Statistique et analyse des données

Alain Berlinet

Christian Francq

Stationnarité et identification d'un processus bilinéaire strictement superdiagonal

Statistique et analyse des données, tome 15, nº 1 (1990), p. 1-24.

<http://www.numdam.org/item?id=SAD_1990__15_1_1_0>

Statistique et Analyse des Données
1990 - Vol. 15 n° 1 p. 1 - 24

STATIONNARITE ET IDENTIFICATION D'UN PROCESSUS BILINEAIRE STRICTEMENT SUPERDIAGONAL

Alain BERLINET et Christian FRANCQ

Laboratoire de Probabilités et Statistique
Université de Montpellier II
place Eugène Bataillon
F-34 090 MONTPELLIER Cedex

Résumé

Nous considérons la sous-classe des processus purement bilinéaires et strictement superdiagonaux :

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{k=1}^{Q} \sum_{j=k+1}^{P} b_{jk} X_{t-j} \varepsilon_{t-k} \qquad (1)$$

La présente étude est constituée de deux parties :

(i) lorsque $Q = 1$, nous montrons que la condition $\sigma^2 (b_{21}^2 + \dots + b_{P1}^2) < 1$, où σ^2 est la variance du bruit blanc fort (ε_t), est nécessaire et suffisante pour qu'il existe dans L_2 un processus stationnaire unique non anticipatif vérifiant la relation (1). Ceci généralise le résultat obtenu par Guégan [1981] dans le cas $P = 2$.

(ii) les degrés P et Q du modèle (1) sont identifiés à l'aide des moments d'ordre inférieur ou égal à trois. Ceci est appliqué à quelques simulations.

Mots-clés : modèles bilinéaires, existence d'une solution stationnaire, moments d'ordre 2 et 3, identification d'un modèle.

Classification AMS : 62 M 10, 60 G10

Manuscrit reçu en mai 1990, révisé en juillet 1990

Abstract

We investigate the subclass of strictly superdiagonal and completely bilinear models :

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{k=1}^{Q} \sum_{j=k+1}^{P} b_{jk} X_{t-j} \varepsilon_{t-k} \qquad (1)$$

This paper consists of two parts :

(i) when $Q = 1$ and (ε_t) is any sequence of i.i.d. variables with common variance σ^2, we show that $\sigma^2 (b_{21}^2 + \dots + b_{P1}^2) < 1$ is a necessary and sufficient condition for the existence and the uniqueness of a stationary process satisfying (1) and measurable with respect to $\sigma(\varepsilon_{t-u}, u \geq 0)$.

(ii) P and Q are characterized from second and third-order theoretical moments. Applicability is studied via simulations.

Keywords : bilinear models, stationary processes, second and third-order moments, identification.

1. INTRODUCTION

Nous nous intéressons ici à la classe des modèles bilinéaires de séries chronologiques. Ils vérifient une équation du type :

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} c_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{P} \sum_{k=1}^{Q} b_{jk} X_{t-j} \varepsilon_{t-k}$$

Ces modèles sont linéaires par rapport aux X_t ou aux ε_t lorsque l'on considère l'autre variable constante et ils sont une extension naturelle des processus ARMA. Ils peuvent modéliser des séries chronologiques que le modèle linéaire exclut. Ces modèles ont, en particulier, été utilisés en économie et en dynamique des populations. Grâce à une étude empirique des trajectoires, Guégan [1988] montre que le caractère explosif du processus est assez typique des processus bilinéaires et donc qu'ils peuvent modéliser des phénomènes physiques explosifs.

De nombreux travaux de recherche ont été développés sur les propriétés probabilistes, la théorie de l'identification et des tests et l'estimation des paramètres pour les modèles bilinéaires. Pour identifier le modèle à partir d'une réalisation $X_1,\ldots,X_N$ du processus, il faut résoudre le problème, encore peu abordé, du choix des degrés p,q,P,Q. Granger et Andersen [1978] proposent d'utiliser le critère d'Akaike, cependant celui-ci demande l'ajustement de beaucoup de modèles, ce qui est très coûteux. Le choix a priori des degrés est résolu dans le cas d'un ARMA par l'examen de fonctions de l'autocovariance [Berlinet (1985), Francq (1989)]. Akamanam [1983] a montré que, pour un processus bilinéaire, cela ne suffisait pas et qu'il fallait prendre en compte, lorsqu'ils existent, les moments d'ordre supérieur. En raison de la difficulté d'exprimer ces moments nous nous limiterons, dans cette étude, à la sous-classe des processus purement bilinéaires et strictement superdiagonaux, notés BL(0,0,P,Q), vérifiant :

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{k=1}^{Q} \sum_{j=k+1}^{P} b_{jk} X_{t-j} \varepsilon_{t-k} \quad (P > Q) \tag{1.1}$$

Les moments d'ordre 2 de ce modèle sont ceux d'une MA(Q-1). L'étude des moments d'ordre inférieur ou égal à 3 sera nécessaire et suffisante pour caractériser les degrés P et Q. Pour élargir la sous-classe des processus étudiés, il faudra étudier les moments d'ordre supérieur à 3 ; une bonne estimation des moments d'ordre élevé nécessite une réalisation de grande taille.

2. LE MODELE BL(0,0,P,1) SUPERDIAGONAL

$$X_t = \varepsilon_t + b_{21}\, \varepsilon_{t-1} X_{t-2} + \ldots + b_{P1}\, \varepsilon_{t-1} X_{t-P} \tag{2.1}$$

avec (ε_t) un bruit blanc fort de variance σ^2 et $P \geq 2$

Guégan [1981] a réalisé une étude approfondie du modèle superdiagonal BL(0,0,2,1).

Nous nous intéressons ici, dans le cadre du modèle un peu plus général (2.1), aux deux seuls problèmes suivants :

a) Existence d'un processus stationnaire (au sens fort) unique vérifiant (2.1).

b) Explicitation des moments d'ordre 3 en fonction des coefficients b_{j1} et de la variance σ^2 du bruit blanc.

Les problèmes a) et b) sont en fait réglés pour une large sous-classe de processus bilinéaires mais nous voulons ici des expressions simples et explicites portant sur les b_{j1} et σ^2.

Le problème a) se posera en particulier dans le choix des simulations de la quatrième partie et le problème b) dans l'identification du degré P.

2.A. CONDITION D'EXISTENCE ET DE STATIONNARITE

Théorème 1

Pour que l'équation (2.1) ait dans L_2 une solution stationnaire non anticipative, il faut et il suffit que

$$\sigma^2 (b_{21}^2 + \ldots + b_{P1}^2) < 1.$$

Cette solution est unique et donnée par

$$X_t = (1,0,\ldots,0)\, 6 \left[\tilde{\varepsilon}_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\prod_{k=1}^{j} B(t-k) \right] \tilde{\varepsilon}_{t-j} \right] \tag{2.2}$$

où

$$\tilde{\varepsilon}_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & b_{21}\varepsilon_t & \ldots & b_{P1}\varepsilon_t \\ 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & . & . \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Preuve de la condition nécessaire :

Si l'équation (2.1) admet dans L_2 une solution stationnaire non anticipative (X_t), on a :

$$E X_t = \sum_{j=2}^{P} b_{j1} E\left[\varepsilon_{t-1} X_{t-j}\right] = 0$$

puisque X_{t-j} est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(\varepsilon_u,\ u \leq t - j)$ engendrée par les ε_u, $u \leq t - j$. Donc $\operatorname{Var} X_t = E X_t^2 = \dfrac{\sigma^2}{1 - b_{21}^2\sigma^2 - \ldots - b_{P1}^2\sigma^2}$

ce qui permet de conclure.

Lemme 1

L'équation (2.1) possède dans L_2 au plus une solution stationnaire non anticipative.

Preuve :

Nous étendons à P quelconque la démonstration donnée par Guégan [1981] dans le cas où P = 2. Supposons qu'il existe 2 solutions stationnaires non anticipatives (X_t) et (Z_t) de l'équation (2.1) et notons

$$\gamma_t = E\,X_t Z_t \text{ et } A = \frac{\sigma^2}{1 - b_{21}^2 \sigma^2 - \dots - b_{P1}^2 \sigma^2}$$

γ_t vérifie l'équation suivante :

$$\gamma_t = \sigma^2 + b_{21}^2 \sigma^2 \gamma_{t-2} + b_{31}^2 \sigma^2 \gamma_{t-3} + \dots + b_{P1}^2 \sigma^2 \gamma_{t-P}$$

Cette relation peut s'écrire matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \gamma_t - A \\ \gamma_{t-1} - A \\ \vdots \\ \gamma_{t-P+1} - A \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \gamma_{t-1} - A \\ \gamma_{t-2} - A \\ \vdots \\ \gamma_{t-P} - A \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} \gamma_{t-n} - A \\ \gamma_{t-n-1} - A \\ \vdots \\ \gamma_{t-n-P+1} - A \end{pmatrix} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{avec } B = \begin{pmatrix} 0 & b_{21}^2\sigma^2 & b_{31}^2\sigma^2 & \dots & b_{P1}^2\sigma^2 \\ 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\rho(B)$ le rayon spectral de B, on a :

$$B^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ si et seulement si } \rho(B) < 1.$$

Le théorème de Hadamard-Gershgorin et le théorème 1 nous assurent que $\rho(B)$ est inférieur ou égal à 1. Pour montrer que le rayon spectral de B est strictement inférieur à un, il suffit donc de vérifier que le polynôme

$$P(\lambda) = \det(B-\lambda I_P) = (-1)^P 6 \left[\lambda^P - b_{21}^2\sigma^2\lambda^{P-2} - b_{31}^2\sigma^2\lambda^{P-3} - \dots - b_{P1}^2\sigma^2\right]$$

n'a pas de racine de module égal à un.

Pour $\lambda = e^{i\theta}$, $\theta \in [0,2\pi[$, on a :

$$|P(\lambda)| = \left|e^{i\theta P} - b_{21}^2\sigma^2 e^{i\theta(P-2)} - \dots - b_{P1}^2\sigma^2\right| \geq \left|\left|e^{i\theta P}\right| - \left|b_{21}^2\sigma^2 e^{i\theta(P-2)} + \dots + b_{P1}^2\sigma^2\right|\right|$$

$$\geq 1 - b_{21}^2\sigma^2 - \dots - b_{P1}^2\sigma^2 > 0.$$

ce qui montre que $B^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si on suppose que

$$\left\| \begin{matrix} \gamma_t - A \\ \gamma_{t-1} - A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{t-P+1} - A \end{matrix} \right\| \neq 0$$

on a alors

$$\left\| \begin{matrix} \gamma_{t-n} - A \\ \gamma_{t-n-1} - A \\ \cdot \\ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{t-n-P+1} - A \end{matrix} \right\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty \text{, ce qui implique que } \limsup \gamma_{t-n} = \infty .$$

Or $\gamma_{t-n} \leq \sqrt{\operatorname{var} X_{t-n} \operatorname{var} Z_{t-n}} = A$ (fini), d'où la contradiction et l'égalité presque sûre de X_t et Z_t.

La démonstration du théorème 1 utilise quelques propriétés des matrices B(t), que nous énonçons dans les lemmes 2 à 7 suivants.

On notera $\overline{",m}$ l'ensemble d'entiers [",m] (N; pour toute matrice carrée M de taille P, pour tout $j \in \overline{1,P}$, M(.,j) désignera le vecteur de $\mathbb{R}^P$ correspondant à la $j^{ième}$ colonne de M et M(i,.) = (M'(.,i))' désignera la $i^{ème}$ ligne.

Lemme 2

$\forall k \in \mathrm{N}, \forall t \in \mathrm{Z}$

$$\prod_{j=0}^{k} B(t-j)(i,.) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{k} B(t-j)(i-1,.) \text{ si } i \in \overline{2,P}. \\ \left[b_{21}\varepsilon_t \left(\prod_{j=1}^{k} B(t-j)(2,.) \right)' + \ldots + b_{P1}\varepsilon_t \left(\prod_{j=1}^{k} B(t-j)(P,.) \right)' \right]' \text{ si } i = 1. \end{cases}$$

Preuve : immédiate.

Lemme 3

$\forall k \in \mathrm{N}, \forall t \in \mathrm{Z}, \forall '' \in \overline{1,P}$

$$E\left[\prod_{j=0}^{k} B(t-j)(i,'') \; 6 \; \prod_{j=0}^{k} B(t-j)(h,'') \right] = 0 \text{ si } i \neq h. \tag{2.3}$$

Preuve :

_Claire pour k = 0

_Supposons que (2.3) soit vérifié pour $k = k_0 - 1$ et appliquons le lemme 2 en distinguant 2 cas, puisque dans (2.3) i et h jouent des rôles symétriques :

Si $i \neq 1$ et $h \neq 1$

$$E\left[\prod_{i=0}^{k_0} B(t-j)(i,'') \; 6 \; \prod_{j=0}^{k_0} B(t-j)(h,'') \right] = E\left[\prod_{j=1}^{k_0} B(t-j)(i-1,'') \; 6 \; \prod_{j=1}^{k_0} B(t-j)(h-1,'') \right] = 0$$

Si i = 1 et h ≠ 1

$$E\left[\prod_{j=0}^{k_0} B(t-j)(1,") \; 6 \; \prod_{j=0}^{k_0} B(t-j)(h,")\right]$$

$$= b_{21}E\left[\varepsilon_t\prod_{j=1}^{k_0} B(t-j)(2,") \; 6 \; \prod_{j=1}^{k_0} B(t-j)(h-1,")\right]+\ldots$$

$$+ b_{P1}E\left[\varepsilon_t\prod_{j=1}^{k_0} B(t-j)(P,") \; 6 \; \prod_{j=1}^{k_0} B(t-j)(h-1,")\right] = 0$$

puisque

$\forall\, m \in \overline{1,P}$, $\prod_{j=1}^{k_0} B(t-j)\,(m,")$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par les ε_u, $u \in \overline{t-k,t-1}$.

Lemme 4

$\forall\, k \in N^*, \forall\, t \in Z$

$$»\left[\prod_{j=0}^{k} B(t-j)(1,.)\right]'»_{L^2}^2 \le \sigma^2\left[\sum_{h=2}^{P} b_{h1}^2\right] \sup_{i\ge 2} »\left[\prod_{j=1}^{k} B(t-j)(i,.)\right]'»_{L^2}^2$$

Preuve :

$$»\left[\prod_{j=0}^{k} B(t-j)(1,.)\right]'»_{L^2}^2 = E\left\{»[\prod_{j=0}^{k} B(t-j)(1,.)]'»^2\right\}$$

$$= E\Bigg\{[b_{21}\,\varepsilon_t \prod_{j=1}^{k} B(t-j)(2,1)+\ldots+b_{P1}\,\varepsilon_t \prod_{j=1}^{k} B(t-j)(P,1)]^2$$

$$+\ldots+[b_{21}\,\varepsilon_t \prod_{j=1}^{k} B(t-j)(2,P)+\ldots+b_{21}\,\varepsilon_t \prod_{j=1}^{k} B(t-j)(P,P)]^2\Bigg\}$$

(lemme 2)

$$= b_{21}^2\,\sigma^2\,E\left\{[\prod_{j=1}^{k} B(t-j)(2,1)]^2+\ldots+[\prod_{j=1}^{k} B(t-j)(2,P)]^2\right\}$$

$$+\ldots+ b_{P1}^2\,\sigma^2\,E\left\{[\prod_{j=1}^{k} B(t-j)(P,1)]^2+\ldots+[\prod_{j=1}^{k} B(t-j)(P,P)]^2\right\}$$

(lemme 3)

$$\leq \sum_{h=2}^{P} b_{h1}^2\,\sigma^2 \sup_{i\geq 2} \left\| [\prod_{j=1}^{k} B(t-j)(i,.)]' \right\|_{L^2}^2 .$$

Lemme 5

$\forall\, t \in \mathbb{Z}, \forall\, i \in \overline{1,P-1}, \forall\, h \in \overline{1,P},$

$$\text{si } \sigma^2(b_{21}^2+\ldots+b_{P1}^2) < 1 \text{ alors } \left\| [\prod_{j=i}^{P-1} B(t-j)(h,.)]' \right\|_{L^2}^2 \leq 1.$$

Preuve :

_Claire pour $i = P-1$

_Supposons la relation vérifiée pour $(i+1) \in \overline{2,P-1}$

$$\forall\, h \geq 2 \quad \left\| [\prod_{j=i}^{P-1} B(t-j)(h,.)]' \right\|_{L^2}^2 = \left\| [\prod_{j=i+i}^{P-1} B(t-j)(h-1,.)]' \right\|_{L^2}^2 \leq 1 \quad \text{(lemme 1)}$$

$$\left\| [\prod_{j=i}^{P-1} B(t-j)(1,.)]' \right\|_{L^2}^2 \leq \sigma^2 \left(\sum_{k=2}^{p} b_{k1}^2 \right) \sup_{h\geq 2} \left\| [\sum_{j=i+1}^{p-1} B(t-j)(h,.)]' \right\|_{L^2}^2 \leq 1 \quad \text{(lemme 3)}$$

Ceci montre que la relation est vérifiée pour i.

Lemme 6

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, t \in \mathbb{Z}, \forall\, i \in \overline{1,P}$

si $\sigma^2\,(b_{21}^2+\ldots+b_{P1}^2) < 1$ alors $\left\| \left[\prod_{j=0}^{nP-1} B(t-j)(i,.)\right]' \right\|_{L^2}^2 \leq [\sigma^2(b_{21}^2+\ldots+b_{P1}^2)]^n.$

Preuve :

Elle se fait par récurrence sur n :

_Montrons que la relation est vérifiée pour n = 1 :

$$\forall\, i \in \overline{1,P} \quad \left\| \left[\prod_{j=0}^{P-1} B(t-j)(i,.)\right]' \right\|_{L^2}^2 = \left\| \left[\prod_{j=i-1}^{P-1} B(t-j)(1,.)\right]' \right\|_{L^2}^2$$

(Pour i > 1 on applique (i - 1) fois le lemme 2)

Pour i = P, on a donc

$$\left\| \left[\prod_{j=0}^{P-1} B(t-j)(P,.)\right]' \right\|_{L^2}^2 = \left\| [B(t-P+1)(1,.)' \right\|_{L^2}^2 = \sigma^2\,(b_{21}^2+\ldots+b_{P1}^2)$$

Pour i ≠ P, on applique successivement les lemmes 4 et 5

$$\left\| \left[\prod_{j=0}^{P-1} B(t-j)(i,.)\right]' \right\|_{L^2}^2 = \left\| \left[\prod_{j=i-1}^{P-1} B(t-j)(1,.)\right]' \right\|_{L^2}^2$$

$$\leq \sigma^2 \left[\sum_{h=2}^{P} b_{h1}^2\right] \sup_{\ell \geq 2} \left\| \left[\prod_{j=i}^{P-1} B(t-j)(\ell,.)\right]' \right\|_{L^2}^2 \leq \sigma^2 \left[\sum_{h=2}^{P} b_{h1}^2\right].$$

_Supposons la relation vérifiée pour n-1

$$\forall\, i \in \overline{1,P} \quad \left\| \left[\prod_{j=0}^{nP-1} B(t-j)(i,.)\right]' \right\|_{L^2}^2 = \left\| \left[\prod_{j=i-1}^{nP-1} B(t-j)(1,.)\right]' \right\|_{L^2}^2$$

$$\leq \sigma^2 \left(\sum_{h=2}^{P} b_{h1}^2\right) \sup_{\ell \geq 2} \left\| \left[\prod_{j=i}^{nP-1} B(t-j)(\ell,.)\right]' \right\|_{L^2}^2$$

Pour i = P, on a

$$\| [\prod_{j=P}^{nP-1} B(t-j)('',.)]' \|_{L^2}^2 = \| [\prod_{j=0}^{(n-1)P-1} B(t-P-j)('',.)]' \|_{L^2}^2 \leq [\sigma^2(b_{21}^2+\ldots+b_{P1}^2)]^{n-1}$$

Pour i $\in \overline{1,P-1}$, on montre, en passant de (i+1) à i, que

$$\forall\ '' \in \overline{2,P} \qquad \| [\prod_{j=i}^{nP-1} B(t-j)('',.)]' \|_{L^2}^2 \leq \sigma^2 \left(\sum_{h=2}^{P} b_{h1}^2 \right)^{n-1}$$, ce qui permet de conclure.

Lemme 7

$\forall\, t \in Z, \forall\, k \in N$
si $\sigma^2(b_{21}^2+\ldots+b_{P1}^2) < 1$ alors

$$\| \prod_{j=0}^{k} B(t-j) \|_{L^2}^2 \leq P^2 \, (\sigma^2 \, (b_{21}^2+\ldots+b_{P1}^2))^{[k/P]}$$ (où [k/P] désigne la partie entière de k/P)

et par conséquent

$$\forall\, t \in Z \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \| \prod_{j=0}^{k} B(t-j) \|_{L^2} < +\infty$$

Preuve :

La majoration peut être obtenue pour la norme matricielle euclidienne en utilisant les lemmes 5 et 6.

Preuve du théorème 1 :

Il nous reste à vérifier que (2.2) définit bien un processus (X_t) stationnaire non anticipatif vérifiant l'équation (2.1).

Pour cela posons, pour tout a $\in$ N,

$$Y_t(a) = \tilde{\varepsilon}_t + \sum_{j=1}^{a} \left[\prod_{k=1}^{j} B(t-k) \right] \tilde{\varepsilon}_{t-j}$$

Pour n < m,

$$\| Y_t(m) - Y_t(n) \| = \left\| \sum_{j=n+1}^{m} \left[\prod_{k=1}^{j} B(t-k) \right] \tilde{\varepsilon}_{t-j} \right\| \leq \sum_{j=n+1}^{m} \left\| \prod_{k=1}^{j} B(t-k) \tilde{\varepsilon}_{t-j} \right\|$$

$$\leq \sigma \sum_{j=n+1}^{m} \text{»} \prod_{k=1}^{j} B(t-k) \text{»}$$

cette quantité tend vers zéro quand $n \to \infty$ (lemme 7).

Le processus $Y_t = \lim_{a \to \infty} Y_t(a)$ est donc bien défini dans L^2 et $X_t = (1,0,\ldots,0)\, Y_t$ l'est également. Montrons que (X_t) vérifie (2.1) :

$$\left\| (1,0,\ldots,0) \times \left[Y_t(a) - \tilde{\varepsilon}_t - B(t-1) Y_{t-1}(a) \right] \right\|$$

$$= \left\| (1,0,\ldots,0) \times \prod_{k=1}^{a+1} B(t-k) \times \tilde{\varepsilon}_{t-a-1} \right\| \leq \sigma \text{»} \prod_{k=1}^{a+1} B(t-k) \text{»} \underset{a \to \infty}{\longrightarrow} 0 \text{ (lemme 7)}$$

On a donc $(1,0,\ldots,0)\, Y_t = (1,0,\ldots,0)\, \tilde{\varepsilon}_t + (1,0,\ldots,0)\, B(t-1)\, Y_{t-1}$

$$X_t = \varepsilon_t + b_{21}\, \varepsilon_{t-1} X_{t-2} + \ldots + b_{P1}\, \varepsilon_{t-1} X_{t-P}$$

(X_t), défini dans L^2 par (2.2), vérifie (2.1). Il est clair enfin que (X_t) est non anticipatif et qu'il est stationnaire (par passage à la limite en loi). Ceci achève la démonstration du théorème 1.

2.B. EXPRESSION DES MOMENTS

Guégan [1984] a traité cette question dans le cas particulier où P = 2. Le théorème suivant donne les moments d'ordre 1,2 et 3 lorsque P est quelconque.

On note $C(i,j) = E[X_t X_{t-i} X_{t-j}]$.

Remarquons qu'il suffit de calculer $C(i,j)$ pour $j \geq i \geq 0$ car

$C(i,j) = C(j,i)$, $C(-i,j) = C(i,j+i)$, $C(i,-j) = C(j,i+j)$ et $C(-i,-j) = C(i,j-i) = C(i-j,j)$.

Théorème 2

Lorsque $\sigma^2(b_{21}^2 + \ldots + b_{P1}^2) < 1$, l'unique processus stationnaire X_t vérifiant (2.1) est tel que :

$E\,X_t = 0$; $\quad \gamma(0) = \dfrac{\sigma^2}{1 - b_{21}^2\sigma^2 - \ldots - b_{P1}^2\sigma^2}$, $\quad \gamma(h) = 0, \forall h \geq 1$

$\forall j \geq i > 1,\ C(i,j) = 0$; $\quad \forall j > P,\ C(1,j) = 0$

$\forall 2 \leq j \leq P,\ C(1,j) = b_{j1}\,\sigma^2\,\gamma(0)$; $\quad C(1,1) = C(0,0) = 0$

$$\begin{aligned} C(0,j) &= b_{21}^2\,\sigma^2\,C(0,j-2) + \ldots + b_{P1}^2\,\sigma^2\,C(0,j-P) \\ &\quad + 2b_{21}\,b_{31}\,\sigma^2\,C(1,j-2) + \ldots + 2b_{21}\,b_{P1}\,\sigma^2\,C(P-2,j-2) \\ &\quad + 2b_{31}\,b_{41}\,\sigma^2\,C(1,j-3) + \ldots + 2b_{P-1\,1}\,b_{P1}\,\sigma^2\,C(1,j-P+1) \end{aligned}$$

Donc lorsque $j \geq 2P$

$$C(0,j) = b_{21}^2\,\sigma^2\,C(0,j-2) + \ldots + b_{P1}^2\,\sigma^2\,C(0,j-P)$$

$(C(0,n))_{n\in N}$ satisfait une équation aux différences d'ordre P à partir du rang P.

Le tableau ci-dessous synthétise les résultats précédents :

i \ j	0	1	2	3	...	P-1	P	P+1		
0	0	X	X	X	...	X	X	X	X	
1		0	X	X	...	X	X	0	0	...
2			0	0	...	0	0	0	0	...
3				0						
4							0			

Ce tableau nous permet donc d'identifier P car on a, en particulier,

$$\forall\ j > P,\ C(1,P) \neq 0 \text{ et } C(1,j) = 0$$

Les résultats sont obtenus par des calculs simples d'espérances mais leur écriture est longue et fastidieuse.

Ecrivons, par exemple, le calcul de C(1,j) en détail pour j > 1 :

$$\begin{aligned}
C(1,j) &= E[X_t\, X_{t-1}\, X_{t-j}] \\
&= E[(\varepsilon_t + b_{21}\, \varepsilon_{t-1}\, X_{t-2} + \ldots + b_{P1}\, \varepsilon_{t-1}\, X_{t-P})\, X_{t-1}\, X_{t-j}] \\
&= E[(b_{21}\, \varepsilon_{t-1}\, X_{t-2} + \ldots + b_{P1}\, \varepsilon_{t-1}\, X_{t-P})\, (\varepsilon_{t-1} + b_{21}\, \varepsilon_{t-2}\, X_{t-3} + \ldots + b_{P1}\, \varepsilon_{t-2}\, X_{t-P-1})\, X_{t-j}] \\
&= b_{21}\, \sigma^2\, E[X_{t-2}\, X_{t-j}] + \ldots + b_{P1}\, \sigma^2\, E[X_{t-P}\, X_{t-j}] \\
&= b_{21}\, \sigma^2\, \gamma(j-2) + \ldots + b_{P1}\, \sigma^2\, \gamma(j-P) \\
&= \begin{cases} 0 \text{ si } j > P \\ b_{j1}\, \sigma^2\, \gamma(0) \text{ si } 1 < j \leq P. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dans le paragraphe suivant nous donnons des résultats similaires pour un BL(0,0,P,Q) superdiagonal.

3. LE MODELE BL(0,0,P,Q) SUPERDIAGONAL STRICT

Supposons l'existence d'un processus stationnaire (X_t) vérifiant l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
X_t = \varepsilon_t + b_{21}\, \varepsilon_{t-1}\, X_{t-2} + \ldots + b_{P1}\, \varepsilon_{t-1}\, X_{t-P} + b_{32}\, \varepsilon_{t-2}\, X_{t-3} + \ldots + b_{P2}\, \varepsilon_{t-2}\, X_{t-P} \\
+ \ldots \\
+ b_{Q+1,Q}\, \varepsilon_{t-Q}\, X_{t-Q-1} + \ldots + b_{PQ}\, \varepsilon_{t-Q}\, X_{t-P}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

avec P > Q, $b_{PQ} \neq 0$ et (ε_t) iid $N(0,\sigma^2)$.

Hannan [1982] donne une condition nécessaire et suffisante sur les b_{jk} pour qu'il existe un processus stationnaire vérifiant (3.1) Cette condition est hélas moins explicite et plus difficile à vérifier que celle donnée dans le théorème 1 pour un BL(0,0,P,1) non diagonal.

Nous supposerons de plus que X_t est mesurable relativement à $\sigma(\varepsilon_u, u \leq t)$.

La fonction d'autocovariance est informative sur la valeur de Q puisque :

$\forall\, h \geq Q, \gamma(h) = 0$

$$\gamma(Q-1) = b_{21}\, b_{Q+1Q}\, \sigma^2\, \gamma(0) + \ldots + b_{P1}\, b_{PQ}\, \sigma^2\, \gamma(0)$$

$$+ b_{21}\, b_{Q+2Q}\, \sigma^2\, \gamma(1) + b_{21}\, b_{Q+3Q}\, \sigma^2\, \gamma(2) + \ldots + b_{21}\, b_{PQ}\, \sigma^2\, \gamma(P-Q-1)\,.$$

Notons que γ n'est pas suffisante pour identifier Q puisque l'on n'est pas assuré d'avoir $\gamma(Q-1) \neq 0$. Les calculs de tous les moments d'ordre 3 de ce modèle sont beaucoup plus compliqués que dans le cas Q = 1. Heureusement, certains d'entre eux s'obtiennent assez facilement.

$\forall\, j \geq i > Q,\ C(i,j) = 0$

$\forall\, j \geq P,\ C(Q,Q+j) = 0$

$C(Q,Q+P-1) = b_{PQ}\, \sigma^2\, \gamma(Q-1)$

$C(Q,Q+P-2) = b_{PQ}\, \sigma^2\, \gamma(Q-2) + b_{P-1Q}\, \sigma^2\, \gamma(Q-1)$

$$\forall k \in \overline{1,Q},\ C(Q,Q+P-k) = \sigma^2 b_{PQ}\, \gamma(Q-k) + \sigma^2 b_{P-1,Q}\, \gamma(Q-k+1) + \ldots + \sigma^2 b_{P-k+1,Q}\, \gamma(Q-1)$$

Le tableau triangulaire suivant, analogue à celui du théorème 4, nous permet de caractériser P et Q.

i \ j	0	1	...	Q	...	P	...	Q+P		
0										
1										
:										
.										
Q				X	X		X	0	0	0
:				0	0	0				
P					0		0			

Q est le plus grand indice d'une ligne non nulle du tableau, puisque l'on a supposé que $b_{PQ} \neq 0$ et puisque $\gamma(0) = 0$.

Si $\gamma(Q-1) \neq 0$, ce qui est le cas sur de nombreux exemples, P est caractérisé par $C(Q,P+Q-1) \neq 0$ et $C(Q,j) = 0$, $\forall\, j \geq P+Q$. Si $\gamma(Q-1) = 0$ et $\gamma(Q-2) \neq 0$. P est alors caractérisé par $C(Q,P+Q-2) \neq 0$ et $C(Q,j) = 0$, $\forall\, j \geq P+Q-1$. De manière générale, si $Q-k_0$ est le plus grand indice tel que $\gamma(Q-k_0) \neq 0$, P est défini par $C(Q,P+Q-k_0) \neq 0$ et $C(Q,j) = 0$, $\forall\, j \geq P+Q-k_0+1$.

Ceci généralise les résultats obtenus par Kumar [1986] et Gabr [1988] pour le modèle

$$X_t = \varepsilon_t + b_{PQ}\, \varepsilon_{t-Q}\, X_{t-P},\ Q < P.$$

4. SIMULATIONS

1er exemple BL(0,0,2,1)

Nous avons fait 100 simulations de taille 200 du processus

$$X_t = \varepsilon_t + 0{,}5\, \varepsilon_{t-1}\, X_{t-2} \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

Nous avons représenté la moyenne des moments empiriques d'ordre 2 et 3, ce qui nous permet très nettement de retrouver P = 2, et Q = 1.

moyenne des moyennes empiriques

$$\bar{\bar{X}} = 0.0081$$

moyenne des autocovariances empiriques

j	**0**	1	2	3	4	5
$\overline{\hat{\gamma}(j)}$	**1.3282**	0.0144	0.0002	0.0117	-0.0049	-0.0107

moyenne des moments empiriques d'ordre 3 $\overline{\hat{C}(i,j)}$

i\j	0	1	2	3	4	5
0	0.0058	0.0027	0.0227	0.0143	0.0173	0.0155
1		0.0371	**0.6500**	-0.0028	0.0084	0.0222
2			0.0225	-0.0151	-0.0133	0.0080
3				0.0004	0.0040	0.0306
4					0.0113	0.0215
5						-0.0223

2e exemple BL(0,0,2,1)

$$X_t = \varepsilon_t - 0{,}9\ \varepsilon_{t-1} X_{t-2} \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

Les trajectoires de ce processus sont très explosives (voir la représentation d'une trajectoire de longueur 1000). Nous sommes incapables de retrouver P et Q avec des simulations de taille 200, ce qui n'est pas surprenant puisque le caractère explosif du processus nous empêche d'obtenir de bonnes estimations des C(i,j) avec des simulations de petites tailles.

moyenne des moyennes empiriques

$$\bar{\bar{X}} = 0.0122$$

moyenne des autocovariances empiriques

j	0	1	2	3	4	5
$\overline{\hat{\gamma}(j)}$	4.3842	-0.0646	0.0589	-0.0414	0.2271	-0.0739

moyenne des moments empiriques d'ordre 3 $\overline{\hat{C}(i,j)}$

i\j	0	1	2	3	4	5
0	15.6799	0.0094	9.4472	-0.1089	10.4391	-0.4944
1		0.1845	-4.3790	-0.9641	-0.5120	-0.1297
2			6.7012	-0.4344	5.2097	-0.4778
3				0.3764	0.0059	-0.0447
4					6.6388	0.0282
5						0.3686

3e exemple BL(0,0,3,1)

$$X_t = \varepsilon_t + 0{,}4\ \varepsilon_{t-1} X_{t-2} + 0{,}4\ \varepsilon_{t-1} X_{t-3} \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

On retrouve clairement P = 3, Q = 1.

moyenne des moyennes empiriques

$$\overline{\overline{X}} = 0.0093$$

moyenne des autocovariances empiriques

j	0	1	2	3	4	5	6	7
$\overline{\hat{\gamma}(j)}$	**1.4378**	0.0062	0.0267	-0.0051	-0.0150	0.0031	-0.0082	-0.0028

moyenne des moments empiriques d'ordre 3 $\overline{\hat{C}(i,j)}$

i\j	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0.0662	0.2184	0.0775	0.0243	0.2224	0.1955	0.0128	0.0266
1		0.0922	0.5627	**0.5561**	-0.0039	0.0020	0.0013	0.0110
2			0.0213	0.0101	-0.0162	-0.0179	0.0044	0.0149
3				0.0257	-0.0147	0.0134	0.0376	0.0105
4					0.0508	-0.0011	-0.0015	0.0101
5						0.0020	-0.0054	-0.0083
6							0.0340	0.0210
7								0.0058

4e exemple BL(0,0,3,2)

$$X_t = \varepsilon_t + 0{,}3\ \varepsilon_{t-1} X_{t-2} - 0{,}4\ \varepsilon_{t-1} X_{t-3} + 0{,}4\ \varepsilon_{t-2} X_{t-3} \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

On retrouve nettement Q = 2, par contre la valeur P = 3 n'est pas clairement trouvée. Ceci s'explique par une valeur théorique petite (voisine de 0,067) pour C(2,4) .

moyenne des moyennes empiriques

$$\overline{\bar{X}} = -\ 0.0126$$

moyenne des autocovariances empiriques

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\overline{\hat{\gamma}(j)}$	1.659	**0.17**	-0.006	-0.001	0.008	-0.006	0.007	0.012	0.012	-0.003	0.016

moyenne des moments empiriques d'ordre 3 $\overline{\hat{C}(i,j)}$

i\j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	-0.391	-0.029	-0.087	-0.157	-0.116	0.133	-0.059	0.026	0.009	0.014	-0.001
1		-0.040	0.401	-0.663	-0.086	-0.073	0.075	-0.026	0.021	0.020	0.003
2			0.228	**0.690**	**0.024**	0.003	0.007	-0.010	-0.022	0.005	-0.025
3				0.079	0.023	-0.010	0.033	0.030	-0.026	0.000	0.032
4					0.022	-0.017	0.005	0.019	0.016	-0.023	-0.009
5						-0.030	0.007	-0.002	-0.011	0.002	0.035
6							0.018	0.032	0.025	-0.032	0.010
7								-0.044	-0.008	-0.002	-0.008
8									-0.065	-0.008	0.007
9										-0.036	-0.012
10											-0.081

5e exemple BL(0,0,3,2)

$$X_t = \varepsilon_t + 0,4\, \varepsilon_{t-1} X_{t-2} + 0,3\, \varepsilon_{t-1} X_{t-3} - 0,4\, \varepsilon_{t-2} X_{t-3} \qquad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

On retrouve clairement P = 3 et Q = 2 car les b_{ij} ont été choisis pour obtenir C(2,4) plus grand et nous avons utilisé des simulations de taille 300

moyenne des moyennes empiriques

$$\overline{\bar{X}} = 0.0078$$

moyenne des autocovariances empiriques

j	0	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\overline{\hat{\gamma}(j)}$	1.618	**-0.23**	0.000	0.018	-0.002	-0.000	-0.010	-0.014	-0.000	0.007	-0.004

moyenne des moments empiriques d'ordre 3 $\overline{\hat{C}(i,j)}$

i\j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	-0.367	0.171	-0.063	-0.141	0.159	0.065	0.014	0.055	0.018	-0.028	0.030
1		-0.103	0.534	0.451	-0.055	-0.029	-0.025	-0.016	-0.014	0.004	0.003
2			0.224	-0.650	**0.103**	-0.014	-0.016	0.003	0.011	0.001	0.031
3				0.023	-0.027	0.010	0.015	-0.012	-0.029	-0.007	-0.002
4					0.018	0.027	0.003	0.011	0.019	0.004	0.000
5						0.037	-0.015	-0.005	0.010	0.015	-0.004
6							0.018	-0.016	-0.017	-0.010	-0.008
7								-0.002	0.008	0.023	0.002
8									0.009	-0.011	-0.005
9										-0.024	0.020
10											0.006

REFERENCES

Akamanam, S.I. (1983) Some contributions to the study of bilinear time series models. Unpublished Ph. D. thesis. University of Sheffield, England.

Andersen, A.P. et Granger, C.W.J. (1978) *An introduction to bilinear time series analysis*. Vandenhoeck et Ruprecht, Göttingen.

Berlinet, A. (1985) Estimating the degrees of an ARMA model. *Compstat Lectures*, 3, pp 61-94.

Francq, C. (1989) Identification et minimalités de séries chronologiques. *Thèse de Doctorat. Université de Montpellier.*

Gabr, M.M. (1988) On the third order moment structure and bispectral analysis of some bilinear time series. *Journal of time series analysis*, vol. 9, pp.11-20.

Guégan, D. (1981) Etude d'un modèle non linéaire, le modèle superdiagonal d'ordre 1. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* 293, série I, pp 95-98.

Guégan, D. (1984) Test de modèles non linéaires *in Proceedings of the 3rd Franco-Belgian meeting of statisticians*, J.P. Florens, M. Mouchart, J.P. Raoult, L. Simar eds, Publications des Facultés Universitaires Saint-Louis, Bruxelles, pp 45-65.

Guégan, D. (1988) Modèles bilinéaires et polynomiaux de séries chronologiques : étude probabiliste et analyse statistique. *Thèse de Doctorat. Université de Grenoble.*

Hannan, E.J. (1982) A note on bilinear time series models. *Stochastic Processes and their Applications,* 12, pp 221-224.

Kumar, K. (1986) On the identification of some bilinear time series models. *Journal of time series analysis.* Vol. 7, n° 2, pp 117-122.