Statistique et analyse des données

Jérôme Allaire
Yves Lepage

Tests de l'absence de liaison entre plusieurs vecteurs aléatoires pour les distributions elliptiques

Statistique et analyse des données, tome 15, nº 3 (1990), p. 21-46.
<http://www.numdam.org/item?id=SAD_1990__15_3_21_0>

© Association pour la statistique et ses utilisations, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Statistique et analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Statistique et Analyse des Données
1990 - Vol. 15 n° 3 p. 21 - 46

TESTS DE L'ABSENCE DE LIAISON ENTRE PLUSIEURS VECTEURS ALÉATOIRES POUR LES DISTRIBUTIONS ELLIPTIQUES

Jérôme ALLAIRE et Yves LEPAGE

Département de mathématiques et de statistique,
Université de Montréal, Montréal, Québec H3C 3J7

Résumé: On considère trois mesures de liaison connues entre vecteurs aléatoires. Sous l'hypothèse nulle d'absence de liaison entre plusieurs vecteurs aléatoires, on obtient la distribution asymptotique conjointe des mesures lorsque la distribution des vecteurs appartient à la famille de lois elliptiques. On propose des tests asymptotiques pour l'hypothèse nulle et on obtient également la distribution asymptotique des statistiques des tests sous une suite d'alternatives convergeant vers l'hypothèse nulle. Finalement, on présente un exemple.

Mots clés: Mesure de liaison, corrélation vectorielle, test d'hypothèses, loi asymptotique, loi elliptique.

Indices de classification AMS 1985: 62H15, 62H20.

Abstract: Three known measures of multivariate relationship between random vectors are considered. Under the null hypothesis of lack of multivariate relationship between several random vectors, the joint asymptotic distributions of the measures are derived when the parent population is elliptical. Asymptotic tests for the null hypothesis are proposed and the asymptotic distributions of the tests statistics under a sequence of local alternatives are obtained. Finally, an example is presented.

Keywords: Measure of relationship, vector correlation, hypotheses testing, asymptotic distribution, elliptical distribution.

Manuscrit reçu le 23 avril 1990, révisé le 15 avril 1991

1. Introduction

Dans certains domaines scientifiques comme en psychologie ou en biologie, on mesure sur des individus plusieurs ensembles de variables où chaque ensemble correspond à un caractère spécifique. On s'intéresse alors aux liens pouvant exister entre ces différents caractères et on veut éprouver l'hypothèse nulle d'absence de liaison entre ces vecteurs aléatoires. Lorsque les observations sont de loi multinormale, on peut utiliser le test du rapport de vraisemblances maximales pour l'hypothèse spécifiant que la matrice de covariances est bloc diagonale (voir, par exemple, Anderson (1984)). Cependant ce test n'est pas robuste c'est-à-dire qu'il est sensible à l'hypothèse de multinormalité (voir Muirhead & Waternaux (1980)).

Dans cet article, on veut éprouver, comme l'ont fait Muirhead & Waternaux (1980), l'hypothèse nulle dans le contexte plus général où les observations proviennent d'une loi appartenant à la famille de distributions elliptiques. Cette famille de distributions généralise la loi multinormale et comprend entre autres la loi multinormale contaminée et la loi t multivariée. Elle contient également la famille de distributions sphériques. Elle nous permet de vérifier la robustesse de procédures statistiques lorsque l'hypothèse de multinormalité n'est pas respectée. On propose donc des statistiques de tests d'hypothèses basées sur trois mesures de liaison vectorielle connues. On présente à la section 2, des mesures proposées respectivement par Stewart & Love (1968), Escoufier (1973) et Cramer & Nicewander (1979) . À la section 3, on obtient sous l'hypothèse nulle la distribution asymptotique conjointe de chaque mesure entre K vecteurs aléatoires. On présente à la section 4 trois tests de l'hypothèse nulle d'absence de liaison entre plusieurs vecteurs aléatoires. On obtient la puissance de ces tests pour une suite d'alternatives convergeant vers l'hypothèse nulle à la section 5 et finalement, à la section 6, on présente un exemple.

2. Mesures de liaison entre vecteurs aléatoires

Plusieurs auteurs depuis Hotelling (1936) ont proposé des mesures de liaison entre vecteurs aléatoires. D'après Cramer & Nicewander (1979), certaines d'entre elles sont des mesures d'association ou de corrélation vectorielle puisqu'elles sont des généralisations du coefficient de corrélation entre variables aléatoires tandis que d'autres sont des mesures de redondance car elles sont basées sur la prévision d'un ensemble de variables par un autre.

2.1 Notation

Soit un vecteur aléatoire de taille p donné par

$$X = \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ \vdots \\ X^{(K)} \end{pmatrix}$$

où pour $i = 1, \ldots, K$, $X^{(i)}$ est un sous-vecteur de X de taille p_i avec $\Sigma_{i=1}^{K} \; p_i = p$. Supposons que pour i et $j = 1, \ldots, K$,

$$E(X^{(i)}) = \mu^{(i)}$$

et

$$\mathrm{Cov}(X^{(i)}, X^{(j)}) = E\{(X^{(i)} - \mu^{(i)})(X^{(j)} - \mu^{(j)})'\} = \Sigma_{ij} .$$

Posons

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu^{(1)} \\ \vdots \\ \mu^{(K)} \end{pmatrix} \text{ et } \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \cdots & \Sigma_{1K} \\ \vdots & & \vdots \\ \Sigma_{K1} & \cdots & \Sigma_{KK} \end{pmatrix}$$

où Σ est définie positive. Considérons un échantillon aléatoire $X_1, \ldots, X_n$ prélevé sur X où

$$X_\alpha = \begin{pmatrix} X_\alpha^{(1)} \\ \vdots \\ X_\alpha^{(K)} \end{pmatrix}$$

pour $\alpha = 1, \ldots, n$. Les estimateurs habituels sans biais pour μ et Σ sont

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{X}^{(1)} \\ \vdots \\ \overline{X}^{(K)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1K} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{K1} & \cdots & S_{KK} \end{pmatrix}$$

où, pour i et $j = 1, \ldots, K$,

$$\overline{X}^{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha^{(i)}$$

et

$$S_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=1}^{n} (X_\alpha^{(i)} - \overline{X}^{(i)})(X_\alpha^{(j)} - \overline{X}^{(j)})'.$$

2.2 La mesure de Stewart & Love

La mesure présentée par Stewart & Love (1968) est définie, pour i et $j = 1, \ldots, K$, $i \neq j$, par

$$RV_{ij}^{(1)} = \frac{tr(S_{ij} S_{jj}^{-1} S_{ji})}{tr(S_{ii})}$$

où $tr(\cdot)$ est l'opérateur trace. C'est une mesure de redondance car elle est basée sur la prévision de $X^{(i)}$ par $X^{(j)}$. Elle n'est pas symétrique ni invariante sous des transformations linéaires des variables. On peut également écrire $RV_{ij}^{(1)}$ comme une moyenne des carrés des coefficients de corrélation multiple entre le vecteur $X^{(j)}$ et les composantes de $X^{(i)}$, pondérée par les variances de ces dernières (voir Lazraq & Cléroux (1988)). La mesure analogue au niveau de la population est

$$\rho V_{ij}^{(1)} = \frac{tr(\Sigma_{ij} \Sigma_{jj}^{-1} \Sigma_{ji})}{tr(\Sigma_{ii})}.$$

On peut écrire (voir Muirhead (1982))

$$\mathrm{tr}(\Sigma_{ij}\,\Sigma_{jj}^{-1}\,\Sigma_{ji}) = (\mathrm{vec}(\Sigma_{ji}))'\,(I_{p_i} \otimes \Sigma_{jj}^{-1})\ \mathrm{vec}(\Sigma_{ji})$$

où $\mathrm{vec}(\Sigma_{ji})$ est le vecteur $p_i p_j \times 1$ formé en empilant les colonnes de Σ_{ji} les unes sous les autres (voir Muirhead (1982)) et $\otimes$ désigne le produit de Kronecker ou produit direct à droite de deux matrices défini par

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1q}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1}B & \cdots & a_{pq}B \end{pmatrix}$$

où $A = (a_{ij})$ est une matrice de dimension $p \times q$, B de dimension $r \times s$ et la matrice $A \otimes B$ est de dimension $pr \times qs$. Puisque pour $i = 1, \ldots, K$, Σ_{ii} est définie positive et qu'une matrice résultant du produit de Kronecker de matrices définies positives est définie positive, $\rho V_{ij}^{(1)} = 0$ si et seulement si $\Sigma_{ij} = 0$.

2.3 La mesure d'Escoufier

Une autre mesure introduite par Escoufier (1973) est basée sur la notion de distance entre des matrices de données. Posons, pour $i = 1, \ldots, K$,

$$Y_i = ((X_1^{(i)} - \overline{X}^{(i)}) \cdots (X_n^{(i)} - \overline{X}^{(i)})). \qquad (2.1)$$

Sachant que pour toute matrice carrée E, $\|E\| = \sqrt{\mathrm{tr}(E'E)}$ est une norme, la distance induite entre les matrices Y_i et Y_j est, pour i et $j = 1, \ldots, K$, $i \neq j$,

$$\mathrm{dist}(Y_i, Y_j) = \left\| \frac{Y_i' Y_i}{\sqrt{\mathrm{tr}(Y_i' Y_i)^2}} - \frac{Y_j' Y_j}{\sqrt{\mathrm{tr}(Y_j' Y_j)^2}} \right\|.$$

Escoufier (1973) montre que pour i et $j = 1, \ldots, K$,

$$\mathrm{dist}(Y_i, Y_j) = \sqrt{2}\,\sqrt{1 - RV_{ij}^{(2)}}$$

où

$$RV_{ij}^{(2)} = \frac{tr(S_{ij}\, S_{ji})}{\sqrt{tr(S_{ii}^2)\, tr(S_{jj}^2)}}$$

et on voit que $dist(Y_i, Y_j) = 0$ si et seulement si $RV_{ij}^{(2)} = 1$. Au niveau de la population on pose pour i et $j = 1, \ldots, K$,

$$\rho V_{ij}^{(2)} = \frac{tr(\Sigma_{ij}\, \Sigma_{ji})}{\sqrt{tr(\Sigma_{ii}^2)\, tr(\Sigma_{jj}^2)}}$$

et Escoufier (1973) montre qu'en définissant des opérateurs associés aux vecteurs $X^{(i)}$ et $X^{(j)}$, $\rho V_{ij}^{(2)}$ s'écrit comme un produit scalaire divisé par les normes de ces opérateurs. C'est une mesure d'association ou de corrélation vectorielle, symétrique mais pas invariante sous des transformations linéaires. On voit que $\rho V_{ij}^{(2)} = 0$ si et seulement si $\Sigma_{ij} = 0$. Robert & Escoufier (1976) l'ont utilisé pour unifier différentes méthodes d'analyse multivariée.

2.4 La mesure de Cramer & Nicewander

Considérons la mesure de Stewart & Love (1968) entre $X^{(i)}$ et $X^{(j)}$ donnée par

$$RV_{ij}^{(1)} = \frac{tr(S_{ij}\, S_{jj}^{-1}\, S_{ji})}{tr(S_{ii})} .$$

Transformons le vecteur $X^{(i)}$ de façon à ce que ses composantes ne soient plus corrélées et aient une variance égale à un. Posons pour i fixé,

$$X^{(i)*} = T\, S_{ii}^{-1/2}\, X^{(i)}$$

où T est une matrice orthogonale. La matrice Y_i définie en (2.1) devient

$$Y_i^* = T\, S_{ii}^{-1/2}\, Y_i.$$

Puisque pour i et $j = 1, \ldots, K$, $Y_i Y_j' = (n-1)S_{ij}$, la mesure de liaison $RV_{ij}^{(1)}$ entre $X^{(i)*}$ et $X^{(j)}$ devient

$$\frac{\operatorname{tr}\left(\frac{Y_i^* Y_j'}{n-1} S_{jj}^{-1} \frac{Y_j Y_i^{*'}}{n-1}\right)}{\operatorname{tr}\left(\frac{Y_i^* Y_i^{*'}}{n-1}\right)} = \frac{\operatorname{tr}\left(T\, S_{ii}^{-1/2} \frac{Y_i Y_j'}{n-1} S_{jj}^{-1} \frac{Y_j Y_i'}{n-1} S_{ii}^{-1/2}\, T'\right)}{\operatorname{tr}\left(T\, S_{ii}^{-1/2} \frac{Y_i Y_i'}{n-1} S_{ii}^{-1/2}\, T'\right)}$$

$$= \frac{\operatorname{tr}(S_{ii}^{-1} S_{ij} S_{jj}^{-1} S_{ji})}{p_i} = RV_{ij}^{(3)}.$$

Cette mesure de corrélation vectorielle proposée par Cramer & Nicewander (1979) est invariante sous des transformations linéaires de plein rang et symétrique si on suppose $p_i \leq p_j$. Son numérateur fut introduit par Pillai (1954, 1955) pour tester l'indépendance des vecteurs $X^{(i)}$ et $X^{(j)}$ sous l'hypothèse de multinormalité. On note par

$$\rho V_{ij}^{(3)} = \frac{\operatorname{tr}(\Sigma_{ii}^{-1} \Sigma_{ij} \Sigma_{jj}^{-1} \Sigma_{ji})}{p_i}$$

la mesure analogue au niveau de la population. On peut écrire

$$\operatorname{tr}(\Sigma_{ii}^{-1} \Sigma_{ij} \Sigma_{jj}^{-1} \Sigma_{ji}) = (\operatorname{vec}(\Sigma_{ji}))' (\Sigma_{ii}^{-1} \otimes \Sigma_{jj}^{-1}) (\operatorname{vec}(\Sigma_{ji}))$$

et puisque $(\Sigma_{ii}^{-1} \otimes \Sigma_{jj}^{-1}) = (\Sigma_{ii} \otimes \Sigma_{jj})^{-1}$ est définie positive, $\rho V_{ij}^{(3)} = 0$ si et seulement si $\Sigma_{ij} = 0$.

2.5 Propriétés des mesures

Les mesures de liaison vectorielle présentées dans cette section possèdent les propriétés suivantes:

i) $0 \leq RV_{ij}^{(h)} \leq 1$ pour $h = 1, 2, 3$.

ii) $RV_{ij}^{(h)} = RV_{ji}^{(h)}$ pour $h = 2, 3$.

iii) Lorsque $p_i = p_j = 1$, $RV_{ij}^{(h)}$ devient le carré du coefficient de corrélation simple entre les variables $X^{(i)}$ et $X^{(j)}$ pour $h = 1, 2, 3$.

iv) Lorsque $p_i = 1$, $RV_{ij}^{(h)}$ devient le carré du coefficient de corrélation multiple entre la variable $X^{(i)}$ et le vecteur $X^{(j)}$ pour $h = 1$ et 3.

v) $RV_{ij}^{(1)}$ et $RV_{ij}^{(3)}$ sont fonctions des corrélations canoniques entre $X^{(i)}$ et $X^{(j)}$ (voir Cramer & Nicewander (1979)).

vi) $RV_{ij}^{(3)}$ est invariante sous des transformations linéaires de plein rang des $X^{(i)}$ et $X^{(j)}$. $RV_{ij}^{(1)}$ et $RV_{ij}^{(2)}$ sont invariantes sous des transformations orthogonales des $X^{(i)}$ et $X^{(j)}$.

vii) On a $RV_{ij}^{(2)} \leq \sqrt{p_i}\, RV_{ij}^{(1)}$ (voir Lazraq & Cléroux (1988)).

3. Distributions asymptotiques conjointes des $RV_{ij}^{(h)}$, $1 \leq i < j \leq K$ lorsque $\rho V_{ij}^{(h)} = 0$ pour $h = 1, 2, 3$

Supposons que la distribution de X appartient à la famille de distributions elliptiques $E_p(\mu, V, \kappa)$ avec un vecteur de moyennes μ, une matrice de covariances $\Sigma = \alpha V$ où α est une constante positive et un coefficient d'aplatissement κ (voir Muirhead (1982)). Cette famille de distributions comprend les lois multinormale, multinormale contaminée et la loi t multivariée. Lorsque $V = I_p$, cette classe de distributions se réduit à la famille de distributions sphériques.

On veut tester l'hypothèse nulle d'absence de liaison entre les sous-vecteurs de X. Posons

$$H_0 : \Sigma_{ij} = 0, \ 1 \leq i < j \leq K . \tag{3.1}$$

On note que cette hypothèse est équivalente aux hypothèses données par $\rho V_{ij}^{(h)} = 0$, $1 \leq i < j \leq K$ pour $h = 1, 2, 3$. Pour construire des tests nous allons d'abord déterminer la distribution asymptotique conjointe des mesures $RV_{ij}^{(h)}$, $1 \leq i < j \leq K$ pour $h = 1, 2, 3$ sous H_0. Dans le même contexte de distribution elliptique Lazraq & Cléroux (1989) ont calculé la distribution asymptotique conjointe de diverses mesures de liaison vectorielle incluant $RV_{ij}^{(1)}$ et $RV_{ij}^{(2)}$ sous l'hypothèse que les mesures correspondantes au niveau de la population sont strictement comprises entre 0 et 1 soit lorsque $0 < RV_{ij}^{(h)} < 1$, $1 \le i < j \le K$ pour $h = 1, 2$. Comme les mesures de liaison sont des fonctions de la matrice de covariances échantillonnales, on utilise le lemme suivant que l'on trouve dans Muirhead (1982).

Lemme 3.1 Soit S la matrice de covariances échantillonnales formée à partir d'un échantillon de taille n de loi elliptique avec matrice de covariances Σ et coefficient d'aplatissement κ, alors

$$\sqrt{n}\,(\,\mathrm{vec}(S) - \mathrm{vec}(\Sigma)) \xrightarrow{\mathcal{L}} N_{p^2}(0, \Lambda)$$

où

$$\Lambda = (1 + \kappa)\,(I_{p^2} + K_{pp})\,(\Sigma \otimes \Sigma) + \kappa\,\mathrm{vec}(\Sigma)\,(\mathrm{vec}(\Sigma))' , \tag{3.2}$$

$\xrightarrow{\mathcal{L}}$ signifie la convergence en loi lorsque n tend vers l'infini et la matrice K_{rs} de dimension $rs \times rs$ est définie par

$$K_{rs} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} (\Delta_{ij} \otimes \Delta_{ij}')$$

où Δ_{ij} est une matrice de dimension $r \times s$ avec tous ses éléments égaux à 0 sauf l'élément (i, j) qui est égal à 1. À partir de ce lemme, on obtient le résultat suivant.

Lemme 3.2 Sous les conditions du lemme 3.1 on a

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{vec}(S_{21}) \\ \vdots \\ \mathrm{vec}(S_{K\,K-1}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathrm{vec}(\Sigma_{21}) \\ \vdots \\ \mathrm{vec}(\Sigma_{K\,K-1}) \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N_f(0, \Omega)$$

où

$$f = \sum\sum_{1 \le i < j \le K} p_i\, p_j = \frac{1}{2}\left(p^2 - \sum_{i=1}^{K} p_i^2\right), \tag{3.3}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{21}^{21} & \cdots & \Omega_{21}^{K\,K-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Omega_{K\,K-1}^{21} & \cdots & \Omega_{K\,K-1}^{K\,K-1} \end{pmatrix}$$

et pour $1 \le i < j \le K$, $1 \le k < l \le K$,

$$\Omega_{ji}^{lk} = (1 + \kappa)\,((\Sigma_{ik} \otimes \Sigma_{jl}) + K_{p_ip_j}(\Sigma_{jk} \otimes \Sigma_{il})) + \kappa\, \mathrm{vec}(\Sigma_{ji})\,(\mathrm{vec}(\Sigma_{lk}))' \tag{3.4}$$

où $K_{p_ip_j}$ est défini au lemme 3.1.

Démonstration: Soit A la matrice $f \times p^2$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} A_{12} \\ \vdots \\ A_{K-1\,K} \end{pmatrix}$$

où $A_{ij} = A_i \otimes A_j$ pour $1 \le i < j \le K$ et pour $i = 1, \ldots, K$, $A_i = (0 \ldots I_{p_i} \ldots 0)$ est la matrice $p_i \times p$ dont toutes ses sous-matrices de dimension $p_i \times p_j$ sont nulles sauf la i^e qui est égale à l'identité. On a pour $1 \le i < j \le K$,

$$\begin{aligned} A_{ij}\,\mathrm{vec}(S) &= (A_i \otimes A_j)\,\mathrm{vec}(S) \\ &= \mathrm{vec}(A_j\, S\, A_i') \\ &= \mathrm{vec}(S_{ji}). \end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$A\,\mathrm{vec}(S) = \begin{pmatrix} \mathrm{vec}(S_{21}) \\ \vdots \\ \mathrm{vec}(S_{K\,K-1}) \end{pmatrix}$$

et par le lemme 3.1 on a

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{vec}(S_{21}) \\ \vdots \\ \mathrm{vec}(S_{K\,K-1}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathrm{vec}(\Sigma_{21}) \\ \vdots \\ \mathrm{vec}(\Sigma_{K\,K-1}) \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N_f(0\,,\, A\,\Lambda\, A')$$

où

$$A \Lambda A' = \begin{pmatrix} A_{12} \Lambda A_{12}' & \cdots & A_{12} \Lambda A_{K\,K-1}' \\ \vdots & & \vdots \\ A_{K\,K-1} \Lambda A_{12}' & \cdots & A_{K-1\,K} \Lambda A_{K-1\,K}' \end{pmatrix}$$

et Λ est donné par (3.2). On n'a qu'à montrer que $A_{ij} \Lambda A_{kl}' = \Omega_{ji}^{1k}$ pour $1 \le i < j \le K$ et $1 \le k < 1 \le K$. D'abord, on a

$$\begin{aligned} A_{ij}(1+\kappa)(\Sigma \otimes \Sigma) A_{kl}' &= (1+\kappa)(A_i \otimes A_j)(\Sigma \otimes \Sigma)(A_k' \otimes A_1') \\ &= (1+\kappa)(A_i \Sigma A_k') \otimes (A_j \Sigma A_1') \\ &= (1+\kappa)(\Sigma_{ik} \otimes \Sigma_{jl}) \end{aligned}$$

et ensuite

$$\begin{aligned} A_{ij}(1+\kappa) K_{pp}(\Sigma \otimes \Sigma) A_{kl}' &= (1+\kappa)\{(A_i \otimes A_j) K_{pp}\}(\Sigma \otimes \Sigma)(A_k' \otimes A_1') \\ &= (1+\kappa)\{K_{p_ip_j}(A_j \otimes A_i)\}(\Sigma \otimes \Sigma)(A_k' \otimes A_1') \end{aligned}$$

car $(B \otimes C) K_{rs} = K_{pq} (C \otimes B)$ où B et C sont des matrices de dimensions respectives $p \times r$ et $q \times s$ (voir Graybill (1983)). Cette dernière expression devient donc

$$(1+\kappa) K_{p_ip_j}(A_j \Sigma A_k') \otimes (A_i \Sigma A_1') = (1+\kappa) \; K_{p_ip_j}(\Sigma_{jk} \otimes \Sigma_{i1}).$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} A_{ij}\, \kappa \operatorname{vec}(\Sigma) (\operatorname{vec}(\Sigma))' A_{kl}' &= \kappa\, ((A_i \otimes A_j) \operatorname{vec}(\Sigma))\, ((A_k \otimes A_1) \operatorname{vec}(\Sigma))' \\ &= \kappa\, (\operatorname{vec}(A_j \Sigma \; A_i'))\, (\operatorname{vec}(A_1 \Sigma A_k'))' \\ &= \kappa \operatorname{vec}(\Sigma_{ji})\, (\operatorname{vec}(\Sigma_{1k}))' \end{aligned}$$

et on obtient le résultat en additionnant les trois termes. □

Lorsque l'hypothèse H_0 est vraie, il découle du lemme 3.2 le résultat suivant.

Corollaire 3.3. Sous l'hypothèse H_0 donnée par (3.1) les sous-vecteurs $\sqrt{n}\,\mathrm{vec}(S_{ji})$ pour $1 \le i < j \le K$ sont asymptotiquement indépendants et de loi $N_{p_i p_j}(0, (1 + \kappa)(\Sigma_{ii} \otimes \Sigma_{jj}))$.

Démonstration: On voit que pour $(i, j) \neq (k, l)$ les trois termes de l'expression (3.4) sont nuls sous H_0 alors $\Omega_{ji}^{lk} = 0$ d'où l'indépendance asymptotique. D'autre part, en posant $(i, j) = (k, l)$ dans (3.4) et puisque $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ji}' = 0$, on obtient la matrice de covariances asymptotiques de $\sqrt{n}\,\mathrm{vec}(S_{ji})$. □

Pour conclure la section, on démontre le théorème suivant. Sans perte de généralité, on pose $p_1 \le \ldots \le p_K$ afin que la mesure $RV_{ij}^{(3)}$ soit bien définie pour $1 \le i < j \le K$.

Théorème 3.4 Sous les conditions du lemme 3.1 et sous l'hypothèse nulle $H_0 : \Sigma_{ij} = 0$, $1 \le i < j \le K$, on a pour h fixé , $h \in \{1, 2, 3\}$,

$$n\begin{pmatrix} RV_{12}^{(h)} \\ \vdots \\ RV_{K-1\,K}^{(h)} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} Y_{12}^{(h)} \\ \vdots \\ Y_{K-1\,K}^{(h)} \end{pmatrix}$$

où les $K(K-1)/2$ variables aléatoires $Y_{ij}^{(h)}$, $1 \le i < j \le K$ sont indépendantes et distribuées comme

i) $\dfrac{(1 + \kappa)}{\mathrm{tr}(\Sigma_{ii})} \displaystyle\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{l=1}^{p_j} \lambda_k^{(i)}\, W_{ijkl}^2$ pour $h = 1$,

ii) $\dfrac{(1 + \kappa)}{\sqrt{\mathrm{tr}(\Sigma_{ii}^2)\,\mathrm{tr}(\Sigma_{jj}^2)}} \displaystyle\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{l=1}^{p_j} \lambda_k^{(i)}\lambda_l^{(j)}\, W_{ijkl}^2$ pour $h = 2$,

iii) $\dfrac{(1 + \kappa)}{p_i}\, \chi^2_{p_i p_j}$ pour $h = 3$

où $\lambda_1^{(i)}, \ldots, \lambda_{p_i}^{(i)}$ sont les valeurs propres de Σ_{ii}, $i = 1, \ldots, K$ et les variables aléatoires W_{ijkl}^2 sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $N(0,1)$.

Démonstration: i) Considérons d'abord pour $1 \leq i < j \leq K$,

$$RV_{ij}^{(1)} = \frac{tr(S_{ij}\, S_{jj}^{-1}\, S_{ji})}{tr(S_{ii})} \quad .$$

D'une part, on sait par le corollaire 3.3 que

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} vec(S_{21}) \\ \vdots \\ vec(S_{K\,K-1}) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} Z_{12} \\ \vdots \\ Z_{K\,K-1} \end{pmatrix}$$

où les vecteurs aléatoires Z_{ij} sont indépendants et de loi $N_{p_ip_j}(0, (1+\kappa)(\Sigma_{ii} \otimes \Sigma_{jj}))$, pour $1 \leq i < j \leq K$. On a également

$$\begin{pmatrix} vec(S_{11}) \\ \vdots \\ vec(S_{KK}) \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} vec(\Sigma_{11}) \\ \vdots \\ vec(\Sigma_{KK}) \end{pmatrix}$$

alors par le théorème 4.4 de Billingsley (1968), on a

$$\begin{pmatrix} \sqrt{n}\, vec(S_{21}) \\ \vdots \\ \sqrt{n}\, vec(S_{K\,K-1}) \\ vec(S_{11}) \\ \vdots \\ vec(S_{KK}) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} Z_{12} \\ \vdots \\ Z_{K-1\,K} \\ vec(\Sigma_{11}) \\ \vdots \\ vec(\Sigma_{KK}) \end{pmatrix} . \tag{3.5}$$

D'autre part on peut écrire, pour $1 \leq i < j \leq K$,

$$n\ tr(S_{ij}\, S_{jj}^{-1}\, S_{ji}) = (\sqrt{n}\ vec(S_{ji}))'\,(I_{p_i} \otimes S_{jj}^{-1})\,(\sqrt{n}\, vec(S_{ji}))$$

et comme les mesures $RV_{ij}^{(1)}$, pour $1 \leq i < j \leq K$, sont des fonctions continues en tous leurs arguments on a

$$n\begin{pmatrix} RV_{12}^{(1)} \\ \vdots \\ RV_{K-1\,K}^{(1)} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} Z_{12}'(I_{p_1} \otimes \Sigma_{22}^{-1})Z_{12} / tr(\Sigma_{11}) \\ \vdots \\ Z_{K-1\,K}'(I_{p_{K-1}} \otimes \Sigma_{KK}^{-1})Z_{K-1\,K} / tr(\Sigma_{K-1\,K-1}) \end{pmatrix}.$$

Alors comme les vecteurs aléatoires Z_{ij}, $1 \le i < j \le K$, sont indépendants, les formes quadratiques

$$Y_{ij}^{(1)} = Z_{ij}' (I_{p_i} \otimes \Sigma_{jj}^{-1}) Z_{ij} / tr(\Sigma_{ii})$$

sont indépendantes pour $1 \le i < j \le K$ et distribuées comme (voir Johnson & Kotz (1970))

$$\frac{1}{tr(\Sigma_{ii})} \sum_{k=1}^{p_i p_j} (1 + \kappa)\, \ell_{ijk}^{(1)} Z_{ijk}^2 = \frac{(1 + \kappa)}{tr(\Sigma_{ii})} \sum_{k=1}^{p_i p_j} \ell_{ijk}^{(1)} Z_{ijk}^2 \tag{3.6}$$

où les variables aléatoires Z_{ijk} sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $N(0,1)$ et les quantités $(1 + \kappa)\, \ell_{ijk}^{(1)}$ pour $k = 1, \ldots, p_i p_j$, sont les valeurs propres de

$$(1 + \kappa)\, (\Sigma_{ii} \otimes \Sigma_{jj})\, (I_{p_i} \otimes \Sigma_{jj}^{-1}) = (1 + \kappa)\, (\Sigma_{ii}\, I_{p_i} \otimes \Sigma_{jj}\, \Sigma_{jj}^{-1})$$

$$= (1 + \kappa)\, (\Sigma_{ii} \otimes I_{p_j}).$$

Puisque les valeurs propres $\ell_{ijk}^{(1)}$ de la matrice $(\Sigma_{ii} \otimes I_{p_j})$ sont $\lambda_1^{(i)}, \ldots, \lambda_{p_i}^{(i)}$ chacune de multiplicité p_j, la quantité en (3.6) devient

$$\frac{(1 + \kappa)}{tr(\Sigma_{ii})} \sum_{k=1}^{p_i} \sum_{l=1}^{p_j} \lambda_k^{(i)} W_{ijkl}^2$$

où les variables aléatoires W_{ijkl} sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $N(0,1)$.

ii) Pour $h = 2$, on a pour $1 \le i < j \le K$,

$$RV_{ij}^{(2)} = \frac{tr(S_{ij}\, S_{ji})}{\sqrt{tr(S_{ii}^2)\, tr(S_{jj}^2)}}.$$

Puisque ces mesures sont des fonctions continues en tous leurs arguments on a par (3.5)

$$n\begin{pmatrix} RV^{(2)}_{12} \\ \vdots \\ RV^{(2)}_{K-1\,K} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} Z'_{12}Z_{12}/\sqrt{tr(\Sigma^2_{11})\, tr(\Sigma^2_{22})} \\ \vdots \\ Z'_{K-1\,K}Z_{K-1\,K}/\sqrt{tr(\Sigma^2_{K-1\,K-1})\, tr(\Sigma^2_{KK})} \end{pmatrix}.$$

Alors par le même raisonnement que celui utilisé plus haut, les formes quadratiques

$$Y^{(2)}_{ij} = Z'_{ij}Z_{ij} \,/\, \sqrt{tr(\Sigma^2_{ii})\, tr(\Sigma^2_{jj})}$$

pour $1 \le i < j \le K$ sont indépendantes et distribuées comme

$$\frac{(1+\kappa)}{\sqrt{tr(\Sigma^2_{ii})\, tr(\Sigma^2_{jj})}} \cdot \sum_{k=1}^{p_ip_j} \ell^{(2)}_{ijk} Z^2_{ijk}$$

où $\ell^{(2)}_{ij1}, \ldots, \ell^{(2)}_{ij(p_ip_j)}$ sont les valeurs propres de la matrice $(\Sigma_{ii} \otimes \Sigma_{jj})$ qui sont $\lambda^{(i)}_k \cdot \lambda^{(j)}_l$ pour $k = 1, \ldots, p_i$ et $l = 1, \ldots, p_j$. Alors cette dernière quantité devient

$$\frac{(1+\kappa)}{\sqrt{tr(\Sigma^2_{ii})\, tr(\Sigma^2_{jj})}} \sum_{k=1}^{p_i}\sum_{l=1}^{p_j} \lambda^{(i)}_k \lambda^{(j)}_l W^2_{ijkl}.$$

iii) Finalement considérons pour $1 \le i < j \le K$,

$$RV^{(3)}_{ij} = \frac{tr(S^{-1}_{ii}\, S_{ij}\, S^{-1}_{jj}\, S_{ji})}{p_i}.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} n\; tr(S^{-1}_{ii}\, S_{ij}\, S^{-1}_{jj}\, S_{ji}) &= (\sqrt{n}\, vec(S_{ji}))'(S^{-1}_{ii} \otimes S^{-1}_{jj})\, \sqrt{n}\, vec(S_{ji}) \\ &= (\sqrt{n}\, vec(S_{ji}))'(S_{ii} \otimes S_{jj})^{-1} \sqrt{n}\, vec(S_{ji}). \end{aligned}$$

Alors par la continuité de $RV^{(3)}_{ij}$ et par (3.5) on a

$$n\begin{pmatrix} RV_{12}^{(3)} \\ \vdots \\ RV_{K-1\,K}^{(3)} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} Z_{12}'(\Sigma_{11} \otimes \Sigma_{22})^{-1} Z_{12}/p_i \\ \vdots \\ Z_{K-1\,K}'(\Sigma_{K-1\,K-1} \otimes \Sigma_{KK})^{-1} Z_{K-1\,K}/p_{K-1} \end{pmatrix}.$$

Alors comme, pour $1 \leq i < j \leq K$, on a $Z_{ij} \sim N_{p_i p_j}(0, (1+\kappa)(\Sigma_{ii} \otimes \Sigma_{jj}))$ où les Z_{ij} sont indépendantes, les formes quadratiques

$$Y_{ij}^{(3)} = Z_{ij}' (\Sigma_{ii} \otimes \Sigma_{jj})^{-1} Z_{ij} / p_i$$

sont indépendantes pour $1 \leq i < j \leq K$ et elles sont distribuées comme des variables aléatoires de loi

$$\frac{(1+\kappa)}{p_i} \chi^2_{p_i p_j}. \qquad \square$$

Il est à remarquer que lorsque $K = 2$, une démonstration plus simple du théorème 3.4 se trouve dans Lazraq & Cléroux (1989) pour $h = 1$ et dans Cléroux & Ducharme (1989) pour $h = 2$.

4. Tests asymptotiques de l'hypothèse $H_0 : \Sigma_{ij} = 0,\ 1 \leq i < j \leq K$

Lorsque la distribution du vecteur aléatoire X dans la population est multinormale l'hypothèse nulle donnée par (3.1) est équivalente à l'hypothèse d'indépendance entre les K sous-vecteurs de X. Dans ce cas le test du rapport de vraisemblances maximales est basé sur la statistique (voir Anderson (1984))

$$\lambda = \frac{|S|^{n/2}}{\prod_{i=1}^{K} |S_{ii}|^{n/2}} \tag{4.1}$$

où $|\cdot|$ est le déterminant d'une matrice. Plusieurs auteurs ont obtenu la distribution exacte de $\lambda^{2/n}$ selon certaines valeurs des p_i, $i = 1, \ldots, K$. Mathai & Saxena (1973) donnent la distribution exacte dans le cas général. Comme les moments de λ sont fonctions de fonctions gamma on peut obtenir la distribution asymptotique de λ en utilisant les résultats de Box(1949) (voir Anderson (1984)). Une autre statistique donnée par

$$\sum\sum_{1\le i<j\le K} \operatorname{tr}(S_{ii}^{-1}\, S_{ij}\, S_{jj}^{-1}\, S_{ji})$$

fut proposée par Nagao (1973) qui obtint un développement asymptotique pour sa distribution. Cependant ces statistiques fonctions de la matrice de covariances échantillonnales ne sont pas robustes à des déviations de l'hypothèse de multinormalité (voir Muirhead & Waternaux (1980)). Dans le contexte de distribution elliptique Muirhead & Waternaux (1980) proposent d'utiliser la statistique $-2\log\lambda$ qui est asymptotiquement distribuée comme $(1+\kappa)\,\chi_f^2$.

Les résultats de la section précédente nous permettent de constuire des tests asymptotiques pour l'hypothèse nulle donnée par (3.1). Ces tests au niveau α sont donnés par

$$\text{rejeter } H_0 \text{ si } n \sum\sum_{1\le i<j\le K} RV_{ij}^{(h)} > c_\alpha^{(h)}, \quad h = 1, 2 \text{ ou } 3$$

où $c_\alpha^{(h)}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la distribution de

i) $$(1+\kappa) \sum\sum_{1\le i<j\le K} \frac{1}{\operatorname{tr}(\Sigma_{ii})} \sum_{k=1}^{p_i}\sum_{l=1}^{p_j} \lambda_k^{(i)}\, W_{ijkl}^2 \quad \text{si } h = 1,$$

ii) $$(1+\kappa) \sum\sum_{1\le i<j\le K} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tr}(\Sigma_{ii}^2)\operatorname{tr}(\Sigma_{jj}^2)}} \sum_{k=1}^{p_i}\sum_{l=1}^{p_j} \lambda_k^{(i)}\, \lambda_l^{(j)}\, W_{ijkl}^2 \quad \text{si } h = 2 \text{ et}$$

iii) $$(1+\kappa) \sum\sum_{1\le i<j\le K} \frac{V_{ij}}{p_i} \quad \text{si } h = 3$$

où les variables aléatoires V_{ij} sont indépendantes et de loi $\chi^2_{p_i p_j}$ et les autres quantités sont définies au théorème 3.4. On détermine les quantiles $c_\alpha^{(h)}$, pour $h = 1, 2, 3$, à l'aide de l'algorithme d'Imhof (1961). Puisque certains paramètres sont inconnus, on les remplace par des estimateurs convergents: Σ est remplacé par S, les valeurs propres de Σ_{ii} par celles de S_{ii} et κ par son estimateur convergent $\hat{\kappa}$ (voir Cléroux & Ducharme (1989)).

Il est intéressant de remarquer que la statistique

$$n \sum_{1\leq i<j\leq K}\sum p_i \, RV_{ij}^{(3)} = n \sum_{1\leq i<j\leq K}\sum \operatorname{tr}(S_{ii}^{-1}S_{ij}S_{jj}^{-1}S_{ji})$$

suit asymptotiquement une loi $(1+\kappa)\ \chi_f^2$ et que cette loi asymptotique coïncide avec celle de la statistique $-2 \log \lambda$. Dans le cas multinormal ce résultat est noté par Anderson (1984).

5. Distributions asymptotiques conjointes des $RV_{ij}^{(h)}$, $1 \leq i < j \leq K$ sous une suite d'alternatives convergeant vers l'hypothèse nulle, pour $h = 1, 2, 3$

Considérons la suite d'alternatives convergeant vers l'hypothèse nulle donnée par $H_{1n} : \Sigma_{ij} = A_{ij}/\sqrt{n}$ pour $i, j = 1, \ldots, K, i \neq j$, où $A_{ij} = A'_{ji}$ est une matrice donnée de dimension $p_i \times p_j$. Dans cette section on trouve la distribution asymptotique conjointe des $RV_{ij}^{(h)}$ sous cette suite d'alternatives. En utilisant le lemme 3.1 on trouve d'abord la distribution asymptotique conjointe de $\sqrt{n}\ \mathrm{vec}(S_{ji})$ pour $1 \leq i < j \leq K$ sous H_{1n}.

Lemme 5.1 Sous les conditions du lemme 3.1 et sous l'hypothèse $H_{1n} : \Sigma_{ij} = A_{ij}/\sqrt{n}$, $i, j = 1, \ldots, K$, $i \neq j$, on a

$$Z_n = \sqrt{n}\begin{pmatrix} \mathrm{vec}(S_{21}) \\ \vdots \\ \mathrm{vec}(S_{K\,K-1}) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$$

où Z suit une loi $N_f(\mu_z, \Sigma_z)$,

$$\mu_z = \begin{pmatrix} \mathrm{vec}\,(A_{21}) \\ \vdots \\ \mathrm{vec}(A_{K\,K-1}) \end{pmatrix} \text{ et } \Sigma_z = (1+\kappa)\begin{pmatrix} (\Sigma_{11} \otimes \Sigma_{22}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\Sigma_{K-1\,K-1} \otimes \Sigma_{KK}) \end{pmatrix}.$$

Démonstration: On n'a qu'à montrer que pour tout vecteur de constantes

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \vdots \\ \lambda_{K-1\,K} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^f$$

on a $\lambda' Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \lambda' Z$. Or par le lemme 3.2 on a

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{vec}(S_{21}) \\ \vdots \\ \mathrm{vec}(S_{K\,K-1}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathrm{vec}(\Sigma_{21}) \\ \vdots \\ \mathrm{vec}(\Sigma_{K\,K-1}) \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0\,,\,\Omega)$$

où Ω est partitionné en sous-matrices

$$\Omega_{ji}^{lk} = (1+\kappa)\,((\Sigma_{ik} \otimes \Sigma_{jl}) + K_{p_i p_j}(\Sigma_{jk} \otimes \Sigma_{il})) + \kappa\, \mathrm{vec}(\Sigma_{ji})\,(\mathrm{vec}(\Sigma_{lk}))'$$

pour $1 \leq i < j \leq K$ et $1 \leq k < l \leq K$. Donc puisque Z_n est asymptotiquement multinormal, $\lambda' Z_n$ est asymptotiquement normal, plus précisément, on a

$$\frac{\lambda' Z_n - \sqrt{n} \sum\sum_{1\leq i<j\leq K} \lambda_{ij}' \,\mathrm{vec}(\Sigma_{ji})}{\left(\sum\sum_{1\leq i<j\leq K} \sum\sum_{1\leq k<l\leq K} \lambda_{ij}' \Omega_{ji}^{lk} \lambda_{kl}\right)^{1/2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1).$$

Cependant en substituant Σ_{ji} par $A_{ji}/\sqrt{n}$ on trouve, pour $1 \leq i < j \leq K$,

$$\sqrt{n} \sum\sum_{1\leq i<j\leq K} \lambda_{ij}' \,\mathrm{vec}(\Sigma_{ji}) = \sum\sum_{1\leq i<j\leq K} \lambda_{ij}' \,\mathrm{vec}(A_{ji}) = \lambda' \mu_Z$$

et

$$\begin{aligned} \sum\sum_{1\leq i<j\leq K} \sum\sum_{1\leq k<l\leq K} \lambda_{ij}' \,\Omega_{ji}^{lk} \lambda_{kl} &= \sum\sum_{1\leq i<j\leq K} \lambda_{ij}' \Omega_{ji}^{ji} \lambda_{ij} + \sum\sum_{1\leq i<j\leq K} \sum\sum_{\substack{1\leq k<l\leq K \\ (i,j) \neq (k,l)}} \lambda_{ij}' \,\Omega_{ji}^{lk} \lambda_{kl} \\ &= \sum\sum_{1\leq i<j\leq K} \lambda_{ij}' (1+\kappa)\,(\Sigma_{ii} \otimes \Sigma_{jj})\lambda_{ij} + O(n^{-1/2}) \\ &= \lambda' \Sigma_Z \lambda + O(n^{-1/2})\,. \end{aligned}$$

Alors par le lemme A, page 20 de Serfling (1980), on a

$$\frac{\lambda' Z_n - \lambda'\mu_z}{\sqrt{\lambda' \Sigma_z \lambda}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1). \qquad \square$$

On peut démontrer le théorème suivant.

Théorème 5.1 Sous les conditions du lemme 5.1, on a pour h fixé, $h \in \{1, 2, 3\}$,

$$n \begin{pmatrix} RV_{12}^{(h)} \\ \vdots \\ RV_{K-1\,K}^{(h)} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} Y_{12}^{(h)} \\ \vdots \\ Y_{K-1\,K}^{(h)} \end{pmatrix}$$

où les variables aléatoires $Y_{ij}^{(h)}$, $1 \le i < j \le K$ sont indépendantes et distribuées comme

i) $\dfrac{(1+\kappa)}{tr(\Sigma_{ii})} \displaystyle\sum_{k=1}^{p_i} \sum_{l=1}^{p_j} \lambda_k^{(i)} W_{ijkl}^{(1)2}$ pour $h = 1$,

ii) $\dfrac{(1+\kappa)}{\sqrt{tr(\Sigma_{ii}^2)\ tr(\Sigma_{jj}^2)}} \displaystyle\sum_{k=1}^{p_i} \sum_{l=1}^{p_j} \lambda_k^{(i)} \lambda_l^{(j)} W_{ijkl}^{(2)2}$ pour $h = 2$,

iii) $\dfrac{(1+\kappa)}{p_i} \chi^2_{p_ip_j}(\delta_{ij}^2)$ pour $h = 3$

où $\lambda_1^{(i)}, \ldots, \lambda_{p_i}^{(i)}$ sont les valeurs propres de Σ_{ii}, $i = 1, \ldots, K$, les variables aléatoires $W_{ijkl}^{(h)}$ sont indépendantes et de loi $N(\delta_{ijkl}^{(h)}, 1)$,

$$\delta_{ijkl}^{(h)} = \begin{cases} C_{ijkl}^{(1)'} \dfrac{(\Sigma_{ii}^{-1/2} \otimes I_{p_j})}{\sqrt{1+\kappa}} vec(A_{ji}) & \text{si } h = 1, \\[2ex] C_{ijkl}^{(2)'} \dfrac{(\Sigma_{ii}^{-1/2} \otimes \Sigma_{jj}^{-1/2})}{\sqrt{1+\kappa}} vec(A_{ji}) & \text{si } h = 2, \end{cases}$$

$C_{ijkl}^{(h)}$ est le vecteur propre orthonormé correspondant à la valeur propre

$$\begin{cases} \lambda_k^{(i)} \text{ avec multiplicité } p_j, \text{ de la matrice } (\Sigma_{ii} \otimes I_{p_j}) \text{ si } h = 1, \\ \lambda_k^{(i)} \lambda_l^{(j)} \text{ de la matrice } (\Sigma_{ii} \otimes \Sigma_{jj}) \text{ si } h = 2 \end{cases}$$

et

$$\delta_{ij}^2 = \frac{(\mathrm{vec}(A_{ji}))' (\Sigma_{ii} \otimes \Sigma_{jj})^{-1} (\mathrm{vec}(A_{ji}))}{(1 + \kappa)}.$$

Démonstration: La démonstration est identique à celle du théorème 3.4. En utilisant le lemme 5.1, un paramètre de décentralité est introduit puisque le vecteur des moyennes de la loi asymptotique de $\sqrt{n}\,\mathrm{vec}(S_{ji})$ est non-nul. L'indépendance asymptotique des $RV_{ij}^{(h)}$, $1 \le i < j \le K$ découle de l'indépendance asymptotique des vecteurs $\sqrt{n}\,\mathrm{vec}\,(S_{ji})$ sous H_{1n}. Il reste à trouver la distribution asymptotique des $RV_{ij}^{(h)}$ pour (i, j) fixé, $1 \le i < j \le K$. Lorsque $K = 2$, en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration du théorème 3.4, la distribution asymptotique de $n\,RV_{ij}^{(1)}$ est celle de la forme quadratique

$$\frac{Z_{ij}'(I_{p_i} \otimes \Sigma_{jj}^{-1}) Z_{ij}}{\mathrm{tr}(\Sigma_{ii})}$$

où $Z_{ij} \sim N_{p_i p_j}(\mathrm{vec}(A_{ji}), (1 + \kappa)(\Sigma_{ii} \otimes \Sigma_{jj}))$. Or la distribution de cette dernière est donnée par (voir Johnson & Kotz (1970))

$$\frac{(1 + \kappa)}{\mathrm{tr}(\Sigma_{ii})} \sum_{k=1}^{p_i p_j} \ell_{ijk}^{(1)} Z_{ijk}^2$$

où les valeurs propres $\ell_{ijk}^{(1)}$ sont données en (3.6) et les variables aléatoires Z_{ijk} sont indépendantes et de loi $N(\delta_{ijk}, 1)$ où

$$\begin{aligned} \delta_{ijk} &= C_{ijk}' \{(1 + \kappa)(\Sigma_{ii} \otimes \Sigma_{jj})(I_{p_i} \otimes \Sigma_{jj}^{-1})\}^{-1/2} \mathrm{vec}(A_{ji}) \\ &= C_{ijk}' \frac{(\Sigma_{ii}^{-1/2} \otimes I_{p_j})}{\sqrt{1 + \kappa}} \mathrm{vec}(A_{ji}) \end{aligned}$$

où pour $k = 1, \ldots, p_i p_j$, C_{ijk} est le vecteur propre orthonormé correspondant à la valeur propre $\ell_{ijk}^{(1)}$ de la matrice $(\Sigma_{ii} \otimes I_{p_j})$. On obtient le résultat en remarquant que ces valeurs propres sont données par $\lambda_k^{(i)}$, $k = 1, \ldots, p_i$, $l = 1, \ldots, p_j$. Pour $h = 2$, on trouve le résultat dans Cléroux & Ducharme (1989). Finalement, pour $h = 3$, la distribution asymptotique de $n\,RV_{ij}^{(3)}$ est celle de la forme quadratique

$$\frac{1}{p_i} Z_{ij}' \, (\Sigma_{ii} \otimes \Sigma_{jj})^{-1} Z_{ij} \;.$$

On obtient le résultat en remarquant que la distribution de cette dernière est

$$\frac{(1+\kappa)}{p_i} \, \chi^2_{p_i p_j} \, (\delta^2_{ij})$$

où

$$\delta^2_{ij} = \frac{(\mathrm{vec}(A_{ji}))' \, (\Sigma_{ii} \otimes \Sigma_{jj})^{-1} (\mathrm{vec}(A_{ji}))}{(1+\kappa)} . \qquad \square$$

Pour h fixé, $h \in \{1, 2, 3\}$, on a $RV_{ij}^{(h)} \xrightarrow{P} \rho V_{ij}^{(h)}$ pour $1 \leq i < j \leq K$. Lorsque l'hypothèse H_0 est fausse on a $\rho V_{ij}^{(h)} > 0$ pour au moins un couple (i, j) où $1 \leq i < j \leq K$, alors on a

$$\lim_{n \to \infty} P(n \sum_{1 \leq i < j \leq K}\sum RV_{ij}^{(h)} > c_\alpha^{(h)}) = 1.$$

Donc les tests proposés à la section 4 sont convergents. Sous la suite d'alternatives convergeant vers l'hypothèse nulle, on peut calculer la puissance des tests à l'aide du théorème 5.1, en utilisant l'algorithme d'Imhof (1961). On remplace les paramètres inconnus par des estimateurs convergents.

6. Un exemple

On considère l'ensemble de données du tableau 5 de Dawkins (1989) constitué des records nationaux masculins de 55 pays pour 8 courses en athlétisme: le 100 m , le 200 m, le 400 m, le 800 m, le 1500 m, le 5000 m, le 10 000 m et le marathon. Il s'agit, comme le mentionne l'auteur, d'une partie des données recueillies par Belcham & Hymans(1984) pour les jeux olympiques de 1984 à Los Angeles. Ces huit variables se regroupent naturellement en trois sous-ensembles de variables. Il y a d'abord trois sprints: les 100 m, 200 m et 400 m, deux courses de demi-fond: les 800 m et 1500 m et finalement trois courses de fond ou épreuves d'endurance: les 5 km, 10 km et le marathon. Donc on a trois sous-vecteurs de tailles données respectivement par $p_1 = 3$, $p_2 = 2$ et $p_3 = 3$.

Il est à noter que l'échelle de ces variables n'est pas la même puisque les sprints sont chronométrés en secondes tandis que les temps des autres courses sont donnés en minutes. De plus, comme les variances des variables correspondant aux longues épreuves sont plus grandes que celles des petites, on a centré et réduit chaque variable afin d'accorder un poids égal à chacune d'elles dans l'analyse. Les nouvelles variables représentent ainsi des mesures de la performance relative des différentes nations dans chacune des épreuves. En utilisant ces données transformées, les mesures de liaison vectorielle sont obtenues à partir de la matrice de corrélations échantillonnales. Or, seule la mesure de Cramer & Nicewander est invariante sous des transformations linéaires des variables. Donc les résultats théoriques des sections 3 et 4 s'appliquent seulement pour cette mesure. Cependant, une analyse des données brutes à l'aide des autres mesures donne des résultats similaires à ceux présentés dans le tableau 6.1 sur les données centrées réduites.

Un test de normalité est effectué sur chaque variable en utilisant la statistique de Kolmogorov modifiée par Stephens (1974). Pour le 200 m, on ne peut rejeter l'hypothèse de normalité au niveau 0,05 alors que pour le 400 m on rejette cette hypothèse au même niveau et on la rejette également pour toutes les autres variables au niveau 0,01. A l'aide de l'algorithme proposé par

Cléroux & Ducharme (1989), on obtient une estimation convergente de κ, $\hat{\kappa} = 1{,}201$ et tout indique que les données ne s'ajustent pas à une loi multinormale.

On veut maintenant éprouver l'hypothèse $H_0 : \Sigma_{ij} = 0,\ 1 \leq i < j \leq 3$, l'hypothèse d'absence de liaison entre les vecteurs représentant la performance nationale dans trois types d'épreuves. Les tests asymptotiques proposés à la section 4 ont été programmés sur ordinateur cyber série 170, modèle 835/855 à l'aide du langage FORTRAN 5 sous le système opérationnel NOSBE 1.5. Les niveaux critiques des tests sont calculés avec l'algorithme d'Imhof (1961) en utilisant la sous-routine FQUAD tirée du chapitre 9 de Koerts & Abrahamse (1969). Pour cet ensemble de données où les performances relatives des nations sont sensiblement les mêmes d'une épreuve à l'autre on peut s'attendre à rejeter l'hypothèse nulle. On trouve en effet pour les trois tests de la section 4 des niveaux critiques inférieurs à 1×10^{-5}. Le tableau 6.1 donne les statistiques des tests de la section 4.

Mesure de liaison	h	$RV_{12}^{(h)}$	$RV_{13}^{(h)}$	$RV_{23}^{(h)}$	$n \sum\sum_{1 \leq i<j \leq 3} RV_{ij}^{(h)}$	niveau critique
Stewart & Love	1	0,665	0,541	0,824	111,651	$0{,}78 \times 10^{-8}$
Escoufier	2	0,714	0,514	0,832	113,292	$0{,}33 \times 10^{-9}$
Cramer & Nicewander	3	0,410	0,247	0,442	60,483	$0{,}55 \times 10^{-5}$

Tableau 6.1: Statistiques des tests pour l'ensemble des records nationaux masculins de 55 pays pour 8 courses.

En utilisant le test proposé par Muirhead & Waternaux (1980) basé sur la statistique $-2 \log \lambda$ où λ est donné en (4.1), on obtient également un niveau critique inférieur à 1×10^{-5}. On obtient aussi des niveaux critiques inférieurs à 1×10^{-5} lorsqu'on utilise les données brutes c'est-à-dire lorsque les mesures de liaison sont calculées à partir de la matrice de covariances échantillonnales.

Le travail du second auteur a été subventionné par le CRSNG du Canada (A-8555). Les auteurs remercient l'arbitre pour ses commentaires pertinents.

Bibliographie

Anderson, T. W. (1984). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, 2nd Edition, John Wiley, New York.

Belcham, P. and Hymans, R. (1984). IAAF/ATFS Track and Field Statistics Handbook for the 1984 Los Angeles Olympic Games. International Amateur Athletic Federation, London.

Billingsley, P. (1968). *Convergence of Probability Measures*, John Wiley, New York.

Box, G.E.P. (1949). A General Distribution Theory for a Class of Likelihood Criteria, Biometrika, **36**, 317-346.

Cléroux, R. and Ducharme, G.R. (1989). Vector Correlation for Elliptical Distributions, Communications in Statistics - Theory and Methods, **18**, 1441-1454.

Cramer, E.M. and Nicewander, W.A. (1979). Some Symmetric, Invariant Measures of Multivariate Association, Psychometrika, **49**, 403-423.

Dawkins, B. (1989). Multivariate Analysis of National Track Records, The American Statistician, **43**, 110 -115.

Escoufier, Y. (1973). Le Traitement des Variables Vectorielles, Biometrics **29**, 751-760.

Graybill, F.A. (1983). *Matrices with Applications in Statistics*, Second Edition, Wadsworth, Belmont, California.

Hotelling, H. (1936). Relations Between Two Sets of Variables, Biometrika **28**, 321-377.Imhof, P. (1961). Computing the Distribution of Quadratic Forms in Normal Variates, Biometrika, **48**, 419-426.

Johnson, N.L. and Kotz, S. (1970). *Continuous Univariate Distributions*, volume 2, Hougton Mifflin, New York.

Koerts, J. and Abrahamse, A.P.J. (1969). *On the Theory and Application of the General Linear Model*, Rotterdam University Press, Rotterdam.

Lazraq, A. et Cléroux, R. (1988). Étude Comparative de Différentes Mesures de Liaison Entre Deux Vecteurs Aléatoires et Tests d'Indépendance, Statistique et Analyse des Données, **13**, 15-18.

Lazraq, A. and Cléroux, R. (1989). Tests of Homogeneity Between Coefficient of Multivariate Association in Elliptical Distributions, Thèse de Doctorat, Faculté des Études Supérieures, Université de Montréal.

Mathai, A.M. and Saxena, R.K. (1973). Generalized Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Physical Sciences, Lecture Note No 348, Springer-Verlag, New York.

Muirhead, R.J. (1982). *Aspects of Multivariate Statistical Theory*, John Wiley, New York.

Muirhead, R.J. and Waternaux, C.M. (1980). Asymptotic Distributions in Canonical Correlation Analysis and Other Multivariate Procedures for Non-Normal Populations, Biometrika, **67**, 31-43.

Nagao, H. (1973). On Some Test Criteria for Covariance Matrix, Annals of Statistics, **1**, 700-709.

Pillai, K.C.S. (1954). On Some Distribution Problems in Multivariate Analysis, Institute of Statistics, Mimeo. Series No. 88, University of North Carolina, Chapel Hill.

Pillai, K.C.S. (1955). Some New Test Criteria in Multivariate Analysis, Annals of Mathematical Statistics, **26**, 117-121.

Robert, P. and Escoufier, Y. (1976). A Unifying Tool for Linear Multivariate Statistical Methods: the RV-Coefficient, Applied Statistics, **25**, 257-265.

Serfling, R.J. (1980). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*, John Wiley, New York.

Stephens, M.A. (1974). EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons, Journal of the American Statistical Association, **69**, 730-737.

Stewart, D. and Love, W. (1968). A General Canonical Correlation Index, Psychological Bulletin, **70**, 160-163.