

# STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

RACHID JAHIDI

## Deux tests de détection d'un signal dans un bruit de Ornstein-Uhlenbeck

*Statistique et analyse des données*, tome 15, n° 2 (1990), p. 19-34.

[http://www.numdam.org/item?id=SAD\\_1990\\_\\_15\\_2\\_19\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAD_1990__15_2_19_0)

© Association pour la statistique et ses utilisations, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Statistique et analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## DEUX TESTS DE DÉTECTION D'UN SIGNAL DANS UN BRUIT DE ORNSTEIN-UHLENBECK

Rachid JAHIDI

Laboratoire de Statistique et Probabilités (M 2)  
Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois  
59655 - Villeneuve d'Ascq Cedex (France)

**Résumé :** En se basant sur un *seul* enregistrement

$$X(t, \omega_0) = \theta(t) + B(t, \omega_0) ; t \geq 0$$

de la somme d'un signal inconnu  $\theta = (\theta(t); t \geq 0)$  et d'un bruit aléatoire gaussien centré  $B = (B(t, \omega); t \geq 0, \omega \in \Omega)$ , qui est supposé être un processus de Ornstein-Uhlenbeck, on propose ci-dessous deux tests convergents de l'hypothèse qu'il n'y a pas de signal, c'est-à-dire que l'on a enregistré seulement une trajectoire  $B(\cdot, \omega_0)$  du bruit  $B$  contre l'hypothèse qu'il y a en plus un signal non nul appartenant à l'ensemble  $\Theta^*$  des signaux de classe  $C^1$  sur  $[0, +\infty[$  qui vérifient :  $\varliminf_{t \rightarrow +\infty} (\theta(t) + \dot{\theta}(t)) > 0$  ou  $\varliminf_{t \rightarrow +\infty} (\theta(t) + \dot{\theta}(t)) < 0$  dans le cas du premier test, ou à l'ensemble  $\Theta^{**}$  des signaux non nuls de classe  $C^1$  sur  $[0, +\infty[$  de période connue  $P$  tels que  $\theta(0) + \dot{\theta}(0) \neq 0$  en ce qui concerne le second test. On utilise seulement les quantités  $X(t_n, \omega_0)$ ,  $n \geq 1$  pour une suite d'instantanés d'observation  $(t_n; n \geq 1)$  convenablement choisie. La démonstration repose sur une condition suffisante pour que deux hypothèses soient orthogonales, due à J. Geffroy, et qui porte sur l'éloignement des lois conditionnelles, au sens de la distance en variations.

Classification A.M.S. : 62M02 - 60G15

Mots-clefs : signal, processus de Ornstein-Uhlenbeck, test de détection.

Manuscrit reçu le 11 décembre 1989, révisé le 22 octobre 1990

## I INTRODUCTION

### 1) Position du problème

On reçoit à partir de l'instant initial  $t = 0$  un signal qui est la somme d'un signal émis  $\theta = (\theta(t); t \geq 0)$ , qui est le signal *utile* que l'on voudrait récupérer, et d'un bruit aléatoire que nous supposons être, au début de l'article (section II, paragraphes 2 et 3), un processus gaussien centré quelconque  $(B(t); t \geq 0)$ , de covariance  $K$  connue, puis (à partir du paragraphe 3 de la section II) un processus de Ornstein-Uhlenbeck, c'est-à-dire un processus gaussien centré dont la covariance est donnée par :

$$(1) \quad \forall t, s \geq 0, K(t, s) = E(X(t) \cdot X(s)) = e^{-|t-s|}.$$

Ce que l'on enregistre est donc une trajectoire du processus gaussien  $\theta + B$ , soit :

$$(2) \quad \forall t \geq 0, X(t, \omega_0) = \theta(t) + B(t, \omega_0).$$

La modélisation d'un bruit par un processus de Ornstein-Uhlenbeck est souvent utilisée. Rappelons d'une part que c'est le processus markovien gaussien *stationnaire* centré le plus général ([2] ; III.8.2, p.99), à deux coefficients d'échelle sur l'amplitude du bruit et le temps près, que l'on pourrait introduire et estimer dans un modèle plus élaboré, et d'autre part qu'il est solution de l'équation différentielle stochastique de Langevin (cf. [1] ; VIII.6 ou [2] ; X.4.b, p.335-336).

La seule hypothèse *a priori* que l'on fait est que  $\theta$  appartient à un ensemble *connu*  $\Theta$  de signaux possibles et le problème est de déduire de l'enregistrement  $(X(t, \omega_0); t \geq 0)$  le maximum de renseignements concernant le signal utile  $\theta$ . Dans la section III, on propose deux tests convergents de l'hypothèse que le signal utile est nul, c'est-à-dire que l'on a enregistré seulement une trajectoire  $B(\cdot, \omega_0)$  du bruit (qui est un processus de Ornstein-Uhlenbeck) contre l'hypothèse qu'il y a en plus du bruit un signal utile non nul, lorsque l'hypothèse alternative  $\Theta^*$ , puis  $\Theta^{**}$  est convenablement choisie (voir le résumé). On a cherché à ce que ces contre-hypothèses soient aussi riches que possible, sous la condition que les tests restent convergents. Si la première contre-hypothèse  $\Theta^*$  est apparue telle quelle pour des raisons techniques, la seconde est naturelle. Dans les deux cas, on voit apparaître le fait, propre au bruit de Ornstein-Uhlenbeck, que le signal  $\theta$  n'intervient que par  $\theta + \dot{\theta}$ , alors que dans le cas d'un bruit brownien (cf. [6]), c'est par  $\dot{\theta}$  qu'il intervient.

## 2) Discrétisation du modèle

On ne se servira pas de tout l'enregistrement  $(X(t, \omega_0); t \geq 0)$  mais seulement de la suite  $(X(t_n, \omega_0); n \geq 1)$  des mesures du signal reçu suivant la suite des instants d'observation  $T = (t_n; n \geq 1)$  :

$$(3) \quad 0 \leq t_1 < t_2 < \dots$$

Cette suite devra être choisie convenablement, et n'aura pas nécessairement la forme d'une progression arithmétique ; autrement dit, bien que  $B$  soit un processus gaussien stationnaire (dans le cas où c'est un processus de Ornstein-Uhlenbeck), la chaîne  $(B(t_n); n \geq 1)$  ne sera pas nécessairement stationnaire. Par contre elle restera markovienne, comme  $(B(t); t \geq 0)$ , ce qui explique la simplicité des résultats obtenus.

## 3) Outil mathématique utilisé

Ce travail repose, comme on l'a indiqué dans le résumé, sur une condition suffisante d'orthogonalité de deux hypothèses multiples portant sur l'éloignement des lois conditionnelles au sens de la distance en variations, due à J. Geffroy ([3] ; th. 1).

## 4) Notations et rappels

Pour tout entier  $n \geq 1$  et pour tout signal  $\theta$ ,  $x^{(n)} = (x_1, \dots, x_n)$  désignera un  $n$ -uple réel quelconque,  $P_\theta^{(n)}$  la loi du vecteur aléatoire  $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ ,  $K^{(n)}$  sa matrice de covariance.

Si  $B$  est un processus gaussien centré quelconque qui vérifie :

$$(4) \quad \forall n \geq 1, \text{Det}(K^{(n)}) \neq 0,$$

la loi  $P_\theta^{(n)}$  est une loi normale non dégénérée sur  $\mathbf{R}^n$  et la loi conditionnelle de  $X(t_n)$  sachant que  $(X(t_1), \dots, X(t_{n-1})) = x^{(n-1)}$  notée  $P_\theta^{x^{(n-1)}}$  est donnée, quels que soient l'entier  $n \geq 2$ , le signal  $\theta$  et le  $(n-1)$ -uple  $x^{(n-1)}$  par :

$$(5) \quad P_\theta^{x^{(n-1)}} = \mathcal{N}(M_\theta(x^{(n-1)}); \sigma_n^2)$$

$$(6) \quad M_\theta(x^{(n-1)}) = \theta(t_n) - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^n (\theta(t_j) - x_j)$$

$$(7) \quad \sigma_n^2 = K(t_n, t_n) - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^n K(t_j, t_n),$$

les coefficients  $a_1^n, \dots, a_{n-1}^n$  étant eux-mêmes donnés par :

$$(8) \quad (a_1^n, \dots, a_{n-1}^n) = (K(t_1, t_n), \dots, K(t_{n-1}, t_n))(K^{(n-1)})^{-1}.$$

Ces coefficients, ainsi que les variances conditionnelles  $\sigma_n^2$ ,  $n \geq 2$  doivent donc être considérés comme des *données du modèle* puisqu'ils ne dépendent que de la covariance connue  $K$ . Il en est de même des fonctions :  $f_n : \Theta \rightarrow \mathbf{R}$  définies pour tout entier  $n \geq 2$  par :

$$(9) \quad f_n(\theta) = \theta(t_n) - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^n \theta(t_j).$$

Ces fonctions permettent d'exprimer simplement les différences des moyennes conditionnelles qui interviennent dans les distances en variations entre lois conditionnelles :

$$(10) \quad \begin{cases} \forall n \geq 2, \quad \forall x^{(n-1)} \in \mathbf{R}^{(n-1)} \quad \text{et} \quad \forall \theta_0, \theta_1 \in \Theta, \\ M_{\theta_0}(x^{(n-1)}) - M_{\theta_1}(x^{(n-1)}) = f_n(\theta_0) - f_n(\theta_1). \end{cases}$$

## 5) Antécédents de cet article

Ce papier est une étude parallèle à celle qui a été faite récemment par R. Moché ([6]) dans le cas où  $B$  est le processus du mouvement brownien. Notre deuxième test, par exemple, est le pendant du test de détection d'un signal dans un bruit brownien proposé par cet auteur. On trouvera aussi dans [6] une comparaison des résultats obtenus avec le théorème de dichotomie de deux lois gaussiennes ([7] ; cor. 8.3), et l'on pourra se convaincre de l'importance de la nature du bruit, notre modèle et le modèle étudié en [6] étant radicalement différents, malgré leurs analogies.

## II RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

1) Notre premier résultat servira de modèle aux démonstrations ultérieures .

**Théorème général**  *$B$  étant un bruit gaussien centré quelconque, soit  $\theta_0$  et  $\theta_1$  deux signaux vérifiant, relativement à une sous-suite  $(t_{n(k)}; k \geq 1)$  de la suite  $T$  des instants d'observation, la condition :*

$$(11) \quad \forall k \geq 2, \quad f_{n(k)}(\theta_0) < f_{n(k)}(\theta_1).$$

Il existe alors un test uniformément convergent de l'hypothèse :

$\Theta_0 = (\theta ; \theta \in \Theta \text{ et } \forall k \geq 2, f_{n(k)}(\theta) \leq f_{n(k)}(\theta_0))$  contre l'hypothèse :

$\Theta_1 = (\theta ; \theta \in \Theta \text{ et } \forall k \geq 2, f_{n(k)}(\theta) \geq f_{n(k)}(\theta_1))$  si l'on a :

$$(12) \quad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(f_{n(k)}(\theta_1) - f_{n(k)}(\theta_0))^2}{\sigma_{n(k)}^2} = +\infty.$$

■ La distance en variations de deux lois de probabilité  $\mu$  et  $\nu$  sur  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$  définie par :

$$d_V(\mu ; \nu) = \text{Sup}(|\mu(B) - \nu(B)| ; B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}))$$

vérifie l'égalité suivante, lorsque  $\mu$  et  $\nu$  admettent respectivement des densités  $f$  et  $g$  :

$$(13) \quad d_V(\mu ; \nu) = \mu\{f \geq g\} - \nu\{f \geq g\} = \mu\{f > g\} - \nu\{f > g\}.$$

S'il s'agit de deux lois normales de même variance  $\sigma^2 > 0$ , cette distance s'exprime à partir de la fonction de répartition  $F$  de  $\mathcal{N}(0, 1)$  par :

$$(14) \quad d_V(\mathcal{N}(m, \sigma^2); \mathcal{N}(m', \sigma^2)) = 2F\left(\frac{|m - m'|}{2\sigma}\right) - 1.$$

La distance en variations des deux lois conditionnelles  $P_{\theta_0}^{x^{(n(k)-1)}}$  et  $P_{\theta_1}^{x^{(n(k)-1)}}$  est donc, compte-tenu de (5), égale à :

$$d_{n(k)} \stackrel{\text{déf}}{=} 2F\left(\frac{|M_{\theta_1}(x^{(n(k)-1)}) - M_{\theta_0}(x^{(n(k)-1)})|}{2\sigma_{n(k)}}\right) - 1.$$

soit, d'après (10) et (11) :

$$(15) \quad d_{n(k)} = 2F\left(\frac{f_{n(k)}(\theta_1) - f_{n(k)}(\theta_0)}{2\sigma_{n(k)}}\right) - 1.$$

De plus, le borélien  $B_{n(k)}(x^{(n(k)-1)})$  de la forme  $\{f \geq g\}$  qui sépare le mieux, au sens de (13), les deux lois conditionnelles considérées est égal à :

$$\left\{ x; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{n(k)}} e^{-\frac{(x - M_{\theta_0}(x^{(n(k)-1)}))^2}{2\sigma_{n(k)}^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{n(k)}} e^{-\frac{(x - M_{\theta_1}(x^{(n(k)-1)}))^2}{2\sigma_{n(k)}^2}} \right\},$$

soit, tous calculs faits, compte-tenu de (6), (10) et (11), égal à :

$$(16) \quad B_{n(k)}(x^{(n(k)-1)}) = ] - \infty ; \frac{1}{2}(f_{n(k)}(\theta_0) + f_{n(k)}(\theta_1)) + \sum_{j=1}^{n(k)-1} a_j^{n(k)} \cdot x_j].$$

Par conséquent, nous avons, d'après (13) :

$$(17) \quad \begin{cases} \forall k \geq 2, \\ P_{\theta_0}^{x^{(n(k)-1)}}(B_{n(k)}(x^{(n(k)-1)})) = d_{n(k)} + P_{\theta_1}^{x^{(n(k)-1)}}(B_{n(k)}(x^{(n(k)-1)})). \end{cases}$$

Il est clair que pour tout entier  $k \geq 2$ , nous avons :

$$\begin{aligned} p_{n(k)}(\theta) &\stackrel{\text{déf}}{=} P_{\theta}^{x^{(n(k)-1)}}(B_{n(k)}(x^{(n(k)-1)})) \\ &= F\left(\frac{f_{n(k)}(\theta_0) + f_{n(k)}(\theta_1) - 2f_{n(k)}(\theta)}{2\sigma_{n(k)}}\right), \end{aligned}$$

qui est une fonction décroissante de  $f_{n(k)}(\theta)$ . Il en résulte, par définition de  $\Theta_0$  et de  $\Theta_1$ , que la formule (17) s'étend comme suit, pour tout entier  $n \geq 2$  :

$$(18) \quad \text{Min}\left(P_{\theta}^{x^{(n-1)}}(B_n(x^{(n-1)})) ; \theta \in \Theta_0\right) = p_n + d_n, \quad \text{avec :}$$

$$(19) \quad p_n \stackrel{\text{déf}}{=} p_n(\theta_1) = \text{Max}\left(P_{\theta}^{x^{(n-1)}}(B_n(x^{(n-1)})) ; \theta \in \Theta_1\right),$$

à condition de poser, pour tout entier  $n \geq 2$  n'appartenant pas à la suite extraite  $(n(k) ; k \geq 2)$  :

$$d_n = 0 \quad \text{et} \quad \forall x^{(n-1)}, B_n(x^{(n-1)}) = \mathbf{R}.$$

En appliquant le théorème de J. Geffroy, ce qui est justifié par (18) et (19), et après avoir remarqué que si  $d_n \neq 0$ ,  $p_n + \frac{1}{2}d_n = \frac{1}{2}$ , on obtient que la suite des boréliens  $(C_n ; n \geq 1)$  définie par :

$$(20) \quad C_n = \left\{x^{(n)} ; \sum_{j=2}^n d_j \cdot 1_{B_j(x^{(j-1)})}(x_j) \geq \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n d_j\right\}$$

vérifie :

$$(21) \quad \begin{cases} \forall n \geq 1, \text{Inf}(P_{\theta}^{(n)}(C_n) ; \theta \in \Theta_0) \geq 1 - e^{-\frac{3}{8} \sum_{j=2}^n d_j^2} \\ \text{Sup}(P_{\theta}^{(n)}(C_n) ; \theta \in \Theta_1) \leq e^{-\frac{3}{8} \sum_{j=2}^n d_j^2} \end{cases}$$

Au lieu du théorème de J. Geffroy, on peut utiliser un théorème de R. Moché (voir [5] ; th. 2). Le coefficient  $\frac{3}{8}$  provient d'ailleurs de l'application de ce théorème. Mais c'est la seule amélioration qu'il apporte dans ce cas particulier.

D'après (15), les suites  $(d_{n(k)} ; k \geq 2)$  et  $\left(\frac{1}{\sigma_{n(k)}}(f_{n(k)}(\theta_1) - f_{n(k)}(\theta_0)); k \geq 2\right)$  convergent toutes les deux vers 0 ou ne convergent ni l'une ni l'autre vers 0, quand  $k$  tend vers  $+\infty$ .

Dans le premier cas,  $d_{n(k)}$  et  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{n(k)}}(f_{n(k)}(\theta_1) - f_{n(k)}(\theta_0))$  sont des infiniments petits équivalents, quand  $k$  tend vers  $+\infty$ . Par conséquent, la série  $\sum_{k \geq 2} d_{n(k)}^2$  et la série (12) sont toujours de même nature. Si cette dernière diverge, on a donc :

$$\sum_{j=2}^{+\infty} d_j^2 = \sum_{k=2}^{+\infty} d_{n(k)}^2 = +\infty,$$

ce qui implique, d'après (21), que :

$$\begin{cases} \text{Inf}(P_{\theta}^{(n)}(C_n) ; \theta \in \Theta_0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \\ \text{Sup}(P_{\theta}^{(n)}(C_n) ; \theta \in \Theta_1) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0. \end{cases}$$

Autrement dit,  $(C_n ; n \geq 1)$  est la suite des régions d'acceptation d'un test uniformément convergent de l'hypothèse  $\Theta_0$  contre l'hypothèse  $\Theta_1$ . ■

## 2) Remarques

a) Les hypothèses  $\Theta_0$  et  $\Theta_1$  jouent des rôles symétriques, et  $(\mathbf{R}^n - C_n ; n \geq 1)$  est de même la suite des régions d'acceptation d'un test uniformément convergent de  $\Theta_1$  contre  $\Theta_0$ .

b) La condition (12) (et de même la condition (25) ci-dessous) implique que  $\theta_1 - \theta_0$  n'appartient pas à l'espace autoreproduisant associé au bruit  $B$  et par conséquent, implique que les lois  $P_{\theta_0}$  et  $P_{\theta_1}$  de  $X$  sous respectivement les hypothèses  $\theta = \theta_0$  et  $\theta = \theta_1$  sont orthogonales (cf. ([7] ; cor. 8.3) pour le théorème général de dichotomie exprimé en termes d'espaces autoreproduisants, et ([6] ; II.3) pour l'application de ce résultat dans le cas d'un bruit brownien). Ces méthodes ont été introduites en théorie du signal par N. Kailath ([4]).

### 3) Cas où le bruit $B$ est un processus de Ornstein-Uhlenbeck

Dans ce cas particulier, on sait (cf. [2] ; III.8.e, p.99) que, quel que soit l'entier  $n \geq 2$ , on a :

$$(22) \quad \begin{cases} a_1^n = \dots = a_{n-2}^n = 0, a_{n-1}^n = e^{-(t_n - t_{n-1})} \\ \sigma_n^2 = 1 - e^{-2(t_n - t_{n-1})}. \end{cases}$$

Il en résulte que, pour tout signal  $\theta$ , on a, à partir de (6) et de (9) :

$$(23) \quad \begin{cases} f_n(\theta) = \theta(t_n) - e^{-(t_n - t_{n-1})}\theta(t_{n-1}) \\ \forall x^{(n-1)}, M_\theta(x^{(n-1)}) = \theta(t_n) - e^{-(t_n - t_{n-1})}(\theta(t_{n-1}) - x_{n-1}). \end{cases}$$

4) On peut donc traduire comme suit le théorème précédent :

**Théorème 2** *On suppose que le bruit  $B$  est un processus de Ornstein-Uhlenbeck et que la différence  $\bar{\theta} = \theta_1 - \theta_0$  de deux signaux  $\theta_0$  et  $\theta_1$  vérifie les inégalités suivantes :*

$$(24) \quad \forall n \geq 2 \quad e^{t_{n-1}}\bar{\theta}(t_{n-1}) < e^{t_n}\bar{\theta}(t_n),$$

relativement à une suite d'instantants d'observation  $(t_n; n \geq 1)$ . Alors, pour qu'il existe un test uniformément convergent de l'hypothèse :

$$\Theta_0 = (\theta; \theta \in \Theta \text{ et } e^{t_n}\theta(t_n) - e^{t_{n-1}}\theta(t_{n-1}) \leq e^{t_n}\theta_0(t_n) - e^{t_{n-1}}\theta_0(t_{n-1}))$$

contre l'hypothèse :

$$\Theta_1 = (\theta; \theta \in \Theta \text{ et } e^{t_n}\theta(t_n) - e^{t_{n-1}}\theta(t_{n-1}) \geq e^{t_n}\theta_1(t_n) - e^{t_{n-1}}\theta_1(t_{n-1}))$$

il suffit que :

$$(25) \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(e^{t_n}\bar{\theta}(t_n) - e^{t_{n-1}}\bar{\theta}(t_{n-1}))^2}{e^{2t_n} - e^{2t_{n-1}}} = +\infty.$$

### 5) Remarque

Les formules (22) et (23) montrent, comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, que la chaîne  $(X(t_n); n \geq 1)$  est markovienne. C'est ce qui explique la simplicité du critère (25) et des résultats suivants.

### III TESTS DE DÉTECTION D'UN SIGNAL DANS UN BRUIT DE ORNSTEIN-UHLENBECK

1) Pour le premier test, nous utiliserons les notations suivantes :

-  $\Theta^*$  est l'ensemble des signaux  $\theta$  de classe  $C^1$  sur  $[0; +\infty[$ , qui vérifient :

$$(26) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} (\theta(t) + \dot{\theta}(t)) < 0 \quad \text{ou} \quad \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} (\theta(t) + \dot{\theta}(t)) > 0,$$

- pour tout signal  $\theta$  et pour tout couple d'entiers  $r$  et  $s$  tels que :  $1 \leq r \leq s$ ,  $P_\theta^{(r,s)}$  désigne la loi du vecteur aléatoire  $(X_r, \dots, X_s)$ ,

- pour tout entier  $m \geq 1$ ,  $C_m$  est le borélien de  $\mathbf{R}^{m^3}$  constitué des  $m^3$ -uples  $x^{(m^3)}$  vérifiant les deux inégalités suivantes :

$$(27) \quad \begin{cases} \text{Card}\left(j; 2 \leq j \leq m^3 \text{ et } e \cdot x_j - x_{j-1} \leq \frac{e-1}{2m}\right) \geq \frac{m^3-1}{2} \\ \text{Card}\left(j; 2 \leq j \leq m^3 \text{ et } e \cdot x_j - x_{j-1} \geq -\frac{e-1}{2m}\right) \geq \frac{m^3-1}{2}. \end{cases}$$

La suite  $(\alpha_m; m \geq 1)$  étant définie par :

$$(28) \quad \forall m \geq 1, \quad \alpha_m \stackrel{\text{déf}}{=} 2F\left(\frac{1}{2m} \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\right) - 1,$$

on utilisera le fait que :

$$(29) \quad (m^3 - 1)\alpha_m^2 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{puisque :} \quad (m^3 - 1)\alpha_m^2 \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e-1}{e+1} \cdot \frac{m}{2\pi}.$$

2) Notre premier test est décrit dans le résultat qui suit :

**Théorème 3** *Le bruit  $B$  étant un processus de Ornstein-Uhlenbeck et l'hypothèse générale  $\Theta$  étant égale à  $\{0\} \cup \Theta^*$ , il existe un test convergent de l'hypothèse que l'on ne reçoit pas de signal contre l'hypothèse que l'on reçoit un signal appartenant à  $\Theta^*$ .*

*La suite des régions d'acceptation de l'hypothèse nulle de ce test est la suite  $(C_m; m \geq 1)$  définie ci-dessus, et qui vérifie :*

$$(30) \quad \forall m \geq 1, \quad P_0^{(m+1, m+m^3)}(C_m) \geq 1 - 2e^{-\frac{3(m^3-1)}{8}\alpha_m^2}$$

(31) *pour tout signal  $\theta$  de  $\Theta^*$ , dès que  $m$  est assez grand, on a :*

$$P_\theta^{(m+1, m+m^3)}(C_m) \leq e^{-\frac{3(m^3-1)}{8}\alpha_m^2}$$

■ a) Pour tout entier  $m \geq 1$ , on considérera les hypothèses  $S_m^+$  et  $S_m^-$  définies par :

$$\begin{cases} S_m^+ = (\theta; \theta \in \Theta \text{ et } \forall t \geq m, \theta(t) + \dot{\theta}(t) \geq \frac{1}{m}) \\ S_m^- = (\theta; \theta \in \Theta \text{ et } \forall t \geq m, \theta(t) + \dot{\theta}(t) \leq -\frac{1}{m}) \end{cases}$$

Il est clair, d'après (26), que :

$$(32) \quad S_m^+ \cup S_m^- \underset{m \rightarrow +\infty}{\uparrow} \Theta^*.$$

b) Dans cette partie de la démonstration,  $m$  désigne un entier positif quelconque fixé. Supposons que les observations se font aux instants ( $t_n^m = m+n$ ;  $n \geq 1$ ) et, en nous référant aux notations de la démonstration précédente, posons :  $\theta_0 = 0$  et  $\theta_1 = \frac{1}{m}$ .

La condition (24) du théorème 2 est trivialement vérifiée par  $\bar{\theta} = \frac{1}{m}$ , ainsi que la condition (25) puisque l'on a :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(e^{t_n^m} \bar{\theta}(t_n^m) - e^{t_{n-1}^m} \bar{\theta}(t_{n-1}^m))^2}{e^{2t_n^m} - e^{2t_{n-1}^m}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e-1}{(e+1)m^2} = +\infty.$$

Les deux hypothèses  $\Theta_0$  et  $\Theta_1$  se séparent donc asymptotiquement uniformément suivant la suite  $(C_n^{m,+}; n \geq 1)$  des cylindres définis, conformément à (20) par :

$$(33) \quad C_n^{m,+} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ x^{(n)} ; \sum_{j=2}^n d_j \cdot 1_{B_{j, (x^{(j-1)})}}(x_j) \geq \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n d_j \right\},$$

où, quel que soit l'entier  $j \geq 2$ , et d'après (15), (23) et (28), on a :

$$(34) \quad d_j = 2F\left(\frac{1}{2m} \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\right) - 1 = \alpha_m.$$

On en déduit, d'après (21), que ces cylindres satisfont à :

$$(35) \quad \begin{cases} \forall n \geq 1, \quad \text{Inf}(P_\theta^{(n)}(C_n^{m,+}); \theta \in \Theta_0) \geq 1 - e^{-\frac{3(n-1)}{8} \alpha_m^2} \\ \text{Sup}(P_\theta^{(n)}(C_n^{m,+}); \theta \in \Theta_1) \leq e^{-\frac{3(n-1)}{8} \alpha_m^2} \end{cases}$$

où  $P_\theta^{(n)}$  désigne la loi du vecteur  $(X(t_1^m), \dots, X(t_n^m))$ , soit la loi du vecteur  $(X(m+1), \dots, X(m+n))$  conformément aux notations précédentes.

Les cylindres  $C_n^{m,+}$ ,  $n \geq 1$  sont en fait très simples puisque, d'après (16) et (23), on a :

$$\forall j \geq 2 \quad \text{et} \quad \forall x^{(j)}, 1_{B_j(x^{(j-1)})(x_j)} = 1 \iff e \cdot x_j - x_{j-1} \leq \frac{e-1}{2m},$$

ce qui permet d'écrire, puisque tous les  $d_j$ ,  $j \geq 2$  sont égaux (cf. (33) et (34)) :

$$(36) \quad \begin{cases} \forall n \geq 2 \\ C_n^{m,+} = \left( x^{(n)}; \text{Card}(j; 2 \leq j \leq n \text{ et } e \cdot x_j - x_{j-1} \leq \frac{e-1}{2m}) \geq \frac{n-1}{2} \right). \end{cases}$$

Par définition de  $S_m^+$ , pour tout signal  $\theta$  de  $S_m^+$  et pour tout entier  $n \geq 2$ , on a :

$$\begin{aligned} e^{t_n^m} \theta(t_n^m) - e^{t_{n-1}^m} \theta(t_{n-1}^m) &= \int_{t_{n-1}^m}^{t_n^m} e^t (\theta(t) + \dot{\theta}(t)) dt \\ &\geq \frac{1}{m} \int_{t_{n-1}^m}^{t_n^m} e^t dt \\ &= \frac{1}{m} (e^{t_n^m} - e^{t_{n-1}^m}). \end{aligned}$$

Cela signifie que  $S_m^+ \subset \Theta_1$ , si bien que, au lieu de (35), on retiendra :

$$(37) \quad \begin{cases} \forall n \geq 1, \quad P_0^{(n)}(C_n^{m,+}) \geq 1 - e^{-\frac{3(n-1)}{8} \alpha_m^2} \\ \text{Sup}(P_\theta^{(n)}(C_n^{m,+}); \theta \in S_m^+) \leq e^{-\frac{3(n-1)}{8} \alpha_m^2}. \end{cases}$$

On démontrerait de manière analogue que les cylindres  $C_n^{m,-}$ ,  $n \geq 1$  définis par :

$$C_n^{m,-} \stackrel{\text{déf}}{=} \left( x^{(n)}; \text{Card}(j; 2 \leq j \leq n \text{ et } e \cdot x_j - x_{j-1} \geq -\frac{e-1}{2m}) \geq \frac{n-1}{2} \right)$$

vérifient :

$$(38) \quad \begin{cases} \forall n \geq 1, \quad P_0^{(n)}(C_n^{m,-}) \geq 1 - e^{-\frac{3(n-1)}{8} \alpha_m^2} \\ \text{Sup}(P_\theta^{(n)}(C_n^{m,-}); \theta \in S_m^-) \leq e^{-\frac{3(n-1)}{8} \alpha_m^2}. \end{cases}$$

La suite des cylindres  $C_n^m \stackrel{\text{déf}}{=} C_n^{m,+} \cap C_n^{m,-}$ ,  $n \geq 1$  satisfait donc, d'après (37) et (38), les inégalités :

$$(39) \quad \begin{cases} \forall n \geq 1, \quad P_0^{(n)}(C_n^m) \geq 1 - 2e^{-\frac{3(n-1)}{8} \alpha_m^2} \\ \text{Sup}(P_\theta^{(n)}(C_n^m); \theta \in S_m^+ \cup S_m^-) \leq e^{-\frac{3(n-1)}{8} \alpha_m^2}. \end{cases}$$

c) Considérons maintenant les cylindres  $C_m$ ,  $m \geq 1$  introduits ci-dessus.

Puisque l'on a, d'après (27) :  $\forall m \geq 1, C_m = C_{m^3}$ , on peut écrire (39) sous la forme :

$$\begin{cases} \forall m \geq 1, P_0^{(m+1, m+m^3)}(C_m) \geq 1 - 2e^{-\frac{3(m^3-1)}{8}\alpha_m^2} \\ \text{Sup}(P_\theta^{(m+1, m+m^3)}(C_m); \theta \in S_m^+ \cup S_m^-) \leq e^{-\frac{3(m^3-1)}{8}\alpha_m^2}, \end{cases}$$

autrement dit, les inégalités (30) et (31) du théorème 3 sont prouvées, compte-tenu de (32).

Si on considère le test de l'hypothèse qu'il n'y a pas de signal utile contre l'hypothèse qu'on en reçoit un appartenant à  $\Theta^*$ ,  $(C_m; m \geq 1)$  étant la suite des régions d'acceptation de l'hypothèse nulle de ce test, (30) et (31) signifient que son niveau et sa puissance convergent respectivement vers 0 et 1. Il s'agit donc bien d'un test convergent. ■

### 3) Mise en œuvre de ce test

Etant donné  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , on choisit d'abord un entier  $m \geq 1$  tel que :

$$2e^{-\frac{3(m^3-1)}{8}\alpha_m^2} \leq \alpha, \text{ ou } (m^3 - 1) \left( 2F\left(\frac{1}{2m} \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\right) - 1 \right)^2 \geq \frac{8}{3} \text{Log}\left(\frac{2}{\alpha}\right).$$

Ensuite, on mesure  $X(t, \omega_0)$  aux instants  $m+1, \dots, m+m^3$  et on obtient le  $m^3$ -uple :

$$(x_1, \dots, x_{m^3}) = (X(m+1, \omega_0), \dots, X(m+m^3, \omega_0)).$$

On calcule alors les nombres :

$$\begin{cases} N_1 = \text{Card}(j ; 2 \leq j \leq m^3 \text{ et } e \cdot x_j - x_{j-1} \leq \frac{e-1}{2m}) \\ N_2 = \text{Card}(j ; 2 \leq j \leq m^3 \text{ et } e \cdot x_j - x_{j-1} \geq -\frac{e-1}{2m}). \end{cases}$$

Si  $N_1 \geq \frac{m^3-1}{2}$  et  $N_2 \geq \frac{m^3-1}{2}$ , on accepte l'hypothèse qu'il n'y a pas de signal ; sinon on admet qu'il y en a un, appartenant à  $\Theta^*$ . Si, par exemple,  $\Theta^*$  est un ensemble d'alarmes, la probabilité de fausse alarme est alors majorée par  $\alpha$ , qui est le niveau du test, tandis que l'on ne peut rien dire de la probabilité de conclure à tort qu'il n'y a pas d'alarme, puisque notre résultat est seulement un résultat asymptotique.

4) Pour le deuxième test, nous utiliserons les notations suivantes :

-  $\Theta^{**}$  est l'ensemble des signaux  $\theta$  non nuls, de classe  $C^1$  sur  $[0, +\infty[$ , qui admettent une période donnée  $P > 0$  et qui vérifient :

$$(40) \quad \theta(0) + \dot{\theta}(0) \neq 0,$$

- pour tout couple d'entiers positifs  $m$  et  $k$ , et pour tout signal  $\theta$ , on notera  $P_{\theta, m}^{(k)}$  la loi du vecteur aléatoire

$$(X_0, X_{\frac{P}{m+1}}, X_P, X_{P+\frac{P}{m+1}}, \dots, X_{(k-1)P}, X_{(k-1)P+\frac{P}{m+1}}),$$

- pour tout entier  $m \geq 1$ ,  $C_m$  sera le borélien de  $\mathbf{R}^{2m^4}$  constitué des  $(2m^4)$ -uples  $x^{(2m^4)}$  vérifiant les deux inégalités :

$$(41) \quad \begin{cases} \text{Card}(j ; 1 \leq j \leq m^4 \text{ et } e^{\frac{P}{m+1}} \cdot x_{2j} - x_{2j-1} \leq \frac{1}{2m}(e^{\frac{P}{m+1}} - 1)) \geq \frac{m^4}{2} \\ \text{Card}(j ; 1 \leq j \leq m^4 \text{ et } e^{\frac{P}{m+1}} \cdot x_{2j} - x_{2j-1} \geq -\frac{1}{2m}(e^{\frac{P}{m+1}} - 1)) \geq \frac{m^4}{2}. \end{cases}$$

La suite  $(\beta_m ; m \geq 1)$  étant définie par :

$$(42) \quad \forall m \geq 1, \beta_m \stackrel{\text{déf}}{=} 2F \left( \frac{1}{2m} \sqrt{\frac{e^{\frac{P}{m+1}} - 1}{e^{\frac{P}{m+1}} + 1}} \right) - 1,$$

on utilisera le fait que :

$$(43) \quad m^4 \beta_m^2 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty \text{ puisque : } \beta_m \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{P}}{2\sqrt{\pi}m^{3/2}}.$$

5) Notre deuxième test est décrit dans l'énoncé qui suit :

**Théorème 4** *Le bruit  $B$  étant un processus de Ornstein-Uhlenbeck et l'hypothèse générale  $\Theta$  étant égale à  $\{0\} \cup \Theta^{**}$ , la suite des cylindres  $C_m, m \geq 1$  définis ci-dessus est la suite des régions d'acceptation de l'hypothèse nulle d'un test convergent de l'hypothèse que l'on ne reçoit pas de signal contre l'hypothèse que l'on reçoit un signal appartenant à  $\Theta^{**}$ .*

*Plus précisément, les cylindres  $C_m, m \geq 1$  vérifient :*

$$(44) \quad \forall m \geq 1, P_{0, m}^{(m^4)}(C_m) \geq 1 - 2e^{-\frac{2}{3}m^4 \beta_m^2}$$

(45) *Pour tout signal  $\theta$  de  $\Theta^{**}$ , dès que  $m$  est assez grand, on a :*

$$P_{\theta, m}^{(m^4)}(C_m) \leq e^{-\frac{2}{3}m^4 \beta_m^2}.$$

■ a) Pour tout entier  $m \geq 1$ , on considérera les deux hypothèses  $T_m^+$  et  $T_m^-$  définies par :

$$\begin{aligned} T_m^+ &= (\theta ; \theta \in \Theta^{**} \text{ et } \forall t \in [0, \frac{P}{m+1}], \theta(t) + \dot{\theta}(t) \geq \frac{1}{m}) \\ T_m^- &= (\theta ; \theta \in \Theta^{**} \text{ et } \forall t \in [0, \frac{P}{m+1}], \theta(t) + \dot{\theta}(t) \leq -\frac{1}{m}). \end{aligned}$$

Il est clair, d'après (40), que :

$$(46) \quad \Theta^{**} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \uparrow (T_m^+ \cup T_m^-).$$

b) Dans cette partie de la démonstration,  $m$  désigne un entier positif quelconque fixé. Supposons que les observations se font aux instants  $(t_n^m ; n \geq 1)$  définis par :

$$(47) \quad \forall k \geq 1, t_{2k-1}^m = (k-1)P \text{ et } t_{2k}^m = (k-1)P + \frac{P}{m+1},$$

et, en nous référant directement aux notations du théorème général, posons :

$$(48) \quad \theta_0 = 0, \theta_1 = \bar{\theta} = \frac{1}{m} \text{ et } \forall k \geq 1, n(k) = 2k.$$

Pour tout signal  $\theta$  de  $\Theta^{**}$ , nous avons, d'après (23) :

$$\forall k \geq 1, f_{n(k)}(\theta) = \theta(t_{n(k)}^m) - e^{-(t_{n(k)}^m - t_{n(k)-1}^m)} \theta(t_{n(k)-1}^m),$$

soit, en utilisant (47) et la périodicité de  $\theta$  :

$$(49) \quad \forall k \geq 1, f_{n(k)}(\theta) = \theta\left(\frac{P}{m+1}\right) - e^{-\frac{P}{m+1}} \cdot \theta(0).$$

On en déduit, compte-tenu de (48), que :

$$\left\{ \begin{aligned} \forall k \geq 1, 0 = f_{n(k)}(\theta_0) < f_{n(k)}(\theta_1) &= \frac{1}{m}(1 - e^{-\frac{P}{m+1}}) \\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(f_{n(k)}(\theta_1) - f_{n(k)}(\theta_0))^2}{\sigma_{n(k)}^2} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1 - e^{-\frac{P}{m+1}})^2}{m^2(1 - e^{-\frac{2P}{m+1}})} = +\infty. \end{aligned} \right.$$

Les hypothèses (11) et (12) du théorème général sont donc satisfaites . Par conséquent, il existe un test uniformément convergent de l'hypothèse  $\Theta_0$  contre l'hypothèse  $\Theta_1$ . Pour décrire ce test posons, comme précédemment, et quel que soit l'entier  $k \geq 1$  :

$$d_{n(k)} = 2F \left( \frac{1 - e^{-\frac{P}{m+1}}}{2m\sqrt{1 - e^{-\frac{2P}{m+1}}}} \right) - 1 = \beta_m,$$

d'après (15) et (42).

$$(50) \quad B_{n(k)}(x^{(n(k)-1)}) = ] - \infty, \frac{1}{2m}(1 - e^{-\frac{P}{m+1}}) + e^{-\frac{P}{m+1}} \cdot x_{n(k)-1} ],$$

d'après (16) et (22). Les cylindres introduits par (20) s'écrivent :

$$C_{n(k)}^{m,+} \stackrel{\text{déf}}{=} \{ x^{(n(k))} ; \sum_{j=1}^k 1_{B_{n(j)}(x^{(n(j)-1)})}(x_{n(j)}) \geq \frac{1}{2}k \},$$

soit d'après (50) :

$$(51) \quad C_{2k}^{m,+} = \{ x^{(2k)} ; \text{Card} \left( j ; 1 \leq j \leq k \text{ et } e^{\frac{P}{m+1}} \cdot x_{2j} - x_{2j-1} \leq \frac{e^{\frac{P}{m+1}} - 1}{2m} \right) \geq \frac{k}{2} \}$$

Continuant à suivre la démonstration du théorème général, on applique le théorème de J. Geffroy, ce qui donne :

$$(52) \quad \begin{cases} \forall k \geq 1, \text{Inf}(P_{\theta,m}^{(k)}(C_{2k}^{m,+}) ; \theta \in \Theta_0) \geq 1 - e^{-\frac{3}{8}k\beta_m^2} \\ \forall k \geq 1, \text{Sup}(P_{\theta,m}^{(k)}(C_{2k}^{m,+}) ; \theta \in \Theta_1) \leq e^{-\frac{3}{8}k\beta_m^2} . \end{cases}$$

Par définition de  $T_m^+$  et d'après (49), tout signal  $\theta$  de  $T_m^+$  vérifie :

$$\begin{aligned} \forall k \geq 1, f_{n(k)}(\theta) &= \theta\left(\frac{P}{m+1}\right) - e^{-\frac{P}{m+1}} \cdot \theta(0) \\ &= e^{-\frac{P}{m+1}} \int_0^{\frac{P}{m+1}} e^t(\theta(t) + \dot{\theta}(t))dt \\ &\geq e^{-\frac{P}{m+1}} \cdot \frac{1}{m} \cdot (e^{\frac{P}{m+1}} - 1) \\ &= f_{n(k)}(\theta_1) . \end{aligned}$$

Cela signifie que  $T_m^+ \subset \Theta_1$  et permet de ne retenir de (52) que :

$$(53) \quad \begin{cases} \forall k \geq 1, P_{0,m}^{(k)}(C_{2k}^{m,+}) \geq 1 - e^{-\frac{3}{8}k\beta_m^2} \\ \forall k \geq 1, \text{Sup}(P_{\theta,m}^{(k)}(C_{2k}^{m,+}) ; \theta \in T_m^+) \leq e^{-\frac{3}{8}k\beta_m^2} . \end{cases}$$

On démontre de manière analogue que :

$$(54) \quad \begin{cases} \forall k \geq 1, P_{0,m}^{(k)}(C_{2k}^{m,-}) \geq 1 - e^{-\frac{3}{8}k\beta_m^2} \\ \forall k \geq 1, \text{Sup}(P_{\theta,m}^{(k)}(C_{2k}^{m,-}) ; \theta \in T_m^-) \leq e^{-\frac{3}{8}k\beta_m^2} \end{cases}$$

les cylindres  $C_{2k}^{m,-}$ ,  $k \geq 1$  étant définis par :

$$C_{2k}^{m,-} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ x^{(2k)} ; \text{Card} \left( j ; 1 \leq j \leq k \text{ et } e^{\frac{P}{m+1}} \cdot x_{2j} - x_{2j-1} \geq -\frac{e^{\frac{P}{m+1}} - 1}{2m} \right) \geq \frac{k}{2} \right\} .$$

D'après (41), on a, quel que soit l'entier  $m \geq 1$  :  $C_m = C_{2m^4}^{m,+} \cap C_{2m^4}^{m,-}$ . Par conséquent, d'après (53) et (54), la suite des cylindres  $(C_m ; m \geq 1)$  vérifie :

$$\begin{cases} \forall m \geq 1, P_{0,m}^{(m^4)}(C_m) \geq 1 - 2e^{-\frac{3}{8}m^4\beta_m^2} \\ \forall m \geq 1, \text{Sup}(P_{\theta,m}^{(m^4)}(C_m); \theta \in T_m^+ \cup T_m^-) \leq e^{-\frac{3}{8}m^4\beta_m^2} \end{cases}$$

(44) est donc satisfaite, ainsi que (45), en utilisant (46). On peut finalement en conclure, d'après (43), que le test décrit dans le théorème 4 converge. ■

## 6) Remarques

a) La mise en œuvre de ce test appelle en gros les mêmes remarques que le test précédent. Il s'agit d'un résultat asymptotique.

b) Comme nous l'avons déjà signalé de manière plus générale (voir II.2.b), les contre-hypothèses  $\Theta^*$  et  $\Theta^{**}$  ne rencontrent pas l'espace autoreproduisant du processus de Ornstein-Uhlenbeck.

## RÉFÉRENCES

- [1] N. Bouleau *Processus stochastiques et applications*. Hermann, Paris (1988).
- [2] W. Feller *An Introduction to Probability Theory and Its Applications ; Vol. II*. Wiley, New-York (1966, 2<sup>nd</sup> Ed.).
- [3] J. Geffroy *Inégalités pour le niveau de signification et la puissance de certains tests reposant sur des données quelconques*. C.R. Acad. Sc. Paris, Ser. A, t. 282 (1976) 1299-1301.
- [4] N. Kailath *RKHS Approach to Detection and Estimation Problems - Part I : Deterministic Signals in Gaussian Noise* ; IEEE Trans. Inf. Th., Vol. IT-17 n° 5 (1971), p.530-549.
- [5] R. Moché *La décantation en estimation asymptotique*. Pub. Inst. Stat. Univ. Paris. Vol. XXXIII, fasc. 2, (1988) 39-77.
- [6] R. Moché *Quelques tests relatifs à la détection d'un signal dans un bruit gaussien*. Actes des "Jornadas de Probabilidades e Estatística 1989" Département de Mathématiques de l'Université de Coimbra (1990).
- [7] J. Neveu *Processus aléatoires gaussiens*. Presses de l'Université de Montréal (1968).