

# STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

HENRY ROUANET

BRUNO LECOUTRE

JEAN-MARC BERNARD

**L'inférence fiducio-bayésienne comme méthode d'analyse de données  
: un exemple d'application à des données psychométriques**

*Statistique et analyse des données*, tome 11, n° 2 (1986), p. 58-74.

[http://www.numdam.org/item?id=SAD\\_1986\\_\\_11\\_2\\_58\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAD_1986__11_2_58_0)

© Association pour la statistique et ses utilisations, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Statistique et analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Statistique et Analyse des Données  
1986 - Vol.11 n°2 - pp. 58-74

L'INFERENCE FIDUCIO-BAYESIENNE COMME METHODE D'ANALYSE DE DONNEES:  
UN EXEMPLE D'APPLICATION A DES DONNEES PSYCHOMETRIQUES

Henry ROUANET, Bruno LECOUTRE, Jean-Marc BERNARD

Groupe Mathématiques et Psychologie  
C.N.R.S. - U.A. 1201  
Université René Descartes  
12 rue Cujas, 75005 Paris

Résumé: *Cet article illustre les apports méthodologiques de l'inférence fiducio-bayésienne. On présente d'abord les principes de cette approche, puis une application à des données psychométriques, enfin les résultats théoriques principaux.*

Abstract: *The aim of this article is to illustrate the methodological aspects brought by the Bayes-fiducial approach to inference. It first presents the principles of this approach, then an application to psychometric data, last the main theoretical results.*

Mots clés: *Inférence fiducio-bayésienne.*

Indices de classification STMA: *09-060, 08-110.*

## 0 - INTRODUCTION

Par analyse de données nous entendons faire référence à un état d'esprit, une démarche de l'analyse statistique, dont l'objectif est de faire ressortir les traits essentiels et signifiants des données recueillies, sans se préoccuper outre mesure des intentions, des hypothèses, qui ont pu présider à leur recueil. Cette conception, que l'on retrouve dans la "data analysis" anglo-saxonne (voir par exemple MOSTELLER et TUKEY (1)), dépasse l'acception

Manuscrit reçu le 21 janvier 1985  
révisé le 31 octobre 1986

restrictive que l'on tend à donner en France à l'expression "*analyse des données*". Pour nous, "*faire de l'analyse de données*" n'exclut nullement l'usage de méthodes inductives, mais l'objectif des procédures d'inférence statistique sera essentiellement de prolonger - dans la mesure du possible - les conclusions qui se dégagent des analyses descriptives, en cherchant à étendre ces conclusions à une population parente dont les données sont censées constituer un échantillon.

Dans cet article nous essayerons de montrer comment une certaine approche *bayésienne*, que nous qualifions de *fiducio-bayésienne*, peut apporter une réponse satisfaisante à cet objectif inductif. Le plan de l'exposé sera le suivant: dans une première section, nous rappellerons brièvement les principes de l'inférence fiducio-bayésienne; dans une seconde section, nous illustrerons les méthodes fiducio-bayésiennes sur des données psychométriques; dans une troisième section, nous présenterons des résultats de base permettant la mise en oeuvre de ces méthodes.

## 1 - L'APPROCHE FIDUCIO-BAYESIENNE

Comme l'on sait, une certaine conception de l'inférence bayésienne consiste à chercher à exprimer dans une distribution initiale (ou *a priori* <sup>(1)</sup>) les connaissances, les opinions, même subjectives, que l'on peut avoir sur le problème étudié. Mais une autre conception, non moins bayésienne, illustrée notamment par Jeffreys depuis les années trente (voir JEFFREYS <3>), consiste à utiliser des distributions initiales visant à représenter un "état d'ignorance" sur les paramètres. Ces distributions, souvent qualifiées de "non-informatives", sont (comme on peut s'y attendre) des distributions très étalées ("diffuses"). Du point de vue technique, les distributions finales, ou *a posteriori*, correspondantes peuvent être dérivées par des algorithmes fondés exclusivement sur le modèle d'échantillonnage et les données. Elles peuvent donc être interprétées comme exprimant l'apport propre aux données ("ce que les données ont à dire") et fournissent ainsi une référence objective pour l'interprétation et la communication des résultats. Cette conception rejoint, techniquement et conceptuellement, la perspective, la

---

(1) Au lieu d'*a priori*, *a posteriori*, on peut préférer, avec de FINETTI <2> (page 236), *initial*, *final*.

"motivation" *fiduciaire* (*fiducia* = la confiance) de Fisher développée dans les années trente (voir notamment FISHER <4>), qui est précisément d'exprimer l'apport des données par un raisonnement intuitif (dit du "pivot"). C'est pourquoi nous avons pris l'habitude de qualifier de *fiducio-bayésiennes* les distributions bayésiennes finales issues de distributions non-informatives (ceci, d'autant plus que, dans les problèmes usuels de comparaisons de moyennes, elles sont identiques aux distributions fiduciaires). L'inférence fiducio-bayésienne est donc bayésienne par sa technique et fiduciaire par sa motivation.

Le statut des méthodes fiducio-bayésiennes sera celui de "méthodes standard", qui fourniront des probabilités "à usage public". Les distributions fiducio-bayésiennes représentent en outre un avantage décisif: comme l'ont bien montré les travaux de Lindley (cf LINDLEY <5>) ou de BOX et TIAO <6>, elles peuvent être regardées comme un *prolongement technique* des méthodes d'inférence d'échantillonnage usuelles, englobant, en leur fournissant une réinterprétation immédiate, les résultats de la statistique d'échantillonnage (seuils de signification et zones de confiance).

Pour l'analyse des données numériques, ces méthodes peuvent être mises en oeuvre à partir des valeurs des traditionnels tests F de l'analyse de la variance, sans que les difficultés techniques excèdent celles relatives aux calculs de la puissance de ces tests (ROUANET et LECOUTRE <7>; LECOUTRE <8>, <9>). Une constatation analogue s'étend à l'analyse de données catégorisées (BERNARD, BLANCHETEAU, ROUANET <10>; BERNARD <11>). Pour ces deux cas, des programmes informatiques, développés et implantés au C.I.R.C.E., permettent une mise en oeuvre aisée (cf POITEVINEAU et LECOUTRE <12>; POITEVINEAU et BERNARD <13>).

Les apports méthodologiques propres à l'inférence fiducio-bayésienne, en tant que méthode d'analyse de données, vont faire l'objet de la section suivante, à propos de leur application à des données concrètes.

## 2 - UN EXEMPLE D'APPLICATION DE L'INFERENCE FIDUCIO-BAYESIENNE

Nous évoquerons maintenant une analyse de données psychométriques, effectuée il y a quelques années (ROUANET, LEPINE, PELNARD-CONSIDERE <14>). Il s'agissait de données recueillies sur un ensemble de 334 élèves répartis en

quatre groupes (d'effectifs voisins, chacun de l'ordre de 85 individus), définis par le croisement de deux facteurs à deux niveaux chacun:

- Facteur *Pédagogie*: *moderne* opposée à *traditionnelle*;
- Facteur *Milieu*: *privilégié* opposé à *non privilégié*.

Les variables dépendantes, au nombre de neuf, étaient des notes numériques aux neuf épreuves de développement intellectuel et de connaissances suivantes: Quotient Intellectuel Verbal (*QIV*); Quotient Intellectuel Non Verbal (*QINV*); deux épreuves de Combinatoire (*C1* et *C2*); deux épreuves de Probabilité (*P1* et *P2*); deux épreuves de Logique des Propositions (*LP1* et *LP2*); une épreuve de Mathématiques (*Math*). Les notes brutes fourniront les données à partir desquelles seront effectuées les analyses inférentielles (modèle d'échantillonnage); les résultats présentés seront relatifs aux notes *calibrées*, obtenues en prenant comme dénominateur la racine carrée du carré-moyen intra-groupe relatif à chacune des neuf variables. Par exemple, pour la variable *QI Verbal*, nous donnons dans le tableau 1 les moyennes (calibrées) relatives à chacun des quatre groupes.

		<i>Milieu</i>		
		<i>privilégié</i>	<i>non privilégié</i>	
<i>Pédagogie</i>	<i>moderne</i>	9.07 <small>86</small>	8.33 <small>86</small>	8.69
	<i>traditionnelle</i>	8.72 <small>80</small>	8.28 <small>82</small>	8.49
		8.89	8.31	

- Effet du facteur *Pédagogie*:  $8.69 - 8.49 = +0.20$
- Effet du facteur *Milieu*:  $8.89 - 8.31 = +0.59$
- Effet d'interaction:  $(9.07 - 8.72) - (8.33 - 8.28) = +0.30$

Tableau 1 - Variable *QI Verbal*: effets calibrés

D'où, à partir des moyennes des quatre groupes, les valeurs des trois effets correspondants aux trois sources de variation classiques associées au plan de recueil des données:

- Effet principal du facteur *Pédagogie*, défini comme différence des deux moyennes relatives à "moderne" et "traditionnelle";
- Effet principal du facteur *Milieu*, défini comme différence des deux moyennes relatives à "privilégié" et "non privilégié";

- Effet d'interaction, défini comme "différence de différences".

L'ensemble des  $3 \times 9 = 27$  effets observés est représenté dans le tableau 2. Soulignons le fait qu'il s'agit d'effets calibrés, donc comparables d'une variable à l'autre.

	<i>Pédagogie</i>	<i>Milieu</i>	<i>Interaction</i>
<i>QIV</i>	0.20	0.59	0.30
<i>QINV</i>	0.39	0.51	0.17
<i>C1</i>	0.54	0.36	0.16
<i>C2</i>	0.72	0.40	0.19
<i>P1</i>	0.30	0.28	-0.05
<i>P2</i>	0.20	0.53	-0.16
<i>LP1</i>	0.10	0.23	0.23
<i>LP2</i>	0.25	0.37	0.02
<i>Math</i>	0.08	0.32	0.11

Tableau 2 - Trois effets calibrés observés pour les neuf variables

## 2.1 - Analyses descriptives

A partir de ce tableau, nous pourrions procéder à des analyses et commentaires descriptifs, en commençant par le *signe* des effets.

Pour le facteur *Pédagogie*, un signe positif veut dire que la pédagogie moderne est plus efficace que la pédagogie traditionnelle; on constate que tous les signes sont positifs: résultat encourageant.

Pour le facteur *Milieu*, un signe positif veut dire que les enfants privilégiés réussissent mieux que les enfants non privilégiés; on constate que les neuf signes sont également positifs: résultat qui n'a rien de bien inattendu.

Enfin certains effets d'interaction sont positifs, d'autres négatifs; lorsque l'effet d'interaction est positif, cela veut dire que la différence entre les enfants privilégiés est plus grande lorsqu'on passe de la pédagogie traditionnelle à la pédagogie moderne (la plupart des signes sont positifs, ce qui jette un froid sur l'espoir d'un effet de démocratisation qu'on aurait pu avoir en introduisant la pédagogie moderne).

Sur ce même tableau, on peut ensuite, toujours d'un point de vue descriptif, s'intéresser à *l'importance* des effets observés. Supposons, pour fixer

les idées, qu'on regarde comme notable un effet calibré supérieur à 1/3; on voit alors que, pour la variable *QI Verbal* par exemple, l'effet observé du facteur *Milieu* est notable, mais pas l'effet du facteur *Pédagogie*. Pour la variable *QINV*, ces deux effets sont notables, etc.

Dans le tableau 2, sont encadrés tous les effets qui, descriptivement, apparaissent comme des effets notables selon le critère précédent.

## 2.2 - Analyses inférentielles (unidimensionnelles)

Venons en maintenant aux procédures d'*inférence*. Pour chacune des neuf variables, nous pouvons d'abord, bien entendu, procéder aux tests de signification habituels de l'analyse de variance, en posant le modèle d'échantillonnage normal usuel. Ou encore, ce qui revient au même puisque chacun des trois effets est à un seul degré de liberté, nous pouvons, pour chaque variable et chaque effet, procéder à un test *t* de Student. Ce test reviendra à poser, pour chaque effet (non calibré) et chaque variable, la "structure normale-khi-deux":

$$d \parallel s^2 \mid \delta, \sigma^2$$

$$d \mid \delta, \sigma^2 \sim N(\delta, b\sigma^2)$$

$$s^2 \mid \delta, \sigma^2 \sim \sigma^2 \frac{\chi_q^2}{q}$$

avec les conventions de notation

$\parallel$  indépendance

$\mid$  conditionnement

{ lettres droites (ex.  $d, s^2$ ): valeurs fixées

{ lettres italiques (ex.  $\delta, \sigma^2$ ): variables

{ lettres latines  $\rightarrow$  données

{ lettres grecques  $\rightarrow$  paramètres

Pour les présentes données psychométriques, on a, pour chaque variable, pour chaque source de variation:

$d$ : effet observé;  $\delta$ : effet parent correspondant;

$s^2$ : carré-moyen intra-groupe;  $\sigma^2$ : variance parente;

$b$ : coefficient numérique dépendant des effectifs;

$q$ : nombre de degrés de liberté intra-groupe.

On remarquera qu'ici  $q$  est très élevé:  $q = 334 - 4 = 330$ . En pratique on peut donc assimiler le paramètre  $\sigma^2$  à son estimation  $s^2$  (carré-moyen intra-

groupe) et le  $t$  de Student à une variable normale réduite.

Quant à  $b$  sa valeur est fonction des effectifs correspondant aux effets examinés; par exemple, pour *QI Verbal* et facteur *Milieu*, on a:

$$b = \frac{1}{86+80} + \frac{1}{86+82}$$

Pour ce dernier exemple, on trouve ainsi un  $t$  de Student égal à 5.62, donc un résultat hautement significatif; le seuil observé orienté est ici de l'ordre de  $10^{-8}$ . En conséquence, on est extrêmement sûr que l'effet parent du facteur *Milieu* n'est pas nul, mais qu'il est bien de même sens que l'effet observé (supérieur à 0). Cependant l'intérêt de cette conclusion reste limité, car elle ne nous dit rien de l'importance de l'effet parent: méthodologiquement, le test de signification ne prolonge donc pas vraiment l'analyse descriptive; disons au bas mot qu'il ne la prolonge que très imparfaitement.

Venons-en maintenant à l'*inférence fiducio-bayésienne*. Sur la figure 1 ont été tracées les distributions fiducio-bayésiennes de chacun des trois effets calibrés  $\frac{d}{\sigma}$ , pour chacune des neuf variables. Pour chaque effet, la distribution fiducio-bayésienne est à peu près centrée sur l'effet calibré observé. Quant au paramètre d'échelle, il reflète la précision expérimentale, c'est-à-dire ici les effectifs. Enfin la forme de la distribution est à peu près (étant donné ici le nombre élevé de degrés de liberté) une forme normale. En fait, au niveau de la précision graphique, chacune de ces distributions est sensiblement une distribution normale, centrée sur l'effet observé  $\frac{d}{\sigma}$  et dont la variance est égale à  $b$ :

$$\frac{\sigma^*}{\sigma} = N\left(\frac{d}{\sigma}, b\right)$$

(les variables fiducio-bayésiennes seront notées en "italiques grecques" suivies d'une étoile).

Nous commenterons brièvement trois exemples de distributions fiducio-bayésiennes, de manière à illustrer les conclusions auxquelles elles peuvent conduire.

*Exemple 1: Variable QI Verbal; facteur Milieu*

La distribution fiducio-bayésienne relative à  $\frac{d}{\sigma}$  est à peu près centrée sur la valeur 0.59, effet calibré observé, que l'on peut considérer comme notable. Mais comme il ressort visiblement de la figure, non seulement le centre, mais la majeure partie de la distribution se trouve dans la région des



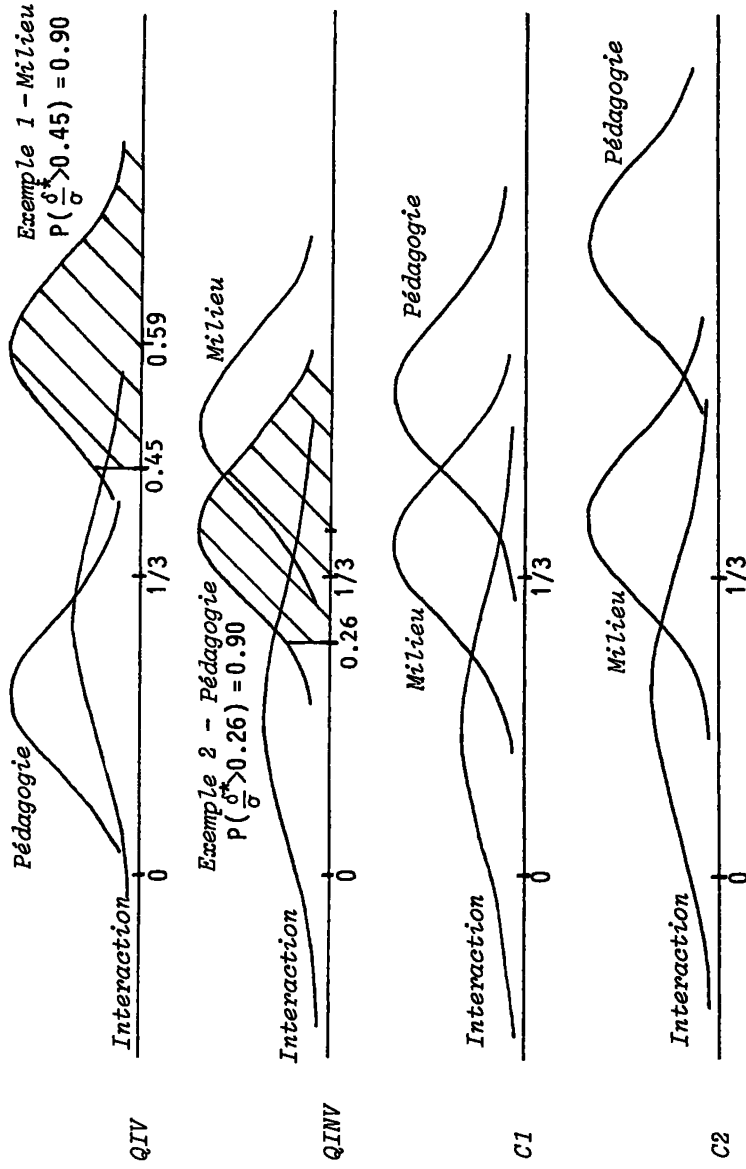


Figure 1 - Distributions fiducio-bayésiennes des effets pour chacune des variables

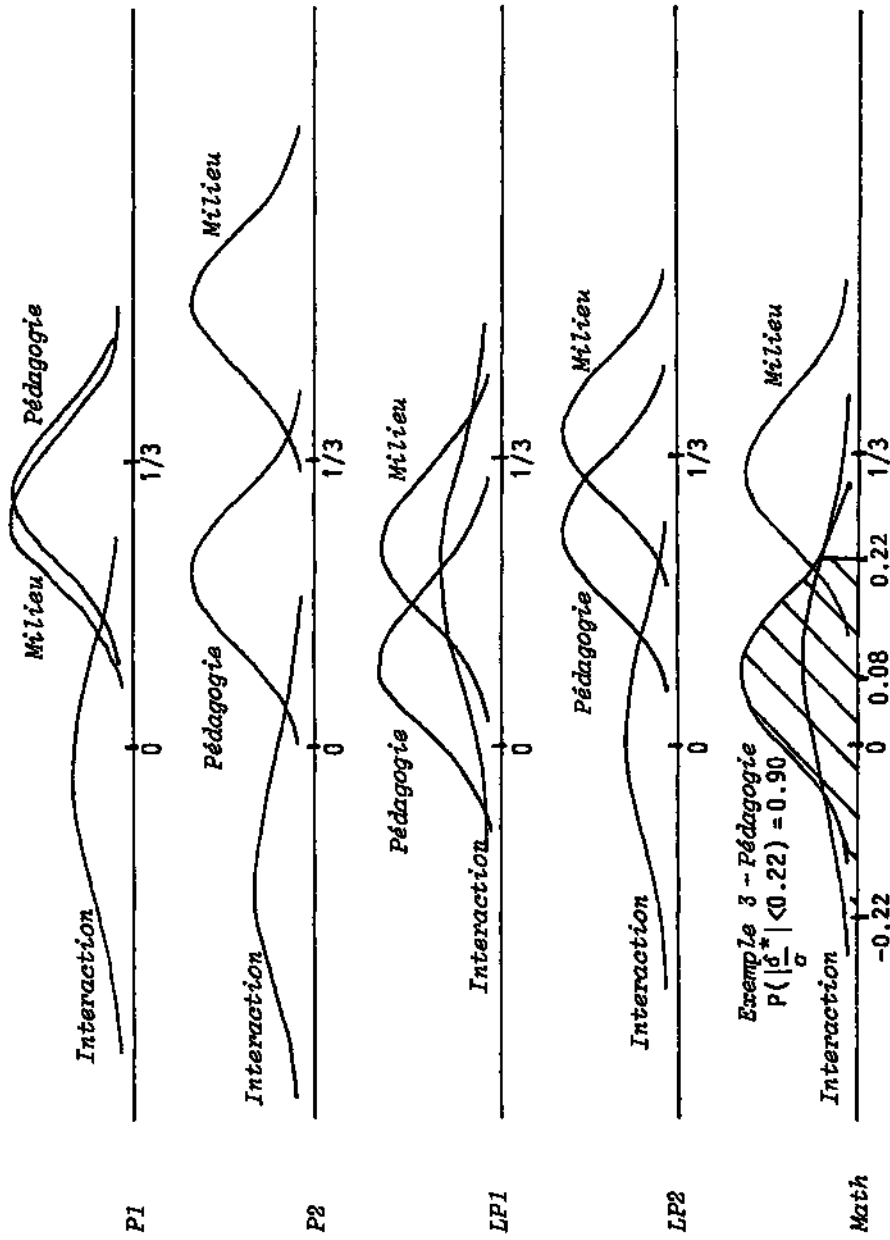


Figure 1 - Suite

valeurs notables. En pareil cas, nous dirons qu'il est possible de *prolonger* la conclusion descriptive d'effet notable en une conclusion inférentielle d'effet notable. Cette conclusion pourra être résumée par un énoncé du type suivant:

$$P\left(\frac{d^*}{\sigma} > 0.45\right) = 0.90$$

En d'autres termes, nous dirons que l'effet calibré parent est supérieur à 0.45 avec la garantie fiducio-bayésienne 0.90.

*Exemple 2: Variable QI Non Verbal; facteur Pédagogie*

Ici on a encore un effet observé notable 0.39, mais cette fois il est moins clair que la majeure partie de la distribution fiducio-bayésienne se trouve dans la région des valeurs notables. Si on cherche à prolonger cette conclusion descriptive inférentiellement avec la garantie fiducio-bayésienne 0.90, on trouvera seulement pour l'effet parent correspondant:

$$P\left(\frac{d^*}{\sigma} > 0.26\right) = 0.90$$

Dans la mesure où (avec le critère choisi) la valeur 0.26 ne peut pas être considérée comme notable, nous dirons que nous n'avons pas pu prolonger inférentiellement la conclusion descriptive d'effet notable.

*Exemple 3: Variable Math; facteur Pédagogie*

Ici la valeur de l'effet calibré observé 0.08, non seulement n'est pas notable, mais au contraire peut être considérée comme tout à fait *négligeable*. Dans ce cas, il sera intéressant de chercher à prolonger cette conclusion descriptive d'effet négligeable en conclusion inférentielle d'effet négligeable. Une telle conclusion pourra être énoncée en faisant intervenir la valeur absolue de l'effet. On trouve ici:

$$P\left(\left|\frac{d^*}{\sigma}\right| < 0.22\right) = 0.90$$

Dans la mesure où 0.22 peut être tenu pour négligeable, on conclura qu'on a ici pu prolonger la conclusion descriptive d'effet négligeable en conclusion inférentielle d'effet négligeable.

A ce point, et avant d'évoquer des techniques plus élaborées, un commentaire sur les rapports entre méthodes d'inférence d'échantillonnage et méthodes fiducio-bayésiennes. Comme nous l'avons dit au début, les procédures

fiducio-bayésiennes permettent une réinterprétation des résultats des procédures usuelles d'inférence d'échantillonnage. C'est bien clair pour la structure statistique précédente. Le seuil observé orienté du test  $t$  de Student se réinterprète très exactement comme la probabilité fiducio-bayésienne que l'effet parent  $\delta$  soit de signe opposé à l'effet observé  $d$ . En effet on peut écrire:

$$P(\delta^* < 0 | d, s^2) = P(t_q > \frac{d}{s\sqrt{b}})$$

Ainsi pour la variable *QI Verbal*, effet du *Milieu*, où nous avons trouvé un seuil observé de l'ordre de  $10^{-8}$ , on pourra énoncer que la probabilité fiducio-bayésienne que l'effet du *Milieu* soit positif est de l'ordre de  $1-10^{-8}$ . De même, un intervalle de confiance pour  $\delta$  se réinterprète immédiatement comme un intervalle fiducio-bayésien centré sur l'effet observé  $d$ . En effet, on peut ici écrire:

$$P(d - t_{\alpha} s\sqrt{b} < \delta^* < d + t_{\alpha} s\sqrt{b} | d, s^2) = 1 - \alpha$$

Mais, inversement, il n'est sans doute pas vrai que tout résultat obtenu par les procédures fiducio-bayésiennes puisse se réinterpréter comme résultat d'une procédure d'inférence d'échantillonnage. Ainsi, pour pouvoir déclarer l'effet de la variable *Math* négligeable, nous avons considéré un intervalle fiducio-bayésien du type  $P(|\frac{\delta^*}{\sigma}| < \epsilon) = \gamma$ . Pourrait-on trouver un énoncé comparable en termes d'intervalle de confiance? Sans approfondir la question plus avant, il nous semble que si cela était possible, sous des justifications raisonnables, cela se saurait, étant donné l'intérêt évident de pouvoir parvenir à une conclusion inférentielle qu'un certain effet est négligeable.

Mais de plus et surtout, même si une solution en termes de confiance pouvait être trouvée dans le cas particulier qui nous concerne ici, le même problème se poserait, encore amplifié, pour des structures plus complexes. En d'autres termes, lorsqu'on en reste à l'inférence d'échantillonnage, on est voué à la recherche de solutions *ad hoc*, alors qu'au contraire avec la statistique bayésienne on est assuré de l'existence d'une solution pour n'importe quelle structure statistique et n'importe quel paramètre dérivé.

### 2.3 - Analyses inférentielles multidimensionnelles

On peut également, avec des procédures multidimensionnelles, examiner des

effets portant sur plusieurs variables dépendantes *prises conjointement*. Par exemple, pour chaque source de variation, on peut construire, à partir des effets individuels associés à chacune des neuf variables, un indice combinant l'effet des neuf variables et rechercher une conclusion globale pour cet indice.

Désignons par  $\delta$  le vecteur-colonne des  $r=9$  effets "vrais" et par  $d$  celui des 9 effets observés, et notons  $\Sigma$  la matrice des variances et covariances. En utilisant la distance de Mahalanobis, nous définirons deux indicateurs numériques permettant de résumer l'effet multidimensionnel de chacune des sources de variation:

$$\Delta = (\delta' \Sigma^{-1} \delta)^{1/2}$$

indicateur de la *grandeur de l'effet vrai*;

$$\Omega = ((\delta-d)' \Sigma^{-1} (\delta-d))^{1/2}$$

indicateur de la *grandeur de l'écart entre l'effet vrai et l'effet observé*.

Comme modèle d'échantillonnage, nous poserons le modèle suivant, que nous appelons *structure "multinormale - Wishart"*, qui constitue une extension multivariée de la structure "normale - khi-deux":

$$d \parallel S \mid \delta, \Sigma$$

$$d \mid \delta, \Sigma \sim N_r(\delta, b\Sigma) \quad b > 0 \quad \Sigma > 0 \text{ (au sens des formes quadratiques)}$$

$$S \mid \delta, \Sigma \sim \frac{1}{q} W_{r; q}(\Sigma)$$

Ici encore rien n'empêche de commencer par tester  $\Delta = 0$ , en procédant au test de Hotelling classique, défini à partir de la statistique numérique

$$D^2 = d' S^{-1} d:$$

$$\text{Sous } H_0: \Delta = 0, F = \frac{q-r+1}{qr} \frac{D^2}{b} \sim F_{r, q-r+1} \quad (F \text{ centré usuel})$$

Mais bien sûr la conclusion de rejet de  $H_0$  sera ici encore moins intéressante que dans le cas univarié. Ce qui importe, c'est de se prononcer sur *l'importance* des effets, ce que va permettre la mise en oeuvre des procédures fiducio-bayésiennes.

La distribution fiducio-bayésienne relative à  $\Omega$  est une distribution du khi (racine carrée d'un khi-deux) centré:

$$\Omega^* \sim \sqrt{b} \chi_r$$

et, compte tenu du nombre élevé de degrés de liberté, celle relative à  $\Delta$  est approximativement une distribution du khi non-centré:

$$\Delta^* \sim \sqrt{b} \chi_r^2 \left( \frac{D^2}{b} \right)$$

D'où les résultats suivants pour les trois sources de variation examinées:

<i>Pédagogie</i>	$P(\Delta^* > 0.87) = 0.90$	$P(\rho^* < 0.42) = 0.90$
<i>Milieu</i>	$P(\Delta^* > 0.63) = 0.90$	$P(\rho^* < 0.42) = 0.90$
<i>Interaction</i>	$P(\Delta^* > 0.63) = 0.90$	$P(\rho^* < 0.84) = 0.90$

Ces résultats pourront être considérés comme constituant un résumé inférentiel condensé de la recherche effectuée.

### 3 - PROCEDURES FIDUCIO-BAYESIENNES POUR LA STRUCTURE "MULTINORMALE - WISHART"

#### 3.1 - Solution fiducio-bayésienne

Nous appellerons structure statistique "*multinormale - Wishart*" la donnée de deux statistiques,  $d$  et  $S$ , qui sont distribuées indépendamment, respectivement  $N_r(\delta, b\Sigma)$  et  $\frac{1}{q} W_{r;q}(\Sigma)$  (distribution de *Wishart*  $r$ -dimensionnelle à  $q$  degrés de liberté, de matrice de covariance  $\Sigma$ , cf ANDERSON <15>).

Dans le cas particulier  $r=1$ , cette structure se réduit à la structure "*normale - khi-deux*":  $d \sim N(\delta, b\sigma^2)$  et  $S^2 \sim \sigma^2 \chi_q^2/q$ .

Les procédures fiducio-bayésiennes pour la structure "*multinormale - Wishart*" sont la généralisation directe des solutions bayésiennes "standard" pour l'inférence sur la moyenne sous le modèle multinormal (par exemple PRESS <16>, p. 161-170) ou sur les paramètres du modèle linéaire général multinormal (par exemple BOX et TIAO <6>, chapitre 8).

La solution bayésienne la plus simple correspond au choix d'une distribution initiale "non-informative", définie en prenant la densité conjointe  $f(\delta, \Sigma)$  proportionnelle à  $|\Sigma|^{-(r+1)/2}$ . Dans ce cas la distribution finale pour  $\delta$  ne dépend que des valeurs observées de  $d$  et  $S$ . Il s'agit d'un  $t$  multivarié généralisé (une distribution classique en statistique bayésienne), centré sur  $d$ :

$$\delta | d, S \sim t_{r; q-r+1} \left( d, b \frac{q}{q-r+1} S \right)$$

Nous appelons solution bayésienne standard, ou encore solution fiducio-bayésienne cette solution.

### 3.2 - Lien avec le test de signification

Cette solution permet de réinterpréter le résultat du test de signification. Commençons par remarquer que la distribution finale relative à  $S^{-1/2}\delta$  peut se mettre sous la forme générale suivante:

$$S^{-1/2}\delta|d,S \sim t_{r,q-r+1}(S^{-1/2}d, e^2 I_r)$$

avec  $e^2 = d'S^{-1}d/rF_{obs} = D^2/rF_{obs}$ , où  $F_{obs}$  est la valeur observée de la statistique de test  $F$  définie dans la section précédente (pourvu que  $d \neq 0$ ).

On en déduit:

$$(\delta-d)'S^{-1}(\delta-d)|d,S \sim \frac{D^2}{F_{obs}} F_{r,q-r+1}$$

d'où

$$P\{(\delta-d)'S^{-1}(\delta-d) > D^2\} = P\{F_{r,q-r+1} > F_{obs}\} = p$$

$p$  étant par définition le *seuil observé* du test  $F$  (ou du  $\chi^2$  de Hotelling).

Dans l'espace  $r$ -dimensionnel, cette réinterprétation de  $p$  peut s'énoncer comme: la probabilité que le vecteur  $S^{-1/2}\delta$  soit situé à l'intérieur de l'hypersphère centrée sur l'extrémité du vecteur  $S^{-1/2}d$  et passant par l'origine est égale à  $1-p$ .

On retrouve le fait qu'un résultat significatif ( $1-p$  élevé) nous dit simplement que les données sont incompatibles avec l'hypothèse nulle  $\delta=0$ , mais ne nous renseigne en rien sur l'importance des effets; tandis qu'un résultat non-significatif ( $1-p$  relativement faible) n'est en toute rigueur qu'un constat d'ignorance.

### 3.3 - Procédures fiducio-bayésiennes

Les procédures fiducio-bayésiennes permettent d'aller au delà du test de signification en attribuant une probabilité à n'importe quelle région de l'espace. En particulier, si l'on souhaite une appréciation globale sur l'ensemble des variables, il sera judicieux de considérer la probabilité correspondant à une hypersphère *centrée sur l'origine*. Cette probabilité est donnée par la distribution de la variable numérique  $\delta'S^{-1}\delta$ ; cette distribu-

tion est une distribution que nous appelons "psi-deux", à  $r$  et  $q-r+1$  degrés de liberté (comme la statistique de test), d'excentricité  $rF_{\text{obs}}$  et d'échelle  $e^2 = bq/(q-r+1)$  (cf LECOUTRE et ROUANET <17>).

$$\sigma'S^{-1}\sigma|d,S \sim e^2 \psi_{r,q-r+1}^2(rF_{\text{obs}})$$

$$\text{(avec } e^2 = \frac{D^2}{rF_{\text{obs}}} \text{ pourvu que } d \neq 0)$$

Les procédures précédentes reviennent en quelque sorte à "calibrer" les effets à partir de la matrice des variances et covariances observées  $S$ . On pourra préférer calibrer les effets à partir de la matrice des variances et covariances "vraies"  $\Sigma$  (comme nous l'avons fait dans la section précédente). On considérera alors les distributions fiducio-bayésiennes:

$$D^2 = (\sigma-d)' \mathcal{L}^{-1}(\sigma-d)|d,S \sim b\chi_r^2$$

$$d^2 = \sigma' \mathcal{L}^{-1}\sigma|d,S \sim L_{r,q}^2\left(\frac{D^2}{b}\right)$$

et, dans le cas particulier  $r=1$ ,

$$\frac{d}{\sigma}|d,s^2 \sim L_q'\left(\frac{d}{s}, b\right)$$

On trouvera dans LECOUTRE <18> une présentation des distributions  $\psi^2$ ,  $L^2$  et  $L'$ , ainsi que des distributions  $K^2$  et  $K'$  qui interviennent pour caractériser les distributions fiducio-bayésiennes *prédictives*.

#### REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- <1> MOSTELLER F., TUKEY, J., *Data Analysis and Regression*, Addison-Wesley, 1977.
- <2> de FINETTI, B., *Theory of Probability (volume 2)*, Wiley, 1975.
- <3> JEFFREYS, H., *Theory of Probability*, Oxford University Press, 1961 (troisième édition).
- <4> FISHER, R.A., *Statistical Methods and Scientific Inference*. Oliver and Boyd, 1956.
- <5> LINDLEY, D.V., *Introduction to Probability and Statistics from a Bayesian Viewpoint, Part 2 - Inference*, Cambridge University Press, 1965.



- <6> BOX, G.E.P., TIAO, G.C., *Bayesian Inference in Statistical Analysis*, Addison-Wesley, 1973.
- <7> ROUANET, H., LECOUTRE, B., "Specific inference in ANOVA: From significance tests to Bayesian procedures", *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 1983, Vol. 36, pp. 252-268.
- <8> LECOUTRE, B., *L'Analyse Bayésienne des Comparaisons*, Presses Universitaires de Lille, 1984.
- <9> LECOUTRE, B., "How to derive Bayes-fiducial conclusions from usual significance tests", *Cahiers de Psychologie Cognitive*, 1985, Vol. 5, pp. 553-563.
- <10> BERNARD, J.-M., BLANCHETEAU, M., ROUANET, H., "Le comportement prédateur chez un forficule, *Eurobellia Moesta* (Géné), II - Analyses séquentielles au moyen de méthodes d'inférence bayésienne", *Biology of Behaviour*, 1985, Vol. 10, pp. 1-22.
- <11> BERNARD, J.-M., "Méthodes d'inférence bayésienne sur des fréquences", *Informatique et Sciences Humaines*, 1986, Vol. 68-69, pp. 89-133.
- <12> POITEVINEAU, J., LECOUTRE B., "PIF: Un Programme d'Inférence Fiducio-bayésienne". *Informatique et Sciences Humaines*, 1986, Vol. 68-69, pp. 77-88.
- <13> POITEVINEAU, J., BERNARD, J.-M., "La série des programmes IBF", *Informatique et Sciences Humaines*, 1986, Vol. 68-69, pp. 135-137.
- <14> ROUANET, H., LEPINE, D., PELNARD-CONSIDERE, J., "Bayes-fiducial procedures as practical substitutes for misplaced significance testing: An application do educational data", in D.N.M. De Gruijter and L.J.Th. Van der Kamp (Eds), *Advances in Psychological and Educational Measurement*, Wiley, 1975, pp. 33-50.
- <15> ANDERSON, T.W., *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, Wiley, 1958.
- <16> PRESS, S.J., *Applied Multivariate Analysis*, Holt, Rinehart and Winston, 1972.
- <17> LECOUTRE, B., ROUANET, H., "Deux structures statistiques fondamentales en analyse de la variance univariée et multivariée", *Mathématiques et Sciences Humaines*, 1981, Vol. 75, pp. 71-82.

<18> LECOUTRE, B., "Quelques distributions utiles dans les extensions bayésiennes de l'analyse de la variance", 1986, soumis pour publication.