Theory of oscillations*, traduction en anglais éditée par S. Lefschetz, Princeton University, Press, 1949.
 16. G. SANSONE. — *Sur l'équation de Liénard et les oscillations de relaxation* (en italien), (*Ann. di matem. pura e applicata*, vol. 28, 1949, p. 153-187). *Équations différentielles non linéaires*, Cremonese, Rome.
 17. *Proceedings of the Symposium on non linear circuit analysis*, New York, N. Y. Avr., 1953, 23, 24.
-

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
OSCILLATIONS LIBRES DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES.	
I. <i>Les systèmes à régime pseudo-Sinusoidal</i>	6
II. <i>L'amorçage des oscillations, les approximations linéaires classiques</i>	7
A. Pulsation complexe (rappel) : $\omega_1 + j\omega_2$ (ω_1 , pulsation; ω_2 amortissement algébrique)	7
1. Pulsation réelle limite	7
Fonction de transfert complexe d'un quadripôle	9
Coefficient de réaction d'un autooscillateur	9
Application à un oscillateur classique	10
2. Pulsation complexe	12
Application à l'oscillateur précédent	12
3. Graphique de Nyquist : exemple type	13
Oscillateur à déphasage	15
B. Opérateur différentiel représentatif d'un oscillateur	17
Les divers symbolismes actuellement appliqués aux systèmes linéaires	17
Méthode de Laplace	17
Méthode de Fourier	18
Méthode de la Convolution	18
Symbolisme de l'opérateur différentiel	19
Représentation dans un espace de Hilbert	21
III. <i>Oscillateurs en régime non linéaire</i>	22
A. Extension de la méthode opérationnelle	24
1. Espace transformé	24
2. Recherche de la solution sous la forme d'une série de Fourier.	26
Cas d'une forte distorsion	27
Cas d'une faible distorsion	31
B. Extension de la méthode de Nyquist	32
1. Quelques exemples types	32
1. 1. Définition du diagramme mobile	32

1. 2. Temps de réaction à une petite perturbation.....	37
1. 3. Loi fréquence-amplitude et trajectoire	39
2. Adaptation générale de la méthode du diagramme mobile..	41
Équation linéaire tangente et son diagramme mobile....	41
Courbes équiampitude et courbes équipulsation.....	42
Trajectoire de l'oscillateur	44
Loi fréquence-amplitude	44
Constantes de temps ν_1 et ν_2	45
Critère de stabilité	46
Continuité du passage des états quasi linéaires aux régimes nettement non linéaires	47
C. Méthode de perturbation, autre critère de stabilité	49
1. Exemple I : Équation de Lord Rayleigh	50
Diagramme mobile	50
Équation de perturbation.....	51
Perturbation en phase	52
Perturbation en quadrature	52
Critère de stabilité	53
Diagramme mobile des perturbations	53
2. Exemple II : Équation de Van der Pol	54
Perturbation en phase et perturbation en quadrature. Critère de stabilité	54
3. Application de la méthode de Fourier à l'équation de perturbation	55
Perturbation de phase et perturbation d'amplitude	59
Taux d'harmoniques	60

CHAPITRE II

EXCITATION SINUSOÏDALE DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES.

I. <i>Résonance non linéaire</i>	61
1. Rappel de quelques méthodes classiques	61
Systèmes sans amortissement, Méthode de Duffing.....	61
Équation de Duffing avec amortissement visqueux	65
Hystérésis des systèmes non linéaires	66
La méthode de Rauscher	67
2. Méthode du diagramme mobile	69
Utilisation des courbes équipulsation	69
Utilisation des courbes équiampitude	73
Forme générale de la méthode du diagramme mobile	74
II. <i>Synchronisation</i>	76
Liaison entre les régimes non linéaires et les régimes linéaires	78
III. <i>Stabilité des solutions libres, forcées ou synchronisées. Critère général de stabilité</i>	80
Limites de stabilité	83
Application à l'équation de Duffing	85
Application à l'équation de Van der Pol	85

CHAPITRE III

EXCITATION ALÉATOIRE DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES.

I. Propriétés élémentaires et statistiques du bruit blanc (<i>Rappel</i>).....	87
A. Propriétés élémentaires, « structure » du bruit blanc	87
1. Les impulsions originelles	87
a. Fonction impulsive	87
b. Développement de Fourier de la fonction impulsive $G(t - t_j)$	88
c. Spectre d'amplitude d'une impulsion, impulsion réduite, impulsion filtrée	89
d. Impulsion paire, impulsion impaire	91
2. La « réponse » d'un système linéaire à une impulsion	93
a. Étude directe de l'effet d'une impulsion	93
b. Transmission des composantes spectrales du choc....	96
c. Détermination graphique du spectre transmis, emploi du diagramme de Nyquist	97
d. « Réponse paire » et « réponse impaire »	99
B. Propriétés statistiques du bruit blanc	101
a. Définition de la fonction de bruit blanc	101
b. Caractère stationnaire de la fonction de bruit	101
c. Fonction de corrélation de $E(t)$	102
d. Développement de Fourier de la fonction de bruit....	103
e. Puissance de bruit	104
f. Décomposition de la fonction de bruit en un terme paire et un terme impair	105
g. Relation entre les propriétés statistiques et les pro- priétés élémentaires	106
II. Effet du bruit blanc sur le régime des autooscillateurs non linéaires....	107
A. Influence d'une impulsion élémentaire.....	107
1. Étude directe de l'excitation par un choc	107
Phase d'amorçage, approximation linéaire.....	107
La perturbation du régime limite	109
Effet de l'impulsion donnée et de ses composants $[a]$ et $[\varphi]$	110
2. Oscillation paire et oscillation impaire	112
2. La perturbation du régime limite et le diagramme mobile .	113
B. Effet d'une fonction de bruit blanc sur le régime limite	114
1. Fluctuations de l'amplitude d'oscillation	115
Carré moyen des fluctuations générales d'amplitude....	115
Intervalle de corrélation	116
2. Fluctuations de la phase	117
3. Fluctuations de fréquence.....	119
CONCLUSION	120
APPENDICES	122
INDEX BIBLIOGRAPHIQUE	132

