Statistique et analyse des données

François Brodeau

Étude des propriétés asymptotiques des estimateurs des moindres carrés pour des problèmes de régression à phases multiples

Statistique et analyse des données, tome 10, n° 3 (1985), p. 1-25.
<http://www.numdam.org/item?id=SAD_1985__10_3_1_0>

Statistique et Analyse des Données
1985 - vol.10 n°3 pp.1-25

ETUDE DES PROPRIETES ASYMPTOTIQUES DES ESTIMATEURS DES MOINDRES CARRES POUR DES PROBLEMES DE REGRESSION A PHASES MULTIPLES

François BRODEAU

Laboratoire T.I.M.3 U.S.M.G.
38402 Saint Martin d'Hères Cedex

RESUME : *On montre pour un problème de régression à deux phases que la suite des estimateurs des moindres carrés est constitante et asymptotiquement normale.Ces résultats,déja formulés par certains auteurs sous d'autres hypothèses,sont établis de façon élémentaire en employant des approximations des fonctions utilisées par des fonctions plus régulières.Les hypothèses faites ici sont très faciles à vérifier et satisfaites dans les cas usuels.La généralisation à plus de deux phases ne présente pas alors de difficultés.*

ABSTRACT : *For a problem of two-phases regression it is shown that the sequence of the least squares estimators is consistent and asymptoticaly normal. Theses results,already given by some authors under different asumptions,are demonstrated in an elementary manner by using sufficiently smooth approximations of the functions used.The asumptions made here are verified and satisfied in the usual cases.Generalisation to multiple-phases regression can be made without difficulties.*

Mots cles : *Régression à phases multiples,estimateur des moindres carrés, consistance,normalité asymptotique.*

Indices de classification STMA : *07-020, 07-140*

Manuscrit reçu le 16 avril 1985
révisé le 24 avril 1986

I - INTRODUCTION

Pour une suite donnée $\{ t_i \}_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments distincts de $[0,1]$ on considère le modèle de régression défini par

$$X_{ti} = f_{ti}(\theta^*) + e_{ti}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

$\{ e_{ti} \}_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, supposées indépendantes et de même loi, centrées, et de variance σ^2 inconnue. Pour tout élément t de $[0,1]$ $f_t(.)$ est une application continue d'un sous-ensemble compact Θ de $\mathbb{R}^p$, $p \geq 2$, dans $\mathbb{R}$. θ^* appartient à l'intérieur de Θ.

On pose $\theta = {}^t(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p)$, $\theta_1 = \tau$, ${}^t(\theta_2, \ldots, \theta_p) = \xi$, $\theta^* = {}^t(\tau^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_p^*)$.

θ^* est la valeur supposée inconnue du paramètre θ.
Pour tout élément θ de Θ f. (θ) est une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, deux fois continûment dérivable sauf en τ où l'une au moins de ces dérivées est supposée présenter une discontinuité.
On suppose qu'existent deux nombres a et b tels que

1.1) $$0 < a \leq \tau \leq b < 1.$$

On a ainsi $\Theta = [a,b] \times \Xi$, où Ξ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^{p-1}$.

Le problème traité ici est celui de l'existence et des propriétés de l'estimateur des moindres carrés de θ^*, défini comme minimisant, pour n fixé, sur Θ

$$H_n(\theta) = 1/n \sum_{i=1,n} (X_{ti} - f_{ti}(\theta))^2.$$

Ce problème a été abordé par HINKLEY (6), (7) dans le cas où f.(θ) est affine par morceaux. Les méthodes utilisées, en particulier pour établir la normalité asymptotique, sont très empiriques et peu convaincantes. FEDER (5) a développé plus tard une généralisation à plusieurs points de rupture et à des fonctions non nécessairement affines. Ce travail comporte des hypothèses difficilement vérifiables, même dans les cas les plus simples. De plus les procédés employés semblent inutilement compliqués. Plus récemment DESHAYES et PICARD (3), (4) ont étudié le problème à l'aide de méthodes probabilistes modernes dans le cas de rupture au niveau de la loi de probabilité pour une suite de variables aléatoires indépendantes. Les résultats obtenus sont sauf dans certains cas, ainsi $f_t(\theta)$ affines (cf (1) par exemple), peu adaptées à des applications à des modèles de régression.

On a ici, en conséquence, repris l'étude en s'inspirant d'un travail de JENRICH (8) consacré au même problème dans le cas où il n'y a pas de rupture. On se ramène à ce cas par une modification de $f.(\theta)$ au voisinage de τ. La simplicité et l'efficacité des méthodes de (8) permettent de conclure à la consistance et à la normalité asymptotique de l'estimateur.

On constatera toutefois que, en ce qui concerne cette dernière propriété, la démonstration ne se réduit pas à une simple adaptation du travail de Jenrich. La suite des dérivées secondes par rapport à τ des fonctions modifiées n'étant pas bornée, certains passages à la limite nécessitent des propriétés assez fines de sommes partielles de variables aléatoires.

Pour des commodités d'exposition on se limite au cas d'une seule rupture. A la fin de l'exposé on montre comment la généralisation à plus d'une rupture se fait naturellement.

I.2 - LE MODELE

On pose

$$f_t(\theta) = f^1(t-\tau,\xi)\,\mathbb{1}_{[0,t]}(t) + f^2(t-\tau,\xi)\,\mathbb{1}_{]t,1]}(t)\ ,\quad f^1(0,\xi) = f^2(0,\xi)$$

Les hypothèses suivantes sont imposées à f^1 et f^2.

H_1 - $f^1(u,\xi)$ ($f^2(u,\xi)$) est définie et continue sur $[-b,0]\times\Xi$ ($[0,1-a]\times\Xi$).

H_2 - f^1 et f^2 sont continûment dérivables sur leur domaine de définition jusqu'à l'ordre 2. De plus pour $i = 1, 2$; j, $k = 2, 3, \ldots, p$ les dérivées partielles

$$\frac{\partial^3 f^i(u,\xi)}{\partial u\, \partial \xi_j^2}, \quad \frac{\partial^3 f^i(u,\xi)}{\partial u^2\, \partial \xi_j} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^4 f^i(u,\xi)}{\partial u^2\, \partial \xi_j\, \partial \xi_k} \qquad \text{existent et sont continues.}$$

Remarque 1 :
il découle de H_1 que pour tout t élément de $[0,1]$ $f_t(.)$ est continue sur Θ. Θ étant compact, H_1 et H_2 entraînent l'existence d'une constante $K > 0$ telle que f^1, f^2 et celles de leur dérivées partielles qui existent sont majorées en valeur absolue par K.
L'hypothèse suivante est essentielle pour conclure à la consistance des estimateurs.

H_3 - θ et θ' étant éléments de Θ, si pour tout élément t de $[0,1]$, on a $f_t(\theta) = f_t(\theta')$, alors $\theta = \theta'$.
Dans la suite on attribue arbitrairement, et sans conséquence pour les résultats, à

$$\frac{\partial f_{\tau^*}(\theta^*)}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, p$$

la valeur obtenue pour la dérivée correspondante de $f^1(\tau^* - \tau, \xi)$ en θ^*. On peut alors formuler l'hypothèse.

H_4 - Quels que soient $x_1, x_2, \dots, x_p$ réels non tous nuls, $\sum_{i=1,p} x_i\, \partial f_t(\theta^*) / \partial \theta_i$, en tant que fonction de t, est différente de zéro sur un borélien de $[0,1]$ de mesure de Lebesgue strictement positive.
Pour n entier et t élément de $[0,1]$ on pose $F_n(t) = 1/n \sum_{i=1,n} \mathbb{1}_{[0,t]}(t_i)$.
La répartition des t_i est soumise aux conditions suivantes.

H_5 - La suite $\{F_n\}_n$ converge ponctuellement vers une fonction F continue, strictement croissante sur $[0,1]$ et telle que $F(0) = 0$.

H_6 - Il existe une constante $k > 0$ telle que, quel que soit n, quels que soient t, t' éléments de $[0,1]$, $t < t'$,

$$\text{card}\, \{i \in [1,2,\dots,n] \mid t \leq t_i \leq t'\} \leq [\, kn(t'-t)\,] + 1.$$

H_7 - il existe un nombre $t_0>0$ tel que pour $|t| < t_0$ on a

$$E [\exp (te_{t1})] < +\infty$$

Les hypothèses H_1, H_2, H_3 sont vérifiées de façon évidente dans tous les cas usuels ; fonctions affines, paraboliques, exponentielles ... . La condition H_4 est plus restrictive. Ainsi il est facile de vérifier que lorqu'on utilise des fonctions polynômiales elle n'est satisfaite que si la rupture en t se manifeste au niveau des tangentes.

H_5 et H_6 imposent une régularité dans la répartition des x_i, et sont vérifiées, par exemple dans le cas d'une dichotomie de [0,1].
H_7 n'est utilisée que pour la normalité asymptotique. Il semble difficile de ne pas imposer à la loi des e_{ti} une condition de décroissance rapide à l'infini pour obtenir cette propriété.

I.3 - LES RESULTATS

Pour n entier on pose $Q_n (\theta,y) = 1/n \sum_{i=1,n} (y_i - f_{ti} (\theta))^2$, $\theta \in \Theta$, $y \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_i)$.
$Q_n (\theta,.)$ est mesurable, et $Q_n (.,y)$ est continue sur Θ d'après H_1. Le lemme 2 de (8) s'applique, et entraîne l'existence d'une application mesurable, notée θ, de $\mathbb{R}^n$ dans Θ telle que $Q_n (\theta (y),y) = \inf_{\theta\in\Theta} Q_n(\theta,y)$.
On peut donc définir un estimateur des moindres carrés, noté θ_n, relatif à H_n. Le problème de l'estimation de θ^* et σ^2 à l'aide de $\{\theta_n\}_n$ est résolu par le théorème.

Théorème 1 : **Sous les hypothèses H_1, H_3 et H_5**

1.2) P p.s. $\lim_n \theta_n = \theta^*$

1.3) P p.s. $\lim_n H_n(\theta_n) = \sigma^2$.

Le problème de la normalité asymptotique de la suite $\{\theta_n\}_n$ est résolu par le théorème suivant <u>sous l'ensemble des hypothèses</u> ; pour θ élement de Θ $K(\theta)$ désigne la matrice

$$K(\theta) = \left(\left(\int_0^1 (\partial f_t(\theta^*)/\partial \theta_i)\ (\partial f_t(\theta^*)/\partial\theta_j)\ dF(t) \right) \right)_{i,j=1,\dots,p}.$$

Théorème 2 : **$K(\theta^*)$ est définie - positive. Au sens de la convergence en loi**

1.4) $\qquad \lim_n n^{1/2}\ (\theta_n - \theta^*) = N\,(0, \sigma^2 K^{-1}(\theta^*)).$

De plus

1.5) $\qquad$ P p.s. $\lim_n ((\ 1/n \sum_{i=1,n} \partial f_{ti}(\theta_n)/\partial \theta_k \,.\, \partial f_{ti}(\theta_n)/\partial\theta_j\ ))_{j,k} = K(\theta^*).$

I.4 - DEMONSTRATION DU THEOREME 1

C'est une simple application du théorème 6 de (8). Les hypothèses a et b de ce théorème sont satisfaites. En effet seule b est à vérifier. Comme $f_t(\theta)$ est une fonction de (t, θ) continue sur le compact $[0,1] \times \Theta$, on a, grâce à H_5,

$$\lim_n\ 1/n \sum_{i=1,n} (\ f_{ti}(\theta) - f_{ti}(\theta^*))^2 = \int_{[0,1]} (\ f_t(\theta) - f_t(\theta^*))^2\ dF(t) = L(\theta).$$

On a donc $L(\theta) \geq 0$, l'égalité n'étant possible d'après H_5 que si pour presque tout t élément de $[0,1]$ on a $f_t(\theta) = f_t(\theta^*)$. H_3 permet alors de conclure que $L(\theta)$ a un minimum unique pour $\theta = \theta^*$.

Remarque 2 :
Pour toute suite $\{\theta_n\}_n$ d'éléments de Θ convergeant vers θ, on a $\lim_n\ (\ f_t(\theta_n) - f_t(\theta^*))^2 = (\ f_t(\theta) - f_t(\theta^*))^2$ pour tout t. Cette convergence est dominée d'après la remarque 1. On en déduit $\lim_n L(\theta_n) = L(\theta)$. L est donc continue sur Θ.

II. DEMONSTRATION DU THEOREME 2

Les résultats de (8) sur la normalité asymptotique ne sont pas applicables car ils supposent l'existence de dérivées partielles jusqu'a l'ordre deux pour $f_t(.)$. On s'inspire toutefois des méthodes de (8) en réalisant une approximation de $f_t(\theta)$ par une suite $\{f_t^n(\theta)\}_n$ de fonctions vérifiant ces conditions de dérivabilité.

II.1. CONSTRUCTION DE LA SUITE $\{f_t^n(\theta)\}_n$

Proposition 1 : **Il existe une constante $H > 0$ telle que, pour tout r vérifiant $0 < r \leq r_0 < \min(1-a,b)$, il existe une application $f_t^r(\theta)$ de $[0,1] \times \Theta$ dans $\mathbb{R}$, deux fois continûment dérivable et telle que**

2.1) $\forall\, t \in [0,1],\ \forall \theta \in \Theta,\ |f_t(\theta) - f_t^r(\theta)| \leq Hr.$

Démonstration : Cette démonstration étant longue mais sans grandes difficultés, on se contente d'en indiquer les étapes essentielles.

On construit d'abord une application $g^r(u,\xi)$ définie sur $[-b, 1-a] \times \Xi$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ deux fois continûment dérivable, et coïncidant pour tout élément ξ de Ξ avec $f^1(u,\xi)$ pour $u \leq -r$, et $f^2(u,\xi)$ pour $u \geq r$. Pour $-r \leq u \leq +r$ on pose

$$g^r(u,\xi) =$$
$$f^1(-r,\xi) + (u+r)\, \partial f^1/\partial u\, (-r,\xi) + ((u+r)^2/2)\, (\partial^2 f^1/\partial u^2)(-r,\xi) + \textstyle\sum_{i=1,3} (u+r)^{2+i} a_r^i(\xi).$$

Cette définition entraîne que

2.2) $$g^r(-r,\xi) = f^1(-r,\xi),$$
$$\partial g^r/\partial u\,(-r,\xi) = \partial f^1/\partial u\,(-r,\xi),\ (\partial^2 g^r/\partial u^2)(-r,\xi) = (\partial^2 f^1/\partial u^2)(-r,\xi).$$

On impose alors les trois conditions

2.3) $g^r(r,\xi) = f^2(r,\xi)$, $\partial g^r/\partial u\,(r,\xi) = \partial f^2/\partial u\,(r,\xi)$, $(\partial^2 g^r/\partial u^2)(r,\xi) = (\partial^2 f^2/\partial u^2)(r,\xi)$.

2.3) conduit pour a_r^i $i = 1,2,3$, à un système linéaire (S) de trois équations. Un calcul élémentaire montre que (S) admet une solution unique. La résolution de (S) montre, en utilisant la remarque 1, l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

2.4) $\qquad \forall\, i \in [1,2,3],\ \forall\, r \in]0, r_0],\ \forall \xi \in \Xi \quad |a_r^i(\xi)| \leq C r^{1-i}.$

On définit alors $f_t^r(\theta)$ par

$$f_t^r(\theta) = f^1(t-\tau,\xi)\, 1_{[0,\tau-r]}(t) + g^r(t-\tau,\xi)\, 1_{]\tau-r,\tau+r[}(t) + f^2(t-\tau,\xi)\, 1_{[\tau+r,1]}(t).$$

2.4) et la remarque 1 permettent d'obtenir 2.1) en comparant $f_t^r(\theta)$ à $f_t^1(\theta)$ sur $[\tau - r, \tau]$, et à $f_t^2(\theta)$ sur $[\tau, \tau + r]$.

H_2 et les relations 2.2) et 2.3) entraînent facilement que $f_t^r(\theta)$ possède les propriétés de dérivabilité requises.

Remarque 3 : La démonstration précédente montre que $f_t^r(.)$ et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre deux sont uniformément bornées, par rapport à (t, θ, r), $t \in [0,1]$, $\theta \in \Theta$, $r \in]0, r_0]$, par une constante encore notée K, sauf $\partial^2 f_t^r / \partial \tau^2$ pour laquelle on a une majoration par K/r.

Soit alors $\{r(n)\}_n$ une suite numérique décroissante vers 0 comme $n^{-\alpha}$, $0<\alpha<1$ et telle que

2.5) $\qquad \lim_n n\,(r(n))^{3/2} = 0,\ r(n) \leq r_0.$

On définit la suite $\{f_t^n(\theta)\}_n$ par $f_t^n(\theta) = f_t^{r(n)}(\theta)$.

Si l'on pose

$H'_n(\theta) = 1/n \sum_{i=1,n} (X_{ti} - f^n_{ti}(\theta))^2$, on peut montrer l'existence, comme au § 1.3, de l'estimateur, noté θ'_n des moindres carrés relatif à $H'_n(\theta)$. La suite $\{\theta'_n\}_n$ est l'auxiliaire essentiel pour la démonstration du théorème 2.

II.2 CONSISTANCE DE LA SUITE $\{\theta'_n\}_n$

Proposition 2 : 2.6) P p.s. $\lim_n \theta'_n = \theta^*$.

Démonstration : Les fonctions $f^n{}_{ti}$ (.) dépendant de n, on adapte la démonstration du théorème 6 de (8). On a

$$H'_n(\theta) = U_n{}^1(\theta) + U_n{}^2(\theta) + 1/n \sum_{i=1,\,n} e_{ti}{}^2, \text{ où}$$
$$U_n{}^1(\theta) = 1/n \sum_{i=1,\,n} (f_{ti}(\theta^*) - f_{ti}{}^n(\theta))^2,\ U_n{}^2(\theta) = 2/n \sum_{i=1,\,n} (f_{ti}(\theta^*) - f_{ti}{}^n(\theta))\, e_{ti}.$$

Les lemmes intermédiaires suivants permettent d'étudier la suite $\{H'_n(\theta)\}_n$.

Lemme 1 : la suite $\{U_n{}^1(\theta)\}_n$ converge uniformément en θ sur Θ vers $L(\theta)$.

Démonstration : on a

$$U_n{}^1(\theta) = 1/n \sum_{i=1,\,n} (f_{ti}(\theta^*) - f_{ti}(\theta))^2 + R_n{}^1, \text{ où}$$
$$R_n{}^1(\theta) = \int_{[0,1]} (2\, f_t(\theta^*) - f_t(\theta) - f_t{}^n(\theta))\ (f_t(\theta) - f_t{}^n(\theta))\, dF_n(t).$$

On sait, d'après le théorème 1, que

(2.7) $$\lim_n 1/n \sum_{i=1,\,n} (f_{ti}(\theta^*) - f_{ti}(\theta))^2 = L(\theta).$$

Un résultat classique assure que, la famille de fonctions $\{f.(\theta^*) - f.(\theta)\}_{\theta\in\Theta}$ étant équicontinue en vertu de la remarque 1, la convergence dans 2.7) a lieu uniformément en θ.
Les remarques 1 et 3 et 2.1) entraînent d'autre part l'existence d'une constante $M > 0$ telle que

$$\forall\theta\in\Theta \quad |R_n{}^1(\theta)| \le Mr(n).$$ D'où le lemme grâce à 2.7).

Lemme 2 : Presque-sûrement la suite $\{U_n{}^2(\theta)\}_n$ converge uniformément en θ sur Θ vers 0.

Démonstration : On peut écrire,

$$U_n{}^2(\theta) = 2/n \sum_{i=1,n} (f_{ti}(\theta^*) - f_{ti}(\theta))\, e_{ti} + 2/n \sum_{i=1,n} (f_{ti}(\theta) - f_{ti}{}^n(\theta))\, e_{ti}.$$

Si on remarque que pour θ fixé la série de terme général $1/i^2\ E\,|(f_{ti}(\theta^*) - f_{ti}(\theta))e_{ti}|^2$ est convergente, on déduit d'une propriété classique des variables aléatoires indépendantes

2.8) $$P \text{ p.s. } \lim_n\ 2/n \sum_{i=1,n} (f_{ti}(\theta^*) - f_{ti}(\theta))\, e_{ti} = 0.$$

La famille de fonctions $\{f_t(.)\}_{t\in[0,1]}$ étant équicontinue, il est alors facile de montrer à l'aide de la loi forte des grands nombres appliquée à $\{\ |e_{ti}|\ \}_{i\in N}$ et de la compacité de Θ que 2.8) est vraie uniformément en θ.
Comme d'après 2.1)

2.9) $$|\ 2/n \sum_{i=1,n} (f_{ti}(\theta) - f_{ti}^n(\theta))\, e_{ti}\,| \le 2Hr(n)\ 1/n \sum_{i=1,n} |\, e_{ti}\,|,$$

le lemme se déduit de la loi forte des grands nombres.
2.9) et les lemmes 1 et 2 entraînent le lemme suivant

Lemme 3 : P p.s. $\lim_n H'_n(\theta) = L(\theta) + \sigma^2 = H(\theta)$, **uniformément en θ sur Θ.**
On peut alors démontrer la proposition 2 en considérant un point d'accumulation θ' de la suite $\{\theta'_n\}_n$, et $\{\theta'_{n'}\}_{n'}$ une sous-suite convergeant vers θ'. On a

2.10) $$|\ H'_{n'}(\theta'_{n'}) - H(\theta')\ | \le |H'_{n'}(\theta'_{n'}) - H(\theta'_{n'})\ | + |H(\theta'_{n'}) - H(\theta')\ |.$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 3 il existe un entier N tel que

2.11) $$P \text{ p.s. } \forall\, \theta \in \Theta\ \forall\, n' \ge N\ \ |\ H'_{n'}(\theta) - H(\theta)| \le \varepsilon/2.$$

D'après la remarque 2 il existe un entier N' tel que

$$\forall\, n' \ge N'\ \ |\ H(\theta'_{n'}) - H(\theta')| \le \varepsilon/2.$$

Cette inégalité, 2.10) et 2.11) entraînent

2.12) $$P \text{ p.s. } \lim_{n'}\ H'_{n'}(\theta'_{n'}) = H(\theta').$$

Par hypothèse on a, pour tout n', $H'_{n'}(\theta'_{n'}) \leq H'_{n'}(\theta^*)$.
Donc, d'après 2.12) et le lemme 3 P p.s. $H(\theta') \leq H(\theta^*)$; c'est à dire

$$\text{P p.s.} \int_{[0,1]} (f_t(\theta^*) - f_t(\theta'))^2 \, dF(t) + \sigma^2 \leq \sigma^2, \text{ et } \int_{[0,1]} (f_t(\theta^*) - f_t(\theta'))^2 \, dF(t) = 0.$$

Comme au théorème 1 on en déduit P p.s. $\theta' = \theta^*$, ce qui entraîne la proposition.

II.3 - ETUDE DE LA SUITE $\{n^{1/2} (\theta'_n - \theta_n) \}_n$

Proposition 3 : P p.s $\lim_n \| n^{1/2} (\theta'_n - \theta_n) \| = 0$.
La démonstration de ce résultat utilise des résultats préliminaires. Dans toute la suite, pour θéléments de Θ, on désigne par $J_n(\theta) = \{i \mid f_{ti}{}^n(\theta) \neq f_{ti}(\theta)\}$. On a, d'après H_6,

2.13) $\qquad \forall \theta \in \Theta \ \text{card } (J_n(\theta)) \leq [2 \, knr(n)] + 1.$

Lemme 4 : P p.s. $\lim_n n (H'_n(\theta_n) - H_n(\theta_n)) = \lim_n n (H'_n(\theta'_n) - H_n(\theta'_n)) = 0$.

Démonstration : On obtient par des transformations simples

$$n(H'_n(\theta_n) - H_n(\theta_n)) = \sum_{i \in Jn(\theta n)} [(f_{ti}{}^n (\theta_n))^2 - (f_{ti}(\theta_n))^2] - 2 \sum_{i \in Jn(\theta n)} [f_{ti}{}^n (\theta_n) - f_{ti}(\theta_n)] e_{ti} - 2 \sum_{i \in Jn(\theta n)} [f_{ti}{}^n (\theta_n) - f_{ti}(\theta_n)] f_{ti}(\theta^*) .$$

2.1) et les remarques 1 et 3 permettent de montrer l'existence d'une constante $S > 0$ telle que

$$n \mid H'_n(\theta_n) - H_n(\theta_n) \mid \leq S [\text{Card } (J_n(\theta_n)) + \sum_{i \in Jn(\theta n)} \mid e_{ti} \mid] \, r(n)$$
$$\leq S [\text{card } (J_n(\theta_n)) + (\text{card } (J_n(\theta_n)))^{1/2} (\sum_{i=1,n} e_{ti}{}^2 /n) \, n^{1/2}] \, r(n)$$

La loi forte des grands nombres, 2.5) et 2.13) donnent immédiatement le premier résultat. Le deuxième s'obtient de la même façon.

Les deux inégalités $0 \leq H_n(\theta'_n) - H_n(\theta_n)$, $0 \leq H'_n(\theta_n) - H'_n(\theta'_n)$,
ont pour conséquence la majoration suivante

2.14) $\quad 0 \leq H'_n(\theta_n) - H'_n(\theta'_n) \leq H'_n(\theta_n) - H_n(\theta_n)) + (H_n(\theta_n) - H'_n(\theta'_n)).$

2.14) et le lemme 4 entraînent le lemme suivant.

Lemme 5 $\quad$ P p.s. $\lim_n n(H'_n(\theta_n) - H'_n(\theta'_n)) = 0.$

Dans la suite on pose, pour θ élément de Θ, $K_n(\theta) = 1/2 ((\partial^2 H'_n(\theta) / \partial \theta_i \partial \theta_j))_{i,j}$
On peut écrire

$$H'_n(\theta_n) - H'_n(\theta'_n) = {}^t(\theta_n - \theta'_n) ((\partial H'_n(\theta'_n) / \partial \theta_i))_i + {}^t(\theta_n - \theta'_n) K_n (\theta^*_n) (\theta_n - \theta'_n),$$

où θ^*_n appartient au segment de droite joignant θ_n et θ'_n.
On peut définir θ^*_n, en adaptant la démonstration du lemme 3 de [8], comme une application mesurable de $\mathbb{R}^n$ dans Θ. Cette démonstration suppose que Θ est de plus convexe. On peut limiter θ_n et θ'_n à un voisinage convexe de θ^* puisque P p.s. $\lim_n \theta_n = \lim_n \theta'_n = \theta^*$, et que θ^* est à l'intérieur de Θ. Il n'y a donc pas en fait de restriction à imposer à Θ. De même, P p. s. pour n suffisamment grand, θ'_n appartient à l'intérieur de Θ et ainsi $((\partial H'_n(\theta'_n) / \partial \theta_i))_i = 0$.
On a dans ces conditions

2.15) $\quad$ P p.s. $n (H'_n(\theta_n) - H'_n(\theta'_n) = n^{1/2}\ {}^t(\theta_n - \theta'_n) K_n (\theta^*_n) (\theta_n - \theta'_n)\ n^{1/2}.$

On désigne alors par $\{\lambda_i^n\}_{i=1,\dots,p}$ les valeurs propres de $K_n (\theta^*_n)$, et par Λ_n la matrice diagonale obtenue avec ces valeurs propres. Le résultat suivant est la clef de la démonstration de la proposition 3.

Proposition 4 : **Il existe une constante $\lambda > 0$, telle que P p.s. pour n suffisamment grand $\lambda_i^n \geq \lambda$, i = 1, ... ,p.**

On montre d'abord que cette proposition entraîne la proposition 3.
Soit L_n matrice orthogonale telle que $K_n(\theta^*_n) = {}^tL_n \Lambda_n L_n$. On pose

$$u_n = \{u_{n,i}\}_{i=1,\dots,p} = n^{1/2} L_n (\theta_n - \theta'_n).$$

D'après 2.15) P p.s. pour n suffisamment grand

$$n\,(H'_n(\theta_n) - H'_n(\theta'_n) = \sum_{i=1,p} \lambda_i^n (u_{n,i})^2 \geq \lambda \, \| u_n \|^2.$$

On déduire du lemme 5 que, P p. s.

$$\lim_n \|u_n\| = \lim_n \| n^{1/2}\, {}^t(\theta_n - \theta'_n) \| = 0.$$

La proposition 3 est ainsi démontrée. Le reste du § 2.3 est en conséquence consacré à la démonstration de la proposition 4. On démontre pour cela la proposition suivante.

Proposition 5 : P p.s. $\lim_n K_n(\theta^*_n) = K(\theta^*)$.

Démonstration : On a, pour j , k éléments de 1, 2, ... , p

$1/2 \;(\partial^2 H'_n(\theta^*_n) / \partial\theta_k \partial\theta_j)$

2.16) $= 1/n \sum_{i=1,n} (\partial f_{ti}^n(\theta^*_n) / \partial\theta_k) \,.\, (\partial f_{ti}^n(\theta^*_n) / \partial\theta_j) - 1/n \sum_{i=1,n}$
$(\partial^2 f_{ti}^n(\theta^*_n) / \partial\theta_k \partial\theta_j)\, e_{ti} + 1/n \sum_{i=1,n} (f_{ti}(\theta^*) - f_{ti}^n(\theta^*_n))\; (\partial^2 f_{ti}^n(\theta^*_n) / \partial\theta_k \partial\theta_j)$.

On étudie séparément le comportement de chacun des trois termes du membre de droite.

Lemme 6 : P p.s. $\lim_n 1/n \sum_{i=1,n} (\partial f_{ti}^n(\theta^*_n) / \partial\theta_k)\, (\partial f_{ti}^n(\theta^*_n) / \partial\theta_j) = K_{kj}(\theta^*)$.

Démonstration : Pour m entier on pose $\theta^*_m = (\tau^*_m, \xi^*_m)$. Soit alors

$\delta(n) = \ (|\tau^* - \tau^*_m |)$.
Comme P p.s. $\lim_n \theta_n = \lim_n \theta'_n = \theta^*$, on a P p.s. $\lim_n \theta^*_n = \theta^*$. La suite $\{\delta(n)\}_n$ est donc convergente vers 0.
On désigne par J_n l'ensemble des éléments i de $\{1,2,...,n\}$ tels que t_i appartienne au segment fermé joignant τ^* et τ^*_n, et $I_n = {}^cJ_n$.
On peut écrire

2.17) $$1/n \sum_{i=1,n} (\partial f_{ti}^n (\theta^*_n) / \partial \theta_k)(\partial f_{ti}^n (\theta^*_n) / \partial \theta_j) - K_{kj}(\theta^*) = V_n^1 + V_n^2,$$
où

$$V_n^1 = 1/n \sum_{i \in In} \left[(\partial f_{ti} (\theta^*_n) / \partial \theta_k)(\partial f_{ti} (\theta^*_n) / \partial \theta_j) - (\partial f_{ti} (\theta^*) / \partial \theta_k)(\partial f_{ti} (\theta^*) / \partial \theta_j)\right]$$

$$+ 1/n \sum_{i \in Jn} \left[(\partial f_{ti} (\theta^*_n) / \partial \theta_k)(\partial f_{ti} (\theta^*_n) / \partial \theta_j) - (\partial f_{ti} (\theta^*) / \partial \theta_k)(\partial f_{ti} (\theta^*) / \partial \theta_j)\right]$$

$$V_n^2 = 1/n \sum_{i \in Jn(\theta^* n)} \left[(\partial f_{ti}^n (\theta^*_n) / \partial \theta_k)(\partial f_{ti}^n (\theta^*_n) / \partial \theta_j) - (\partial f_{ti} (\theta^*_n) / \partial \theta_k)\right.$$

$$\left.(\partial f_{ti} (\theta^*_n) / \partial \theta_j)\right] + 1/n \sum_{i=1,n} (\partial f_{ti} (\theta^*) / \partial \theta_k)(\partial f_{ti} (\theta^*) / \partial \theta_j) - K_{kj}(\theta^*)$$

L'utilisation de la remarque 1 et de la formule des accroissements finis entraîne qu'il existe une constante $T > 0$ telle que

2.18) $\forall\, i \in I_n, \ \forall\, m \in [1, \dots, p] \ | (\partial f_{ti} (\theta^*_n) / \partial \theta_m) - (\partial f_{ti} (\theta^*) / \partial \theta_m) | \le T \|\theta^*_n - \theta^*\|$.

On en déduit immédiatement l'existence d'une constante $K_1 > 0$ telle que

$| V_n^1 | \le K_1 n^{-1} (n T \| \theta^*_n - \theta^* \| + \text{card}(J_n)) \le K_1 T \| \theta^*_n - \theta^* \| + K_1 n^{-1} ([2kn\, \delta(n)] + 1)$
Cette majoration assure que P p.s. $\lim_n V_n^1 = 0$.

Pour V_n^2 on remarque que d'après le théorème de Helly - Bray.

$$\lim_n 1/n \sum_{i=1,n} (\partial f_{ti}(\theta^*) / \partial \theta_k)(\partial f_{ti}(\theta^*) / \partial \theta_j) = \int_{[0,1]} (\partial f_t(\theta^*) / \partial \theta_k)(\partial f_t(\theta^*)/\partial\theta_j) dF(t)$$

$$= K_{kj}(\theta^*)$$

Comme enfin il existe une constante $K_2 > 0$ telle que

$$1/n \; \Big| \sum_{i\in Jn(\theta^* n)} \Big[(\partial f_{ti}^n(\theta^*_n) / \partial\theta_k)(\partial f_{ti}^n(\theta^*_n)/\partial \theta_j) - (\partial f_{ti}(\theta^*_n) / \partial\theta_k)$$

$$(\partial f_{ti}(\theta^*_n)/\partial\theta_j) \Big] \Big| \leq K_2 / n \;\; \mathrm{card}\,(J_n(\theta^*_n)) \leq K_2 / n \,([\, n\, 2\, kr(n) \,] + 1),$$

On a donc $\lim_n V_n^2 = 0$. Le résultat du lemme découle alors de 2.17).

Lemme 7 :

$$P \text{ p.s. } \lim_n 1/n \sum_{i=1,n} (f_{ti}(\theta^*) - f_{ti}^n(\theta^*_n))(\partial^2 f_{ti}^n(\theta^*_n) / \partial \theta_k \, \partial \theta_j) = 0.$$

Démonstration : On a

$$1/n \sum_{i=1,n} (f_{ti}(\theta^*) - f_{ti}^n(\theta^*_n))(\partial^2 f_{ti}^n(\theta^*_n) / \partial \theta_k \, \partial \theta_j) = V_n^3 + V_n^4 \quad \text{où}$$

$$V_n^3 = 1/n \sum_{i\in In(\theta^* n)} (f_{ti}(\theta^*) - f_{ti}(\theta^*_n)) / \; (\partial^2 f_{ti}(\theta^*_n) / \partial \theta_k \, \partial \theta_j)$$

$$V_n^4 = 1/n \sum_{i\in Jn(\theta^* n)} (f_{ti}(\theta^*) - f_{ti}^n(\theta^*_n))(\partial^2 f_{ti}^n(\theta^*_n) / \partial \theta_k \, \partial\theta_j),$$

D'aprés la remarque 1 on a pour tout i

$$| f_{ti}(\theta^*) - f_{ti}(\theta^*_n) | \leq T \, || \theta^* - \theta^*_n ||.$$

En conséquence

$$| V_n^3 | \leq 1/n \, TK \, || \theta^* - \theta^*_n || \; \mathrm{card}\; (I_n(\theta^*_n)) \leq TK \, || \theta^* - \theta^*_n ||,$$

et P p. s. $\lim_n V_n^3 = 0$.

Pour V_n^4 on ne considère que le cas $k = j = 1$ en vertu de la remarque 3 sur le comportement des dérivées secondes de f_t^n (.).

$| V_n^4 | \leq 1/n \; k/r(n) \sum_{i \in Jn(\theta^\bullet n)} \{ | f_{ti}(\theta^\bullet) - f_{ti}^n(\theta^\bullet)| + | f_{ti}^n(\theta^\bullet) - f_{ti}^n(\theta^\bullet{}_n) | \}$

D'aprés la remarque 3, pour tout i, $| f_{ti}^n(\theta^\bullet) - f_{ti}^n(\theta^\bullet{}_n) | \leq T \| \theta^\bullet - \theta^\bullet{}_n \|$;

2.1) permet d'obtenir

$| V_n^4 \leq K/nr(n) \; (Hr(n) + T \| \theta^\bullet - \theta^\bullet{}_n \|) \; \text{card} \; (J_n(\theta^\bullet{}_n))$.

2.13) entraîne que P p. s. $\lim_n V_n^4 = 0$. D'où le lemme.

Lemme 8 :

P p. s. $\lim_n \; 1/n \sum_{i=1,n} (\partial^2 f_{ti}^n(\theta^\bullet{}_n) / \partial \theta_k \partial \theta_j) \, e_{ti} = 0$.

Démonstration : On a

$1/n \sum_{i=1,n} (\partial^2 f_{ti}^n(\theta^\bullet{}_n) / \partial \theta_k \partial \theta_j) \, e_{ti} = V_n^5 + V_n^6 + V_n^7 + V_n^8$, où

$V_n^5 = 1/n \sum_{i \in In} \left[(\partial^2 f_{ti}(\theta^\bullet{}_n) / \partial \theta_k \partial \theta_j) - (\partial^2 f_{ti}(\theta^\bullet) / \partial \theta_k \partial \theta_j) \right] e_{ti}$

$+ 1/n \sum_{i \in Jn} \left[(\partial^2 f_{ti}(\theta^\bullet{}_n) / \partial \theta_k \partial \theta_j) - (\partial^2 f_{ti}(\theta^\bullet) / \partial \theta_k \partial \theta_j) \right] e_{ti}$

$V_n^6 = 1/n \sum_{i=1,n} (\partial^2 f_{ti}(\theta^\bullet) / \partial \theta_k \partial \theta_j) \, e_{ti}$

$V_n^7 = - 1/n \sum_{i \in Jn(\theta^\bullet n)} (\partial^2 f_{ti}(\theta^\bullet{}_n) / \partial \theta_k \partial \theta_j) \, e_{ti}$

$V_n^8 = 1/n \sum_{i \in Jn(\theta^\bullet n)} \partial^2 f_{ti}(\theta^\bullet{}_n) / \partial \theta_k \partial \theta_j . \, e_{ti}$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme P p.s. $\lim_n \theta^*_n = \theta^*$ il découle de la remarque 1 que P p.s. il existe un entier N tel que

$$\forall\ n \geq N,\ \ \forall i \in I_n\ \ \left|(\partial^2 f_{ti}(\theta^*_n)/\partial\theta_k\ \partial\theta_j) - (\partial^2 f_{ti}(\theta^*)/\partial\theta_k\ \partial\theta_j)\right| \leq \varepsilon.$$

Les remarques 1 et 3 conduisent alors à la majoration suivante

2.19) P p.s. $\forall n \geq N\ \ |V_n^5| \leq \varepsilon\ 1/n\ \sum_{i=1,n} |e_{ti}| + 2K\ 1/n\ \sum_{i\in Jn} |e_{ti}|$.

La majoration

$$1/n\ \sum_{i\in Jn} |e_{ti}| \leq (\mathrm{Card}\,(J_n)\ 1/n)^{1/2}\ (\ \sum_{i\in Jn} e^2_{ti}/n\ )^{1/2}$$
$$\leq (\ [\ 2kn\ \delta(n)\ ] + 1\ /\ n)^{1/2}\ (\ \sum_{i=1,n} e^2_{ti}/n\ )^{1/2},$$

et la loi forte des grands nombres appliquée à $\{\ |\ e_{ti}\ |\ \}$, $\{\ |\ e_{ti}\ |^2\}$, entraînent grâce à 2.19) P p.s. $\lim_n\ V_n^5 = 0$.

Comme au lemme 2 on a d'autre part P p.s. $\lim_n\ V_n^6 = 0$.
Enfin, d'après la remarque 1 $|V_n^7| \leq K/n\ \sum_{i\in Jn(\theta^*\ n)} |e_{ti}|$.

Un raisonnement identique à celui utilisé pour V_n^5 conduit à P p.s. $\lim_n\ V_n^7 = 0$.
Le lemme est ainsi acquis si on démontre le résultat suivant qui constitue la principale difficulté

__Proposition 6__

$$\text{P p. s. } \lim_n V_n^8 = 0$$

Démonstration : On ne traite ici encore que le seul cas délicat k=j=1, les autres cas pouvant se traiter comme dans les lemmes précédents. On utilise la structure polynomiale de $f^n_t(\theta)$ telle qu'elle est définie au § 2.1. pour $\tau - r\ (n) \leq t \leq \tau + r\ (n)$.

Un développement de $f^n_t(\theta)$ sur cet intervalle conduit, par un calcul élémentaire, à l'expression suivante, où les a_j et b_j sont des constantes numériques.

$V_n{}^8 = \partial^2\, f^1\,(-\, r\,(n),\, \xi^{*}{}_n)\, /\, \partial u^2\; 1/n \sum_{i \in Jn\, (\theta^{*}\, n)} e_{ti}$

$+ \sum_{\, j=1,3} a_j\, a^j{}_{r(n)}\, (\xi_n{}^{*})\; 1/n \sum_{i \in Jn\, (\theta^{*} n)} (t_i - \tau^{*}{}_n)^j\, e_{ti}$

$+ \sum_{j\, =\, 2,3} b_j\, (r\,(n))^{j-1}\, a^j{}_{r\,(n)}\, (\xi^{*}{}_n)\; 1/n \sum_{i \in Jn\, (\theta^{*}\, n)} (t_i - \tau^{*}{}_n)\, e_{ti}$

$+ b_3 r\,(n)\, a^3{}_{r(n)}\, (\xi^{*}{}_n)\; 1/n \sum_{i \in Jn\, (\theta^{*}\, n)} (\, t_i - \tau^{*}{}_n)^2\, e_{ti}$

$+ \sum_{\, j=1,3} a_j\, (r(n))^j\, a^j{}_{r(n)}\, (\xi^{*}{}_n)\; 1/n \sum_{i \in Jn\, (\theta^{*}\, n)} e_{ti}$

Lemme 9

$$P \text{ p. s. } \lim_n 1/n\; r\,(n) \sum_{i \in Jn\, (\theta^{*} n)} e_{ti} = 0$$

Démonstration : On utilise un résultat de [2], théorème B, sur les sommes partielles de variables aléatoires indépendantes et de même loi, dont les hypothèses sont vérifiées par la suite $\{\alpha_n\}$ définie par $\alpha_n = [2\, k\, n\, r\,(n)\,] + 1$, compte tenu des hypothèses faites sur r (n), et par la loi des e_{ti}, d'aprés H_7. Ce résultat peut se mettre sous la forme

$$2.20\,)\quad \lim_n\ \mathrm{Max}_{0 \le i \le n-\alpha n}\ \mathrm{Max}_{0 \le k \le \alpha n}\ \Big| \sum_{j=1,k} e_{ti+j} \Big| \,/\, (2\alpha_n \,\mathrm{Log}\, (n/\alpha_n))^{1/2}$$

$$= \lim_n X_n \,/\, (2\alpha_n \,\mathrm{Log}\, (n/\alpha_n))^{1/2} = \sigma$$

La condition $r(n) = 0\; (n^{-\alpha})$, $0<\alpha<1$, entraîne que

$(2\alpha_n \,\mathrm{Log}\, (n/\alpha_n))^{1/2} \,/\, n\; r\,(n) = 0\; ((\mathrm{Log}\; n)^{1/2}\, n^{\alpha-1/2})$.

Le résultat du lemme se déduit alors immédiatement de 2.13) et 2.20).
Ce lemme et les majorations 2.4) entraînent que P p. s. le premier et le dernier terme de $V_n{}^8$ convergent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Lemme 10 : pour $j = 1,2,3$

P p. s. $\lim_n 1/n\,(r(n))^{1+j} \sum_{i\in Jn(\theta^* n)} (t_i - \tau^*_n)^j\, e_{ti} = 0.$

Démonstration :

si $j = 1$ ou 3 on obtient par la transformation d'Abel

$$\sum_{i\in Jn(\theta^* n)} (t_i - \tau^*_n)^j\, e_{ti} = \sum_{i = m,M-1} \left(\sum_{j=m,i} e_{tj}\right) \left((t_i - \tau^*_n)^j - (t_{i+1} - \tau^*_n)^j\right)$$

$$+ \left(\sum_{j\in Jn(\theta^* n)} e_{tj}\right) (t_M - \tau^*_n)^j,$$

où $m(M)$ désigne le plus petit (grand) élément de $J_n(\theta^*_n)$. On déduit de cette égalité

$$\left| \sum_{i\in Jn(\theta^* n)} (t_i - \tau^*_n)^j\, e_{ti} \right| \leq X_n \left[2\,(t_M - \tau^*_n)^j - (t_m - \tau^*_n)^j\right] \leq 3\, r^j(n)\, X_n.$$

Cette inégalité jointe à 2.20) permet facilement de conclure.
Dans le cas $j=2$, on majore séparément, aprés avoir effectué la transformation d'Abel, les termes pour lesquels $t_i \leq \tau^*_n$, et ceux pour lesquels $t_i \geq \tau^*_n$. On est conduit dans ce cas à une majoration par $4\, r^2(n)\, X_n$ qui permet de conclure de la même façon.
Ce lemme et 2.4) ont pour conséquence immédiate que P p. s. les trois autres termes de V_n^8 convergent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. La proposition 6 est ainsi démontrée.

Les lemmes 6, 7 et 8 admettent pour conséquence la proposition 5.

lemme 11: La matrice $K(\theta^*)$ est définie - positive.

Démonstration : Soit $X = (x_i)_{i=1,\dots,p}$. Un calcul élémentaire montre que

$$^tX\, K(\theta^*)\, X = \int_{[0,1]} \left(\sum_{i=1,p} x_i\, (\partial f_t(\theta^*) / \partial\theta_i) \right)^2 dF(t).$$

F étant absolument continue, le résultat découle immédiatement de H_4

Démonstration de la proposition 4 : D'après le lemme 11 la plus petite valeur propre de $K(\theta^*)$, notèe m, est strictement positive. Soit X élément de $\mathbb{R}^p$ tel que $\|X\| = 1$ et $0 < \varepsilon \leq m/2p$. D'après la proposition 5 P p.s. il existe un entier N tel que si $n \geq N$

$$| {}^tX (K_n(\theta^*_n) - K(\theta^*)) X | \leq \varepsilon \sum_{i,j=1,p} |x_i| \cdot |x_j|.$$

Dans ces conditions ${}^tX K_n(\theta^*_n) X \geq {}^tX\ K(\theta^*) X - \varepsilon \sum_{i,j=1,p} |x_i| \cdot |x_j| \geq m - \varepsilon p\|X\|^2 \geq m/2.$

On en déduit immédiatement la proposition 4 avec $\lambda = m/2$.

II.4. ETUDE DE LA SUITE $\{n^{1/2} (\theta'_n - \theta^*) \}_n$

Proposition 7 : **Au sens de la convergence en loi** $\{n^{1/2} (\theta'_n - \theta^*) \}_n$ **converge vers** $N(0, \sigma^2 K^{-1} (\theta^*))$

Démonstration : D'après le lemme 3 de (8), si Θ est de plus convexe, et si $\theta(y)$ est une application mesurable de $\mathbb{R}^n$ dans Θ, il existe une application mesurable $\theta^{**}(y)$ de $\mathbb{R}^n$ dans Θ telle que, pour tout i élément de $\{1,\dots,p\}$ et tout $y = (y_j)_{j=1,\dots,p}$

$$1/n \sum_{j=1,n} (\partial f_{tj}^n(\theta(y)) / \partial \theta_i) [y_j - f_{tj}^n(\theta(y))] - 1/n \sum_{j=1,n} (\partial f_{tj}^n(\theta^*) / \partial \theta_i) [y_j - f_{tj}^n(\theta^*)]$$

$$= \sum_{k=1,p} \Big[1/n \sum_{j=1,n} (\partial^2 f_{tj}^n(\theta^{**}(y)) / \partial \theta_k \partial \theta_i) [y_j - f_{tj}^n(\theta^{**}(y))]$$

$$- 1/n \sum_{j=1,n} (\partial f_{tj}^n(\theta^{**}) / \partial \theta_i) (\partial f_{tj}^n(\theta^{**}) / \partial \theta_k)\Big] (\theta_k(y) - \theta^*_k).$$

De plus pour chaque y $\theta^{**}(y)$ appartient au segment de droite joignant $\theta(y)$ et θ^*. On applique ce résultat à $y_j = X_{tj}$, $j = 1, \dots , n$, $\theta(y) = \theta'_n$. Ceci est justifié car, comme P p.s. $\lim_n \theta'_n = \theta^*$, on peut limiter les valeurs de θ'_n à un sous-ensemble convexe et compact de Θ. Donc P p.s. il existe θ_n^{**} élément du segment de droite joignant θ'_n et θ^* tel que

2.21) $1/n \sum_{j=1,n} (\partial f_{tj}^n(\theta'_n) / \partial\theta_i) (X_{tj} - f_{tj}^n(\theta'_n)) - 1/n \sum_{j=1,n} (\partial f_{tj}^n(\theta^*) / \partial\theta_i) (X_{tj} - f_{tj}^n(\theta^*))$
$= \sum_{k=1,p} A_{i,k}^n (\theta'_{n,k} - \theta^*_k)$

avec $\theta'_n = (\theta'_{n,k})_{k=1,\dots,p}$, et

$$A_{i,k}^n = 1/n \sum_{j=1,n} (\partial^2 f_{tj}^n(\theta^{**}_n) / \partial\theta_k \partial\theta_i) (X_{tj} - f_{tj}^n(\theta^{**}_n)) - 1/n \sum_{j=1,n} (\partial f_{tj}^n(\theta^{**}_n) / \partial\theta_i) (\partial f_{tj}^n(\theta^{**}_n) / \partial\theta_k)$$

θ^* appartenant à l'intérieur de Θ, P p.s. pour n suffisamment grand

$$\sum_{j=1,n} (\partial f_{tj}^n(\theta'_n) / \partial\theta_i) (X_{tj} - f_{tj}^n(\theta'_n)) = 0.$$

Dans ces conditions 2.21) permet en conséquence d'obtenir

2.22)
$$\begin{aligned} &- n^{1/2} \sum_{k=1,p} A_{i,k}^n (\theta'_{n,k} - \theta^*_k) \\ &= n^{-1/2} \sum_{j=1,n} e_{tj} (\partial f_{tj}(\theta^*) / \partial\theta_i) - n^{-1/2} \sum_{j\in Jn(\theta^*)} e_{tj} (\partial f_{tj}(\theta^*) / \partial\theta_i) \\ &\quad + n^{-1/2} \sum_{j\in Jn(\theta^*)} (\partial f_{tj}^n(\theta^*) / \partial\theta_i) (e_{tj} + f_{tj} (\theta^*) - f_{tj}^n(\theta^*)) \end{aligned}$$

Les méthodes de majoration utilisées au § 2.3 entraînent facilement, d'aprés 2.13) et le fait que $J_n (\theta^*)$ n'est pas aléatoire, que

2.23)
$$P \lim_n n^{-1/2} \sum_{j\in Jn(\theta^*)} \{ -e_{tj} (\partial f_{tj}(\theta^*) / \partial\theta_i) + (\partial f_{tj}^n(\theta^*) / \partial\theta_i) (e_{tj} + f_{tj} (\theta^*) - f_{tj}^n(\theta^*)) \} = 0.$$

De même, puisque P p.s. $\lim_n \theta^{**}_n = \theta^*$, on obtient par une démonstration identique à celle de la proposition 5

2.24)
$$P \text{ p.s. } \lim_n A_{i,k}^n = - K_{i,k} (\theta^*).$$

Le fait que les fonctions $\partial f.(\theta^*) / \partial\theta_i$ soient bornées permet de montrer assez facilement que les conditions de type Lindeberg sont vérifiées par les vecteurs $\{((e_{tj}\, \partial f_{tj}(\theta^*) / \partial\theta_i))_{i=1,\dots,p}\}_j$. En conséquence on peut déduire du théorème de la limite centrale que la suite $\{((n^{-1/2} \sum_{j=1,n} e_{tj}\, \partial f_{tj}(\theta^*) / \partial\theta_i))_i\}_n$ converge, pour la convergence en loi, vers $N(0, \sigma^2 K(\theta^*))$, puisque pour tout i et tout k, ainsi qu'on l'a déjà vu $\lim_n 1/n \sum_{j=1,n} (\partial f_{tj}(\theta^*) / \partial\theta_i)(\partial f_{tj}(\theta^*) / \partial\theta_k) = K_{ik}(\theta^*)$. Ce résultat découle aussi du corollaire 1 de (8).

Si $A_n = ((A_{i,k}{}^n))_{i,k}$, on d'après 2.22),

$$- n^{1/2} A_n ((\theta'_n - \theta^*)) = ((n^{-1/2} \sum_{j=1,n} e_{tj}\, \partial f_{tj}(\theta^*) / \partial\theta_i))_i + S_n$$

où à cause de 2.23), $P \lim_n S_n = 0$. Donc, pour la convergence en loi, la suite $\{- n^{1/2} A_n ((\theta'_n - \theta^*))\}_n$ converge vers $N(0, \sigma^2 K(\theta^*))$. 2.24) permet alors de conclure.

II.5. CONCLUSIONS

Les propositions 3 et 7 ont pour conséquence immédiate la formule 1.4) du théorème 2. Quant à 1.5) ce résultat est obtenu, comme au lemme 6, en utilisant la convergence de $\{\theta_n\}_n$ vers θ^* ; la démonstration est d'ailleurs simplifiée puisque l'on utilise les fonctions f_{ti} au lieu des fonctions $f_{ti}{}^n$.

III. APPLICATION, GENERALISATIONS

III.1.CAS DE REGRESSION LINEAIRE PAR MORCEAUX

Ce modèle classique est défini par

$$f^1(u,\xi) = \alpha + \beta_1 u, \quad f^2(u,\xi) = \alpha + \beta_2 u, \quad \xi = (\alpha, \beta_1, \beta_2)$$

$\Xi = \{ (\alpha, \beta_1, \beta_2) \mid \mathrm{Max}(|\alpha|, |\beta_1|, |\beta_2| \le \delta, |\beta_1 - \beta_2| \ge \varepsilon\}$, ε, δ constantes > 0.

Comme on l'a déjà signalé, les hypothèses H_1 - H_4 sont satisfaites.
Si H_5 H_6 et H_7 sont vérifiées les théorèmes 1 et 2 sont donc valables pour ce modèle.
Dans ce cas un calcul, dont la longueur est la seule difficulté, permet de calculer det $(K(\theta))$. Dans le cas où F est la distribution uniforme sur [0,1] on obtient
$\det(K(\theta)) = 1/144\, (\beta_1 - \beta_2)^2\, (\tau(1-\tau))^4$.
D'où, si $\Lambda(\theta) = \sigma^2\, K^{-1}(\theta)$, on a $\det(\Lambda(\theta^*) = 144\, \sigma^2\, ((\beta_1{}^* - \beta_2{}^*)^{-2}\, (\tau^*(1-\tau^*))^{-4}$.
Ce déterminant est d'autant petit que σ est petit, $|\, \beta_1{}^* - \beta_2{}^* \,|$ grand et τ voisin de 1/2. On peut ainsi préciser, compte tenu du théorème 2, sous quelles conditions l'approximation de θ^* par θ_n est la plus efficace.

III.2 CAS DE q RUPTURES $q \geq 2$

La méthode utilisée se généralise naturellement au cas de q, $q \geq 2$, ruptures. L'essentiel est de disposer d'un modèle introduisant convenablement les paramètres. On modifie légèrement pour cela le modèle utilisé dans le cas $q = 1$.
Soient $\{\tau_i\}_{i=0,\dots,q+1}$, q+2 réels tels que $\tau_0 = 0 < \tau_1 < \dots < \tau_i < \tau_{i+1} < \dots\ \tau_{q+1} = 1$ et $\{v_i\}_{i=0,\dots,q+1}$, q+2 réels, v_i représentant la valeur de $f_{\tau i}(\theta)$.
On se donne q + 1 applications $f^i(u, v_i, v_{i+1}, w^i)$, $i = 0,\dots,q$, de $[0,1] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^p$, la variable w^i pouvant éventuellement ne pas figurer, ce qu'on traduit par $p = 0$. On suppose que, pour tout i, $f^i(0, v_i, v_{i+1}, w^i) = v_i$ et $f^i(1, v_i, v_{i+1}, w^i) = v_{i+1}$.
On pose $w^i = {}^t(w_1{}^i, \dots, w_p{}^i)$ et $\theta = {}^t(\tau_1,\dots,\tau_q, v_0, \dots, v_{q+1}, {}^tw^0, \dots, {}^tw^q)$.

On définit $f_t(\theta)$ par la formule

$$f_t(\theta) = \sum_{i=0,q-1} f^i\,(t - \tau_i / \tau_{i+1} - \tau_i)\,, v_i, v_{i+1}\,, w^i)\ \mathbb{1}_{[\tau i,\, \tau i+1[}(t)$$
$$+ f^q\,(t - \tau_q / \tau_{q+1} - \tau_q)\,, v_q, v_{q+1}\,, w^q)\ \mathbb{1}_{[\tau q,\, \tau q+1]}(t).$$

Ce formalisme semble particulièrement adpaté aux cas usuels. Ainsi sans le cas de fonctions affines et paraboliques on a, respectivement,

$$f^i\,(u, v_i, v_{i+1}) = v_{i+1}\, u + v_i(1 - u)$$

$$f^i\,(u, v_i, v_{i+1}, w_1{}^i) = v_{i+1}\,u + v_i(1-u) + w_1{}^i u\,(1-u).$$

On impose que θ appartient à un compact Θ, et que la vraie valeur θ^* de θ est à l'intérieur de Θ.

Si on pose $\xi^i = {}^t(v_i, v_{i+1}, {}^t w^i)$ les hypothèses H_1 et H_2 doivent être satisfaites pour chaque fonction $f^i(u,\xi)$. Les hypothèses H_3 H_7 sont maintenues sans changement. Sous ces conditions on obtient les théorèmes 1 et 2. Pour l'obtention du théorème 2 on utilise la proposition 1 au voisinage de chaque τ_i, $i = 1, \ldots, q$, de façon à fabriquer une suite de fonctions $\{f_t{}^n(\theta)\}_n$ possédant les propriétés de régularité requises et coïncidant avec $f_t(\theta)$ sur un borélien de $[0,1]$ de mesure de Lebesgue suffisamment voisine de 1. Les méthodes de démonstration sont les mêmes, le fait qu'il y a plus d'un point de rupture n'introduisant de complications qu'au niveau de l'exposé et non au niveau des méthodes.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] BROWN, R.L. ; DURBIN, J. ; EVANS, J.M. : Techniques for testing the constancy of regression relationships over time, J.Roy. Statist. Soc. , 1975, Ser. B 37, p. 149-195.

[2] CSORGO, M ; STEINEBACH, J : Improved Erdös-Rényi and strong approximation laws for increments of partial sums, The annals of Probability, 1981, Vol 9, n° 6, p 988-996.

[3] DESHAYES, J. ; PICARD, D. : Principe d'invariance sur le processus de vraisemblance Ann. Inst. Henri Poincaré, 1984, Vol. 20, n° 1, p. 1-20.

[4] DESHAYES, J. ; PICARD, D. : Lois asymptotiques des tests et estimateurs de rupture dans un modèle statistique classique, Ann. Inst. Henri Poincaré, 1984, Vol. 20, n° 4, p. 309-327.

[5] FEDER, P.I. : On asymptotic distribution in segmented regression problems-identified case, The Annals of Statistics, 1975, Vol. 3, n° 1 p. 49-83.

[6] HINKLEY, D.V. : Inference about the intersection in two-phases regression, Biometrika, 1969, 56, 3, p. 495-504.

[7] HINKLEY, D.V. : Inference about the change-point in a sequence of random variables, Biometrika, 1970, 57, 1, p. 1-17.

[8] JENRICH, R.I. : Asymptotic properties of non linear least squares estimators, The Annals of Math. Stat., 1969, Vol. 40, n° 2, p. 633-643.