

BERNARD VAN CUTSEM

**Ultramétrie, distances, ϕ -distances maximum dominées
par une dissimilarité donnée**

Statistique et analyse des données, tome 8, n° 2 (1983), p. 42-63.

http://www.numdam.org/item?id=SAD_1983__8_2_42_0

© Association pour la statistique et ses utilisations, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Statistique et analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ULTRAMETRIQUE, DISTANCES,
 ϕ -DISTANCES MAXIMUM DOMINEES
PAR UNE DISSIMILARITE DONNEE.

Bernard VAN CUTSEM.

Laboratoire I.M.A.G.

C.N.R.S. - Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

B.P. 68 38041 GRENOBLE Cedex

Résumé : M. GONDRAN a introduit une algèbre matricielle particulière qui permet, en calculant un nombre fini des puissances successives de la matrice associée à une dissimilarité propre s donnée sur un ensemble fini E , de trouver simplement la matrice qui définit la plus grande ultramétrique sur E inférieure à s .

On prolonge ici ce résultat, en montrant qu'en choisissant convenablement l'algèbre matricielle de départ, on peut définir de la même façon la plus grande distance sur E , la plus grande ϕ -distance, et plus particulièrement, la plus grande distance de type p sur E inférieure à s . On montre que les distances de type p sont des interpolations entre distances usuelles et ultramétriques.

On termine en donnant une étude rapide des contraintes de forme imposées à un triangle dont les longueurs des côtés vérifient des inégalités du type: $a^p \leq b^p + c^p$.

Abstract: M. Gondran introduced a particular matrix algebra which allows, by calculating a finite number of successive powers of the matrix associated to a proper dissimilarity s on a finite set E , to easily find the matrix which defines the greatest ultrametric on E inferior to s .

Here we generalize this results. We prove that a convenient choice of the matrix algebra, allows to define, by the same way, the greatest distance, the greatest ϕ -distance, and, for every $p \in [1, +\infty]$, the greatest p -type distance on E , which are less than s . We also remark that p -type distances realise interpolation between usual distances and ultrametrics.

We give a study on the shape-constraints imposed to a triangle the lengths of sides of which satisfied p -type inequalities: $a^p \leq b^p + c^p$.

Mots clés : Classification hiérarchique, ultramétrique sous dominante, distances sous dominantes.

I. INTRODUCTION.

Soit E un ensemble fini, que nous supposons égal à l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. Soit s une dissimilarité⁺ sur E définie par une application de $E \times E$ dans R_+ vérifiant une relation de symétrie

$$1) \forall (i, j) \in E^2, s(i, j) = s(j, i)$$

On dit que la dissimilarité s est propre [2] si de plus s vérifie la relation

$$2) s(i, j) = 0 \iff i = j$$

On sait qu'une classification hiérarchique indicée des éléments de E est équivalente à la donnée d'une ultramétrique sur E , c'est-à-dire d'une dissimilarité propre u sur E vérifiant en outre la relation

$$3) \forall (i, j, k) \in E^3, u(i, j) \leq \max \{ u(i, k), u(k, j) \}$$

Il est alors immédiat de vérifier qu'une ultramétrique sur E est une distance sur E , vérifiant l'inégalité triangulaire:

$$4) \forall (i, j, k) \in E^3, u(i, j) \leq u(i, k) + u(k, j).$$

⁺ Utilisant dans cet article à la fois des distances et des dissimilarités nous avons choisi, malgré les usages, de noter s les dissimilarités et de réserver la notation d pour les distances.

Nous dirons que la dissimilarité propre s_1 sur E domine la dissimilarité propre s_2 sur E si

$$\forall (i,j) \in E^2, s_2(i,j) \leq s_1(i,j)$$

On vérifie facilement que, pour cette relation d'ordre, l'ensemble des dissimilarités sur E est un treillis. Si s_1 et s_2 sont deux dissimilarités propres sur E , $s_1 \vee s_2$ et $s_1 \wedge s_2$, définies par

$$(s_1 \vee s_2)(i,j) = \max \{ s_1(i,j), s_2(i,j) \}$$

$$(s_1 \wedge s_2)(i,j) = \min \{ s_1(i,j), s_2(i,j) \}$$

sont encore des dissimilarités propres sur E , qui sont respectivement le plus petit majorant et le plus grand minorant de s_1 et s_2 .

En revanche, on sait que si d_1 et d_2 sont deux distances sur E , en général, seule $d_1 \vee d_2$ est une distance. On montre, en outre, que l'ensemble des distances (respectivement des ultramétriques) sur E inférieures à une dissimilarité s donnée possède un plus grand élément.

A toute dissimilarité s sur E , ordonné par son codage, nous associons la matrice symétrique Σ à n lignes et n colonnes définie par $\Sigma_{ij} = s(i,j)$. Nous désignons, de façon générale, par $\mathcal{M}(p,q)$ l'ensemble des matrices réelles à p lignes et q colonnes et par $\mathcal{M}_+(p,q)$ le sous ensemble de $\mathcal{M}(p,q)$ des matrices à termes positifs.

Par ailleurs, pour $A \in \mathcal{M}(p,q)$ et $B \in \mathcal{M}(p,q)$, on notera $A \wedge B$ la matrice définie par

$$(A \wedge B)_{ij} = \min \{ A_{ij}, B_{ij} \}$$

Enfin la matrice tA désignera la transposée de la matrice A .

M. GONDRAN a montré dans [3] comment la plus grande ultramétrique u sur E , inférieure à une dissimilarité s donnée peut être déterminée en calculant les puissances successives de la matrice $\Sigma = [s(i,j)]$ appartenant à $\mathcal{M}(n,n)$ associée à s pour l'opération matricielle

notée Σ^* , suivante

$$(\Sigma^* \Sigma)_{ij} = \min \{ \max \{ \Sigma_{ih}, \Sigma_{hj} \} ; h \in E \}$$

Plus précisément, M. GONDRAN démontre que

1) s est une ultramétrie si et seulement si

$$\Sigma^* \Sigma = \Sigma$$

2) il existe $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ tel que, pour tout entier h positif, on ait

$$\Sigma > \Sigma^{*2} > \dots > \Sigma^{*k} = \Sigma^{*(k+1)} = \dots = \Sigma^{*(k+h)}$$

3) la matrice Σ^{*k} est la matrice associée à la plus grande ultramétrie sur E inférieure à s .

Sans prétendre fournir un algorithme très efficace pour le calcul de cette plus grande ultramétrie, les résultats de M. GONDRAN en sont néanmoins une très simple caractérisation algébrique qui permet d'ailleurs une comparaison plus poussée avec les méthodes spectrales de l'analyse factorielle.

Nous allons, de façon toute analogue, définir des opérations matricielles adaptées à l'étude de diverses familles de dissimilarités sur E , et montrer comment on peut, pour chaque famille, définir le plus grand élément de la famille inférieur à une dissimilarité donnée.

Nous introduirons ainsi en particulier ce que nous avons appelé les distances de type p , qui sont les distances sur E dont la puissance p -ième est encore une distance. Les distances usuelles sont ainsi les distances de type 1 et on verra que les distances de type ∞ sont les ultramétriques. Les distances de type p réalisent ainsi une interpolation entre distances usuelles et ultramétriques.

A chaque famille de dissimilarités, nous associerons une algèbre matricielle, et nous montrerons que cette algèbre permet, tout comme dans le cas des ultramétriques, de caractériser ces familles et de calculer le plus grand élément inférieur à une dissimilarité donnée.

Nous terminerons par une étude succincte de la morphologie des triangles dont les longueurs des côtés vérifient des contraintes du type: $a^p \leq b^p + c^p$.

Les idées de M. GONDRAN se retrouvent dans diverses publications consacrées aux ensembles flous. On pourra, par exemple, consulter R.T. YEH et S.Y. BANG [6] et B.A. CARRE [1].

La matière de cet article a fait l'objet d'une publication interne au Laboratoire IMAG [4] et d'une communication au Congrès Européen des Sociétés de Classification [5].

Francis CAILLIEZ m'a signalé que, il y a quelques années, il a développé, dans un cours de DEA non publié, des idées tout à fait voisines de celles que je présente ici. Ce texte lui doit quelques améliorations par rapport à sa version initiale [4].

Je tiens à remercier J. FONLUPT et B. MONJARDET pour les références bibliographiques qu'ils m'ont fournies et les échanges d'idées que nous avons eus. Je dois aussi tout particulièrement remercier B. FICHET pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée en faisant une lecture attentive du manuscrit. Cette rédaction finale lui doit beaucoup.

II. QUELQUES FAMILLES DE DISTANCES SUR E.

Nous allons maintenant définir les familles de dissimilarités auxquelles nous allons étendre les méthodes de M. GONDRAN. Chaque famille est définie par une fonction ϕ particulière. Nous allons donc commencer par définir ces fonctions ϕ , puis nous introduirons les ϕ -dissimilarités sur E, les ϕ -algèbres de matrices qui leur sont associées et nous étudierons la caractérisation qu'elles permettent de ces ϕ -dissimilarités à l'aide de leurs éléments idempotents.

II.1 - Les fonctions ϕ .

Définition II.1. Soit ϕ l'ensemble des applications continues de R_+^2 dans R_+ possédant les propriétés suivantes:

- φ1 $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2, \phi(a,b) = \phi(b,a)$
- φ2 $\forall a \in \mathbb{R}_+, \phi(0,a) = \phi(a,0) = a$
- φ3 $\forall a \in \mathbb{R}_+, \phi(a, \cdot)$ est strictement croissante
- φ4 $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}_+^3, \phi(a, \phi(b,c)) = \phi(\phi(a,b), c)$

L'ensemble ϕ contient, en particulier, le sous ensemble ϕ_L des applications ϕ_p définies par

$$\forall p \in [1, +\infty[, \quad \phi_p(a,b) = (a^p + b^p)^{1/p}$$

$$\phi_\infty(a,b) = \max \{ a,b \}$$

mais l'inclusion $\phi_L \subset \phi$ est stricte, comme le montre l'exemple suivant:

$$\phi(a,b) = \text{Log} (e^a + e^b - 1)$$

Plus généralement, si f et g sont deux applications de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ , continues strictement croissantes et inverses l'une de l'autre, (et donc telles que $g(0)$ est fini), l'application ϕ définie par

$$\phi(a,b) = f(g(a) + g(b) - g(0))$$

appartient à ϕ .

Rappelons les relations classiques entre élément de ϕ_L :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2, \phi_1(a,b) \geq \phi_2(a,b) \geq \dots \geq \phi_\infty(a,b)$$

et

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2, \phi_\infty(a,b) = \lim_p \phi_p(a,b)$$

Définition II.2. Soit $\phi \in \phi$. Soit k un entier supérieur à 1. On appelle k-ième itéré de ϕ , et on note $\phi^{(k)}$, l'application de \mathbb{R}_+^{k+1} dans \mathbb{R}_+ définie par les relations:

$$\phi^{(1)}(a_1, a_2) = \phi(a_1, a_2)$$

$$\phi^{(k)}(a_1, a_2, \dots, a_{k+1}) = \phi(a_1, \phi^{(k-1)}(a_2, a_3, \dots, a_{k+1}))$$

Remarque II.3. En posant

$$\phi_{a_1}(\cdot) = \phi(a_1, \cdot)$$

on peut encore écrire:

$$\phi^{(k)}(a_1, a_2, \dots, a_{k+1}) = \phi_{a_1} \circ \phi_{a_2} \circ \dots \circ \phi_{a_{k+1}}(0)$$

où \circ désigne la composition usuelle des applications.

Montrons maintenant les propriétés de $\phi^{(k)}$ qui nous seront utiles.

Lemme II.4. Soit $\phi \in \Phi$ et soit $(a_1, a_2, \dots, a_{k+1}) \in R_+^{k+1}$.

1) Supposons qu'il existe $i \in E$ tel que $a_i = 0$. Alors

$$\phi^{(k)}(a_1, a_2, \dots, a_{k+1}) = \phi^{(k-1)}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{k+1})$$

2)

$$\phi^{(k)}(a_1, a_2, \dots, a_{k+1}) \geq \phi^{(k-1)}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{k+1})$$

3) ϕ est invariante par permutation des variables a_i

Démonstration: 1) Puisque $a_i = 0$, on a, pour tout $b \in R_+$:

$$\phi(a_i, b) = \phi(b, 0) = b$$

c'est-à-dire $\phi_{a_i}(b) = b$, et la propriété 1) résulte de la remarque II.3.

2) Puisque, pour tout $b \in R_+$, l'application $\phi(\cdot, b)$ est croissante, on a

$$\phi(0, b) \leq \phi(a_i, b)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \phi^{(k)}(a_1, \dots, a_{k+1}) &= \phi_{a_1} \circ \dots \circ \phi_{a_{i-1}} (\phi(a_i, \phi^{(k-i)}(a_{i+1}, \dots, a_{k+1}))) \\ &\geq \phi_{a_1} \circ \dots \circ \phi_{a_{i-1}} (\phi(0, \phi^{(k-i)}(a_{i+1}, \dots, a_{k+1}))) \\ &= \phi^{(k-1)}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{k+1}) \end{aligned}$$

3) L'invariance de $\phi^{(k)}$ par permutation des variables résulte immédiatement des définitions II.1 et II.2.

II.2 - Les ϕ -dissimilarités.

Définition II.5. Soit $\phi \in \Phi$. Soit s une dissimilarité propre sur $E = \{1, 2, \dots, n\}, n \geq 2$. On dit que s est une ϕ -dissimilarité sur E , si

$$\forall (i, j, k) \in E^3, s(i, j) \leq \phi(s(i, k), s(k, j))$$

Remarque II.6. 1) Les distances usuelles sont les ϕ_1 -dissimilarités.

2) Les ultramétriques sont les ϕ_∞ -dissimilarités.

3) Soit $p \in [1, +\infty[$. Les ϕ_p -dissimilarités sont des distances dont la puissance p -ième est encore une distance. On peut donc définir:

Définition II.7. Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit s une dissimilarité propre sur $E = \{1, 2, \dots, n\}, n \geq 2$. On dit que s est une ϕ_p -distance, ou une distance de type p , si

$$\forall (i, j) \in E^2, s(i, j) \leq \phi_p(s(i, k), s(k, j))$$

Les relations entre les fonctions ϕ_p que nous avons rappelées plus haut, montrent que les distances de type p sont des interpolations entre les distances usuelles sur E et les ultramétriques.

II.3 - Les ϕ -algèbres de matrices.

Définition II.8. Soit $\phi \in \Phi$. Soient $A \in \mathcal{M}_+(p, n)$ et $B \in \mathcal{M}_+(n, q)$ deux matrices réelles à termes positifs. Soit $\phi(A, B)$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_+(p, q)$ définie par la relation:

$$\phi(A, B)_{ij} = \min \{ \phi(A_{ih}, B_{hj}) ; h \in E \}$$

On notera plus simplement $A * B$ au lieu de $\phi(A, B)$, et on précisera éventuellement $A *_{\phi} B$ si une confusion est possible sur l'application ϕ .

Le théorème suivant étudie les propriétés de l'opération que nous venons de définir sur les matrices.

Théorème II.9. Soit $\phi \in \Phi$. Alors l'opération matricielle $*$ qu'elle définit possède les propriétés suivantes:

(On suppose que, dans les relations écrites, les matrices ont des nombres de lignes et de colonnes cohérents avec les opérations où elles interviennent, et que les matrices sont à termes positifs).

$$1) A * (B * C) = (A * B) * C$$

$$2) A * (B \wedge C) = (A * B) \wedge (A * C)$$

3) Si les matrices A et B sont découpées en blocs de dimensions cohérentes, alors l'opération $*$ peut se faire par blocs et on a, par exemple:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_{11} * B_{11}) \wedge (A_{12} * B_{21}) & (A_{11} * B_{12}) \wedge (A_{12} * B_{22}) \\ (A_{21} * B_{11}) \wedge (A_{22} * B_{21}) & (A_{21} * B_{12}) \wedge (A_{22} * B_{22}) \end{bmatrix}$$

$$4) B \leq C \implies A * B \leq A * C$$

$$5) {}^t(A * B) = {}^tB * {}^tA$$

6) Si les matrices A et B sont carrées, de diagonale nulle, alors $A * B$ est carrée, de diagonale nulle, et $A * B \leq A \wedge B$

7) Si la matrice A est carrée symétrique, alors $A * A$ est carrée symétrique et, si, en outre, A est de diagonale nulle, alors $A * A \leq A$

8) Si A et B sont deux matrices carrées symétriques de diagonale nulle et telles que $A \leq B$, alors, pour tout entier h non nul, on a

$$A^{*h} \leq B^{*h}$$

(où A^{*h} désigne la puissance h-ième de A pour l'opération $*$).

Démonstration: Posons $A = [a_{ik}]$, $B = [b_{kh}]$, $C = [c_{hj}]$.

1) Il s'agit de démontrer l'associativité de l'opération $*$. Il résulte, en effet, des propriétés de ϕ que, pour tout i et tout j

$$\begin{aligned} \min_k \phi(a_{ik}, \min_h \phi(b_{kh}, c_{hj})) &= \min_k \min_h \phi(a_{ik}, \phi(b_{kh}, c_{hj})) \\ &= \min_k \min_h \phi(\phi(a_{ik}, b_{kh}), c_{hj}) \\ &= \min_h \phi(\min_k \phi(a_{ik}, b_{kh}), c_{hj}) \end{aligned}$$

et on a bien

$$[A * (B * C)]_{ij} = [(A * B) * C]_{ij}$$

2) C'est maintenant la distributivité de * par rapport à \wedge qu'il faut démontrer. Les propriétés de ϕ entraînent ici, pour tout i et tout j

$$\begin{aligned} \min_k \phi(a_{ik}, \min\{b_{kj}, c_{kj}\}) &= \min_k \min\{\phi(a_{ik}, b_{kj}), \phi(a_{ik}, c_{kj})\} \\ &= \min\{\min_k \phi(a_{ik}, b_{kj}), \min_k \phi(a_{ik}, c_{kj})\} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$[A * (B \wedge C)]_{ij} = [(A * B) \wedge (A * C)]_{ij}$$

3) La possibilité de faire l'opération * par blocs est une conséquence directe des propriétés 1 et 2 que nous venons de démontrer, et de l'associativité de \wedge .

4) Puisque $\phi(a, \cdot)$ est croissante, on a, pour tout i , tout j et tout k

$$\phi(a_{ik}, b_{kj}) \leq \phi(a_{ik}, c_{kj})$$

c'est-à-dire

$$[A * B]_{ij} \leq [A * C]_{ij}$$

5) On a immédiatement

$$\begin{aligned} [{}^t(A*B)]_{ij} &= (A*B)_{ji} = \min_k \phi(a_{jk}, b_{ki}) = \min_k \phi({}^t a_{kj}, {}^t b_{ik}) = \min_k \phi({}^t b_{ik}, {}^t a_{kj}) \\ &= [{}^t B * {}^t A]_{ij} \end{aligned}$$

où on a noté ${}^t a_{kj}$ le terme de la k-ième ligne et de la j-ième colonne de la matrice ${}^t A$ (et idem pour la matrice ${}^t B$).

6) Il est évident que $A * B$ est carrée. Puisque, pour tout i :

$$[A * B]_{ii} = \min_k \phi(a_{ik}, b_{ki})$$

et que

$$\phi(a_{ii}, b_{ii}) = \phi(0, 0) = 0$$

on a

$$[A * B]_{ii} = 0$$

et $A * B$ est bien de diagonale nulle. Enfin puisque

$$[A * B]_{ij} = \min_k \phi(a_{ik}, b_{kj})$$

et que

$$\phi(a_{ij}, b_{jj}) = \phi(a_{ij}, 0) = 0$$

$$\phi(a_{ii}, b_{ij}) = \phi(0, b_{ij}) = 0$$

on a

$$[A * B]_{ij} \leq [A \wedge B]_{ij}$$

7) Si A est symétrique, on obtient d'après la propriété 5:

$${}^t(A * A) = {}^t A * {}^t A = A * A$$

et d'après la propriété 6, $A * A$ est de diagonale nulle et vérifie la relation $A * A \leq A$.

8) Si A et B sont deux matrices carrées symétriques de diagonales nulles et telles que $A \leq B$, alors, en appliquant deux fois la propriété 4

$$A * A \leq A * B \leq B * B$$

et donc $A * A \leq B * B$. Terminons le raisonnement par récurrence:

S'il existe un entier h non nul tel que $A^{*h} \leq B^{*h}$, on a, de la

même manière

$$A * A^{*h} \leq B * A^{*h} \leq B * B^{*h}$$

et donc

$$A^{*(h+1)} \leq B^{*(h+1)}$$

Remarque II.10. L'opération $*$ n'est pas commutative, comme le montre l'exemple suivant, pour l'opération $*_{\phi}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} *_{\phi} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} *_{\psi} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Théorème II.11. Soient ϕ et ψ deux fonctions appartenant à Φ et vérifiant la relation

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2, \phi(a,b) \leq \psi(a,b)$$

alors, quelles que soient les matrices A et B appartenant à $\mathcal{M}_+^n(p,q)$, on a

$$A *_{\phi} B \leq A *_{\psi} B$$

La démonstration est immédiate.

II.4 - Caractérisation des ϕ -dissimilarités.

On a immédiatement le théorème

Théorème II.11. Soit s une dissimilarité propre sur $E = \{1,2,\dots,n\}$ $n \geq 2$, et soit Σ la matrice associée à s . Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes

- 1) s est une ϕ -dissimilarité sur E
- 2) $\Sigma * \Sigma = \Sigma$

Démonstration: Puisque s est une ϕ -dissimilarité

$$\forall (i,j,k) \in E^3, s(i,j) \leq \phi(s(i,k), s(k,j))$$

et cette propriété est équivalente à

$$\forall (i,j) \in E^2, s(i,j) \leq \min_k \phi(s(i,k), s(k,j))$$

et à

$$\Sigma \leq \Sigma *_{\phi} \Sigma$$

Comme, par ailleurs, Σ étant une matrice carrée symétrique de diagonale nulle, on a, d'après le théorème II.9: $\Sigma *_{\phi} \Sigma \leq \Sigma$.

Remarque II.12. Nous venons ainsi de retrouver, pour $\phi = \phi_{\infty}$, la caractérisation matricielle des ultramétriques sur E : la matrice associée à une ultramétrique est idempotente pour $*_{\phi}$. Mais, nous savons de plus, que les distances sur E , et les distances de type p sur E , sont caractérisées par l'idempotence des matrices associées pour les opérations respectives $*_{\phi_1}$ et $*_{\phi_p}$.

III. DISSIMILARITES D'ORDRE k .

On rencontre, en classification automatique, une notion de dissimilarité d'ordre supérieur que l'on peut introduire de la façon suivante.

Soit $G = (E, \Gamma)$ le graphe complet dont l'ensemble des sommets est l'ensemble $E = \{1, 2, \dots, n\}$, et dont l'ensemble Γ des arêtes contient toutes les arêtes (i, j) , que les sommets i et j soient distincts ou pas. Soit s une dissimilarité sur E et considérons s comme une pondération des arêtes de G .

Soit C_k l'ensemble des chemins de G de longueurs k , c'est-à-dire l'ensemble des chemins reliant deux sommets de G constitués de k arêtes adjacentes. Nous noterons $C_k(i, j)$ l'ensemble des chemins de

longueur k d'origine i et d'extrémité j :

$$C_k(i,j) = \{ (i,h_1), (h_1,h_2), \dots, (h_{k-1},j); (h_1, \dots, h_{k-1}) \in E^{k-1} \}$$

On sait qu'on peut construire des algorithmes de classification en valuant les chemins $C_k(i,j)$ de différentes façons. Par exemple, l'algorithme du plus proche voisin utilise la valuation de $C_k(i,j)$ donnée par

$$\min_{C_k(i,j)} \max_{h_1, h_2, \dots, h_{k-1}} \{ s(i, h_1), \dots, s(h_{k-1}, j) \}$$

Les fonctions que nous avons introduites permettent de définir toute une classe de telles valuations.

Définition III.1. Soit s une dissimilarité propre sur $E = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 2$. Soit $\phi \in \Phi$ et soit k un entier supérieur à 2. On appelle dissimilarité d'ordre k sur E associée à s et ϕ , la dissimilarité sur E , notée $s^{(k)}$, définie par

$$\forall (i,j) \in E^2$$

$$s^{(k)}(i,j) = \min \{ \phi^{(k-1)}(s(i, h_1), \dots, s(h_{k-1}, j)); (i, h_1, \dots, h_{k-1}, j) \in C_k(i,j) \}$$

et on pose $s^{(1)} = s$.

On vérifie sans peine que $s^{(k)}$ est une dissimilarité propre sur E . De plus, l'opération matricielle $*_\phi$ permet d'écrire simplement la matrice $\Sigma^{(k)}$ définie par $s^{(k)}$ en fonction de la matrice Σ associée à s , comme le montre le théorème suivant.

Théorème III.2. Soit s une dissimilarité propre sur $E = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 2$. Soit $\phi \in \Phi$ et soit k un entier supérieur à 1. Soit $s^{(k)}$ la dissimilarité d'ordre k sur E associée à s et ϕ . Soit $\Sigma^{(k)}$ et Σ les matrices associées aux dissimilarités $s^{(k)}$ et s . Alors

$$1) \Sigma^{(k)} = \Sigma * \Sigma * \dots * \Sigma = \Sigma^{*k}$$

$$2) \Sigma^{(k)} \leq \Sigma^{(k-1)} \leq \dots \leq \Sigma^2 \leq \Sigma$$

Démonstration: 1) On a, par définition, $s^{(1)} = s$ et

$$s^{(2)}(i,j) = \min_h \{ \phi(s(i,h), s(h,j)) \}$$

et, par conséquent,

$$\Sigma^{(1)} = \Sigma \quad \text{et} \quad \Sigma^{(2)} = \Sigma * \Sigma$$

Vérifions que, pour tout k entier supérieur à 3, on a

$$\Sigma^{(k)} = \Sigma * \Sigma^{(k-1)}$$

En effet,

$$\begin{aligned} [\Sigma * \Sigma^{(k-1)}]_{ij} &= \min_{h_1} \{ \phi(s(i, h_1), \phi^{(k-2)}(s(h_1, h_2), \dots, s(h_{k-1}, j))) \} \\ &= \min_{C_k(i,j)} \{ \phi^{(k-1)}(s(i, h_1), \dots, s(h_{k-1}, j)) \} \\ &= [\Sigma^{(k)}]_{ij} \end{aligned}$$

Un simple raisonnement par récurrence permet de conclure.

2) La démonstration est facile et résulte du théorème II.9.7.

Remarque III.3. Il résulte de l'associativité de l'opération $*$ que l'on a aussi:

$$\Sigma^{(k)} = \Sigma^{(k-1)} * \Sigma$$

IV. CARACTERISATION DES ϕ -DISSIMILARITES MAXIMUM DOMINEES PAR UNE DISSIMILARITE DONNEE.

Nous en venons maintenant à la caractérisation des ϕ -dissimilarités maximum dominées par une dissimilarité donnée. Ce problème sera résolu en étudiant le comportement asymptotique de la suite $\{\Sigma^{(k)}\}$ des itérées de la matrice Σ pour l'opération $*$. Nous avons vu, au paragraphe III, que ce ci revient à étudier le comportement asymptotique de la suite $\{s^{(k)}\}$ des dissimilarités d'ordre k associées à s et à ϕ .

Nous allons montrer que les limites de ces suites sont atteintes pour un k fini, et qu'elles définissent la plus grande ϕ -dissimilarité sur E inférieure à s . On retrouve ainsi dans le cas où $\phi = \phi_\infty$, les résultats de M.GONDRAN pour les ultramétriques que nous avons rappelés dans l'introduction.

Théorème IV.1. Soit s une dissimilarité propre sur $E = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 2$, et soit Σ la matrice qui lui est associée. Soit $\phi \in \Phi$. Alors

$$\Sigma^{(n)} = \Sigma^{(n-1)}$$

Démonstration: Il faut montrer que, pour tout couple (i, j) d'éléments de E , on a

$$s^{(n)}(i, j) = s^{(n-1)}(i, j).$$

La propriété est vraie pour $i = j$, il reste à la démontrer pour $i \neq j$.

Posons

$$A = \{ \phi^{(n-1)}(s(i, h_1), \dots, s(h_{n-1}, j)); (i, h_1, \dots, h_{n-1}, j) \in C_n(i, j) \}$$

$$B = \{ \phi^{(n-2)}(s(i, k_1), \dots, s(k_{n-2}, j)); (i, k_1, \dots, k_{n-2}, j) \in C_{n-1}(i, j) \}$$

Il est facile de voir, en prenant

$$h_1 = k_1, \dots, h_{n-2} = k_{n-2}, h_{n-1} = j$$

que $B \subset A$, ce qui entraîne $\min B \geq \min A$ (ce que l'on savait déjà puisque $\Sigma^{(n-1)} \geq \Sigma^{(n)}$). Montrons que l'inégalité stricte est impossible.

Soit $u \in A$ donné par

$$u = \phi^{(n-1)}(s(i, h_1), \dots, s(h_{n-1}, j))$$

Puisque $\text{Card } E = n$, il existe nécessairement deux éléments égaux parmi les $(n+1)$ éléments $i, h_1, \dots, h_{n-1}, j$; soient h_{i_0} et h_{j_0} , avec $i_0 < j_0$, ces deux éléments. Posons

$$k_1 = h_1, k_2 = h_2, \dots, k_{i_0} = h_{i_0},$$

$$k_{i_0+1} = k_{i_0+2} = \dots = k_{j_0-1} = h_{i_0}$$

$$k_{j_0} = h_{j_0+1}, \dots, k_{n-2} = h_{n-1}$$

et

$$v = \phi^{(n-2)}(s(i, k_1), \dots, s(k_{n-2}, j))$$

On a $v \in B$. Le lemme II.4 entraîne alors que $v \leq u$. Ce qui montre, pour tout $u \in A$, qu'il existe $v \in B$ avec $v \leq u$, et, par conséquent, si on suppose $\min A < \min B$, il existe $u \in A$ tel que $u < \min B$, et on arrive à une contradiction avec l'existence de $v \in B$ tel que $v \leq u$. On a donc bien $\min A = \min B$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire IV.2. Soit s une dissimilarité propre sur $E = \{1, 2, \dots, n\}$, et $n \geq 2$. Soit ε la matrice associée à s . Soit $\phi \in \Phi$. Alors il existe $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ tel que, pour tout entier h , on ait

$$\varepsilon > \varepsilon^{*2} > \dots > \varepsilon^{*(k-1)} > \varepsilon^{*k} = \varepsilon^{*(k+1)} = \dots = \varepsilon^{*(k+h)}$$

Démonstration: Compte tenu du fait que $\varepsilon^{(k)} = \varepsilon^{*k}$, il suffit de remarquer que, s'il existe k tel que $\varepsilon^{*k} = \varepsilon^{*(k+1)}$, alors pour tout entier h , $\varepsilon^{*(k+h)} = \varepsilon^{*k}$. Il en résulte donc que $k \leq n-1$.

On peut alors poser la définition suivante.

Définition IV.3. Soit s une dissimilarité propre sur $E = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 2$, et soit ε la matrice associée à s . Soit $\phi \in \Phi$. On appelle ϕ -degré de s , le plus petit entier k non nul tel que $\varepsilon^{*k} = \varepsilon^{*(k+1)}$.

Remarque IV.4. Le ϕ -degré de s est un indice qui peut servir à mesurer la proximité de s avec la dissimilarité $s^{(k)}$.

Théorème IV.5. Soit s une dissimilarité propre sur $E = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 2$, et soit ε la matrice associée à s . Soit $\phi \in \Phi$. Soit k le ϕ -degré de s . Alors la dissimilarité propre $s^{(k)}$ sur E est la plus grande ϕ -dissimilarité sur E inférieure à s .

Démonstration: Puisque k est le ϕ -degré de s , on a

$$\varepsilon^{*(k+1)} = \varepsilon^{*k}$$

et par conséquent

$$\varepsilon^{*k} = \varepsilon^{*k} * \varepsilon^{*k}$$

ce qui prouve que $s^{(k)}$ est une ϕ -dissimilarité.

Par ailleurs, on a évidemment $s^{(k)} \leq s$. Soit alors s_1 une dissimilarité propre sur E dont la matrice associée Σ_1 vérifie

$$\Sigma_1 * \Sigma_1 = \Sigma_1 \text{ et } \Sigma_1 \leq \Sigma,$$

et, par conséquent, d'après le théorème II.9:

$$\Sigma_1^{*h} \leq \Sigma^{*h}$$

pour tout entier h non nul. Nous avons donc bien : $\Sigma_1 \leq \Sigma^{*k}$.

Suivant le choix de la fonction ϕ , on peut donc définir et calculer par un algorithme polynomial, la plus grande ultramétrique, la plus grande distance de type p inférieure à une dissimilarité donnée.

Exemple: Soit $E = \{1,2,3,4\}$ et s la dissimilarité propre sur E donnée par la matrice

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) si $\phi = \phi_\infty$, on vérifie que

$$\Sigma^{*2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Sigma^{*3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et que $\Sigma^{*4} = \Sigma^{*3}$. La dissimilarité s est donc de ϕ -degré 3.

b) si $\phi = \phi_1$, on vérifie que

$$\Sigma^{*2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et que $\Sigma^{*3} = \Sigma^{*2}$. La dissimilarité s est donc de ϕ_1 -degré égal à 2.

c) si $\phi = \phi_2$, on vérifie que

$$\Sigma^{*2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{5} & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Sigma^{*3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et que $\Sigma^{*4} = \Sigma^{*3}$. la dissimilarité s est donc de ϕ_2 -degré égal à 3.

On retrouve, en outre, que

$$\Sigma^{\phi_2^{*3}} \leq \Sigma^{\phi_2^{*3}} \leq \Sigma^{\phi_1^{*2}} \leq \Sigma$$

La remarque suivante est due à F. CAILLEZ.

Remarque IV.6. Pour déterminer le ϕ -degré d'une ϕ -dissimilarité, il faut chercher le plus petit entier k tel que $\Sigma^{*k} = \Sigma^{*(k+1)}$. Il est évidemment plus rapide d'étudier la suite $\Sigma^{*2}, \Sigma^{*4}, \Sigma^{*8}, \dots$. Le plus petit entier h tel que

$$\Sigma^{*2^h} = \Sigma^{*2^{(h+1)}}$$

vérifie les inégalités

$$2^h < n-1 \leq 2^{(h+1)}$$

et 2^h est un majorant du ϕ -degré.

V. MORPHOLOGIE DES ϕ -TRIANGLES.

L'étude qui précède permet d'associer à toute dissimilarité propre s sur l'ensemble $E = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 2$, la plus grande distance de type p inférieure à s . Nous allons examiner maintenant un des aspects des contraintes imposées aux représentations euclidiennes multidimensionnelles quand on utilise une telle distance.

Rappelons qu'on définit une représentation euclidienne d'un ensemble fini E , muni d'une dissimilarité s , par une application f de E dans un espace euclidien R^k , telle que

$$\forall (i, j) \in E^2, s(i, j) = d(f(i), f(j))$$

où d est la distance dans l'espace R^k .

On sait qu'une telle représentation n'existe pas pour n'importe quelle valeur de k , et que l'un des problèmes de la théorie des représentations euclidiennes est de trouver le plus petit entier k pour qu'une telle représentation soit possible.

Il est évident que si s est une ϕ -dissimilarité, la distance d sur R^k devra vérifier

$$\forall (i, h, j) \in E^3, \quad d(f(i), f(j)) \leq \phi(d(f(i), f(h)), d(f(h), f(j)))$$

et, par conséquent, que d est aussi une ϕ -dissimilarité sur l'ensemble fini $f(E)$. En particulier, si s est une dissimilarité de type p sur E , il en est de même pour d sur $f(E)$. Ainsi, on sait que si s est une ultramétrique, tous les triangles, extraits de $f(E)$, sont isocèles, les côtés égaux étant plus grands que le troisième.

Nous allons préciser rapidement la morphologie des ϕ_p -triangles, c'est-à-dire des triangles ABC dans R^2 dont les longueurs a, b, c des côtés BC, CA, AB vérifient les relations

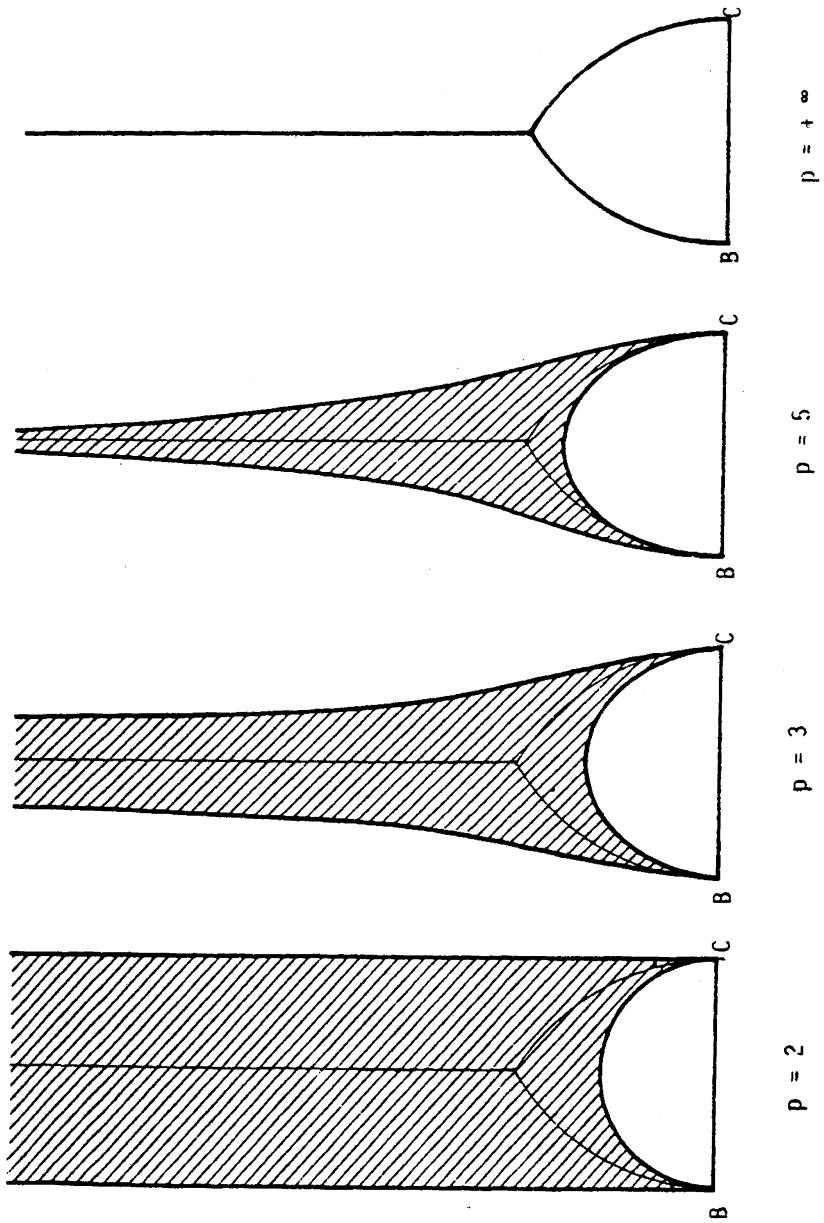
$$a^p \leq b^p + c^p \quad b^p \leq a^p + c^p \quad c^p \leq a^p + b^p$$

Bien évidemment, si $p = 1$, il n'y a aucune contrainte. Pour $p = 2$, on constate que les angles du triangle doivent des angles aigus.

Soit donc $p \in [1, +\infty]$, et supposons fixés les points B et C . Désignons par H_p , le sous ensemble de R auquel doit appartenir le point A pour que le triangle ABC soit un ϕ_p -triangle.

L'ensemble H_p possède évidemment la droite support du segment BC comme axe de symétrie. Nous n'étudierons donc que la partie de H_p contenue dans l'un des demi plans définis par cette droite. La médiatrice de BC est aussi un axe de symétrie.

En étudiant les frontières de H_p pour lesquelles une au moins des trois contraintes en a, b, c est saturée, on peut, au prix d'un peu de géométrie analytique en coordonnées bipolaires, délimiter l'ensemble H_p . Nous donnons ci dessous le graphe de H_p pour $p = 2, 3, 5$ et $+\infty$. On remarque que le graphe de H_p est la limite du graphe de H_p , quand p augmente indéfiniment. On voit bien ainsi comment la forme du triangle ABC est de plus en plus proche de celle d'un triangle isocèle, quand p augmente.



LES DOMAINES H_p DANS LE PLAN.

BIBLIOGRAPHIE

=====

- [1] B.A. CARRE "An algebra for network routing problems".
J.Inst. Math. Applic. Vol 7.1971.
p 273 - 294.
- [2] B. FICHET "Préordonnances et hiérarchies stratifiées
associées sous l'angle des indices de
décomposition".
Communication aux Journées de Statistiques.
Bruxelles. 24-27 mai 1982.
- [3] M. GONDRAN "La structure algébrique des classifications
hiérarchiques".
Annales de l'INSEE.1976. N°22-23. p 181-190
- [4] B. VAN CUTSEM "Ultramétrie, distances, distances de
type L^P maximum inférieures à une dissimi-
larité donnée".
Laboratoire IMAG. R.R.382.Juin 1983.
- [5] B. VAN CUTSEM "Encadrement minimal d'une dissimilarité
par des distances ou des ultramétriques".
Communication au Congrès Européen des Soci-
étés de Classification".
Jouy en Josas,France.6-8 juillet 1983.
- [6] R.T. YEH et S.Y.BANG "Fuzzy relations, fuzzy graphs and their
applications to clustering analysis".
in "Fuzzy sets and their applications to
cognitive and decision processes". Edité
par L.A.ZADEH et Al. Academic Press.1975.
p. 125-149