Statistique et analyse des données

C. Heuchenne

La procédure linéaire de classement la plus sûre sans hypothèse distributionnelle ?

Statistique et analyse des données, tome 6, n° 2 (1981), p. 22-48.

<http://www.numdam.org/item?id=SAD_1981__6_2_22_0>

Statistique et Analyse de données
1981 - Vol. 6 n° 2 - pp. 22-48

LA PROCEDURE LINEAIRE DE CLASSEMENT LA PLUS SURE SANS HYPOTHESE DISTRIBUTIONNELLE ?

C. HEUCHENNE

Institut de Psychologie de l'Université de Liège
au Sart-Tilman - B 4000

Résumé : *Quand $\vec{g}$ est un vecteur de prédicteurs, pour n'importe quelles fonctions f_j, soit la règle : attribuer $\vec{g}$ à la classe i qui maximise $f_i(\vec{g})$ parmi $f_1(\vec{g}),...f_c(\vec{g})$. Des bornes inférieure et supérieure de mauvais classement sont établies sous différentes conditions. Ces résultats conduisent à la règle de Bayes quand les distributions sont connues et, sinon, suggèrent que f_j soit la régression linéaire de l'indicatrice 0-1 de la classe j sur $\vec{g}$. Cette simple procédure sans hypothèse distributionnelle minimise la borne supérieure de la probabilité de mauvais classement parmi les règles linéaires et est la meilleure approximation linéaire de la règle de Bayes. Elle se réduit à un algorithme de régression et permet d'agréger rationnellement des classes en cours de route.*

Summary : *When $\vec{g}$ is a vector of predictors, for any functions f_j, let be the rule : attribute $\vec{g}$ to that class i which maximizes $f_i(\vec{g})$ among $f_1(\vec{g}),...f_c(\vec{g})$. G.l.b. and l.u.b. of the probability of misclassification are stated under miscelleanous conditions. These results lead to Bayes rule when distributions are known and, if not, suggest that f_j would be the linear regression of the 0-1 indicator of class j onto $\vec{g}$. This simple distribution-free procedure minimizes the l.u.b. of the probability of misclassification among linear rules and is the best linear approximation of Bayes rule. It reduces to a regression algorithm and allows rationally aggregating some classes on the way.*

Mots clés : *Analyse discriminante, classement, regression linéaire.*

Toute procédure de classement en c catégories exclusives sur base de w variables prédictives se ramène au schéma suivant :
- à chaque classe E_j est attachée une fonction f_j de R^w dans R;
- à un individu portant $\vec{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_w)$, tiré au hasard de $E = \bigcup_{j=1}^{c} E_j$, est pronostiquée la catégorie E_i si $f_i(\vec{g})$ est la plus grande des c valeurs $f_j(\vec{g})$.

S'il y a plusieurs $f_j(\vec{g})$ maxima, un tirage au sort ou une convention a priori doit décider de l'attribution à un E_i.

Considérons les indicatrices des catégories :

$h_j = 1$ si l'individu appartient à E_j,
$= 0$ sinon,

et leur moyenne conditionnée par $\vec{g}$

$\tilde{h}_j(\vec{g}) = \&(h_j/\vec{g}) = pr(E_j/\vec{g})$.

Les $\tilde{h}_j$ sont des fonctions de R^w dans $[0,1]$. Pour simplifier l'écriture, on notera aussi f_j la variable statistique qui associe la valeur $f_j(\vec{g})$ à un individu qui porte $\vec{g}$.

Relativement à un ensemble précisé, le terme fourchette désignera l'intervalle de variation d'une probabilité entre sa borne inférieure et sa borne supérieure.

Dans l'ensemble des fonctions f_j appliquées à une distribution multivariée dans E, spécifiée par ses $\tilde{h}_j$, la fourchette de la probabilité de classement correct est

$[\&(\inf_j \tilde{h}_j), \&(\sup_j \tilde{h}_j)]$.

Conditionnellement au vecteur $\vec{g}$, la probabilité de classement correct est $pr(E_i/\vec{g})$ si $f_i(\vec{g})$ est le maximum des c valeurs $f_j(\vec{g})$. De

$$\inf_j \tilde{h}_j(\vec{g}) \leqslant \tilde{h}_i(\vec{g}) \leqslant \sup_j \tilde{h}_j(\vec{g}),$$

on tire

$$\&(\inf_j \tilde{h}_j) \leqslant \&(\tilde{h}_i) = pr(c.c) \leqslant \&(\sup_j \tilde{h}_j).$$

La borne inférieure est atteinte quand les fonctions classificatrices f_j sont les $(-\tilde{h}_j)$; dans ce cas, en effet, l'indice i qui maximise $-\tilde{h}_j(\vec{g})$ est l'indice i qui minimise $\tilde{h}_j(\vec{g})$. C'est la pire des procédures quand les $\tilde{h}_j$ sont données.

La borne supérieure est atteinte quand les f_j sont les $\tilde{h}_j$ elles-mêmes puisqu'alors l'indice i est celui qui maximise $\tilde{h}_j(\vec{g})$. C'est la meilleure règle quand les $\tilde{h}_j$ sont données. Elle n'est autre que la règle de Bayes puisque

$$\tilde{h}_j(\vec{g}) = \frac{pr(E_j)pr(\vec{g}/E_j)}{pr(\vec{g})} ;$$

quand $\vec{g}$ est connu, prédire E_i qui donne le maximum des $pr(E_j)pr(\vec{g}/E_j)$ [Rao,7d.3].

Dans l'ensemble des distributions telles que $\sum_j \&(\tilde{h}_j^2)$ est un un nombre fixé r, la fourchette de la probabilité de classement correct est

$$[\sup\{0, c^{-1}(1-\sqrt{(c-1)(cr-1)})\}, \frac{1-r}{c-1}]$$

par la procédure du $\tilde{h}_j$ minimum, et celle pour la procédure du $\tilde{h}_j$ maximum est

$$[r, c^{-1}(1+\sqrt{(c-1)(cr-1)})].$$

Notons immédiatement que $r \in [c^{-1},1]$, puisque $\sum_{j=1}^{c} \tilde{h}_j = 1$ et $\tilde{h}_j \in [0,1]$ entraînent

$$c^{-1} \leqslant \sum_{j=1}^{c} \tilde{h}_j^2 \leqslant 1.$$

On a

$$\sum_j \tilde{h}_j^2 \leqslant (\sup_j \tilde{h}_j)\sum_j \tilde{h}_j = \sup_j \tilde{h}_j$$

$$(c-1)(\inf_j \tilde{h}_j) + \sum_j \tilde{h}_j^2 \leqslant \sum_{j\neq i} \tilde{h}_j + \tilde{h}_i = \sum_j \tilde{h}_j = 1$$

si $\tilde{h}_i = \sup_j \tilde{h}_j$, donc

$$\inf_j \tilde{h}_j \leqslant \frac{1 - \sum_j \tilde{h}_j^2}{c-1}$$

Par [Rao,1f.1.1], on a pour un indice k quelconque

$$1 + \tilde{h}_k^2 - 2\tilde{h}_k = (1-\tilde{h}_k)^2 = (\sum_{j\neq k} \tilde{h}_j)^2 \leqslant (c-1)\sum_{j\neq k} \tilde{h}_j^2$$

puis successivement

$$1 + c\tilde{h}_k^2 - 2\tilde{h}_k \leqslant (c-1)\sum_j \tilde{h}_j^2$$

$$1 + c + c^2\tilde{h}_k^2 - 2c\tilde{h}_k \leqslant 1 + c(c-1)\sum_j \tilde{h}_j^2$$

$$(c\tilde{h}_k - 1)^2 \leqslant (c-1)(c\sum_j \tilde{h}_j^2 - 1)$$

$$-\sqrt{(c-1)(c\sum_j \tilde{h}_j^2-1)} \leqslant c\tilde{h}_k - 1 \leqslant \sqrt{(c-1)(c\sum_j \tilde{h}_j^2-1)}$$

$$c^{-1}(1-\sqrt{(c-1)(c\sum_j \tilde{h}_j^2-1)}) \leqslant \tilde{h}_k \leqslant c^{-1}(1+\sqrt{(c-1)(c\sum_j \tilde{h}_j^2-1)})$$

Comme $\sqrt{(c-1)(cx-1)}$ est une fonction concave de x, à l'aide de l'inégalité de Jensen [Rao, 1e.5.6], on obtient

$$\frac{1-\sqrt{(c-1)(c\,\&(\sum_j \tilde{h}_j^2)-1)}}{c} \leqslant \&(\inf_j \tilde{h}_j) \leqslant \frac{1-\&(\sum_j \tilde{h}_j^2)}{c-1}$$

$$\&(\sum_j \tilde{h}_j^2) \leqslant \&(\sup_j \tilde{h}_j) \leqslant \frac{1+\sqrt{(c-1)(c\,\&(\sum_j \tilde{h}_j^2)-1)}}{c}$$

Si $r = c^{-1}$, presque sûrement $\tilde{h}_j = c^{-1}$ pour tout j, donc pr(c.c) n'est pas définie. Les deux fourchettes se réduisent à c^{-1} qui est la probabilité de classement correct par tirage au sort.

Si r = 1, à un ensemble de probabilité nulle près, pour tout $\vec{g}$, il existe i tel que $\tilde{h}_i(\vec{g}) = 1$ et $\tilde{h}_j(\vec{g}) = 0$ si $j \neq i$. Dans cet autre cas extrême, pr(c.c) = 0 avec la règle du $\tilde{h}_j$ minimum et pr(c.c) = 1 avec la règle du $\tilde{h}_j$ maximum; les deux fourchettes se réduisent précisément à 0 et 1.

Il reste à montrer que si $r \in]c^{-1}, 1[$, les minorants et majorants sont atteints ou arbitrairement approchés par certaines distributions.

Pour $r \in]\frac{1}{c}, \frac{1}{c-1}[$ (resp. $\in]\frac{1}{c}, 1[$), soient

$p = c^{-1}(1-\sqrt{(c-1)(cr-1)})$ (resp. $c^{-1}(1+\sqrt{(c-1)(cr-1)})$

qui est dans $]0, \frac{1}{c}[$ (resp. $]\frac{1}{c}, 1[$)

et un seul vecteur $\vec{g}$ en proportion p dans E_1, en proportion $\frac{1-p}{c-1}$ dans $E_2, \ldots E_c$.

$$\sum_j \&(\tilde{h}_j^2) = p^2 + (c-1)(\frac{1-p}{c-1})^2 = r$$

Avec la procédure du $\tilde{h}_j$ minimum (resp. maximum), E_1 est toujours pronostiqué puisque

$\tilde{h}_1(\vec{g}) = p <$ (resp. $>$) $\frac{1}{c} <$ (resp. $>$) $\frac{1-p}{c-1} = \tilde{h}_j(\vec{g})$ pour $j \neq 1$,

donc pr(c.c) = pr(E_1) = p.

Pour $r \in [\frac{1}{c-1}, 1[$, donc c > 2, on prend

$$p = \frac{1+\sqrt{(c-2)(cr-r-1)}}{c-1}$$

qui est dans $[\frac{1}{c-1}, 1[$,
un vecteur $\vec{g}_1$ en proportion $\frac{p}{2}$ dans E_1, en proportion $\frac{1-p}{2(c-2)}$ dans $E_3,\ldots E_c$ et un autre vecteur $\vec{g}_2$ en proportion $\frac{p}{2}$ dans E_2, en proportion $\frac{1-p}{2(c-2)}$ dans $E_3,\ldots E_c$.

$$\tilde{h}_2(\vec{g}_1) = \tilde{h}_1(\vec{g}_2) = 0 < \frac{1-p}{c-2} = \tilde{h}_j(\vec{g}_1) = \tilde{h}_j(\vec{g}_2) \leqslant p = \tilde{h}_1(\vec{g}_1) = \tilde{h}_2(\vec{g}_2)$$

pour $j \neq 1,2$.

$$\sum_j \&(\tilde{h}_j^2) = \frac{p^2+0^2}{2} + \frac{0^2+p^2}{2} + \frac{(c-2)}{2}((\frac{1-p}{c-2})^2+(\frac{1-p}{c-2})^2) = r$$

La règle du $\tilde{h}_j$ minimum prédit E_2 à $\vec{g}_1$ issu de $E-E_2$ et E_1 à $\vec{g}_2$ issu de $E-E_1$, donc $pr(c.c)$ nulle est atteinte quand $r \geqslant \frac{1}{c-1}$, c'est-à-dire $c^{-1}(1-\sqrt{(c-1)(cr-1)}) \leqslant 0$.

Pour $r \in]\frac{1}{c}, 1[$, on prend η positif et arbitrairement petit de telle sorte que

$$p = \frac{r-c^{-1}-2\eta^2}{1-c^{-1}+(c^2-3c)\eta^2-2(c-2)\eta}$$

soit dans $]0,1[$, un vecteur $\vec{g}_1$ en proportion $p(1-(c-2)\eta)$ dans E_1, en proportion $p\eta$ dans $E_3,\ldots E_c$, et un autre vecteur $\vec{g}_2$ en proportion $(1-p)(\frac{1}{c}+\eta)$ dans E_1, en proportion $(1-p)(\frac{1}{c}-\eta)$ dans E_2 et en proportion $\frac{1-p}{c}$ dans $E_3,\ldots E_c$. Pour $j \neq 1,2$,

$$\tilde{h}_2(\vec{g}_1) = 0 < \tilde{h}_j(\vec{g}_1) = \eta < \tilde{h}_1(\vec{g}_1) = 1-(c-2)\eta$$

$$\tilde{h}_2(\vec{g}_2) = \frac{1}{c}-\eta < \tilde{h}_j(\vec{g}_2) = \frac{1}{c} < \tilde{h}_1(\vec{g}_2) = \frac{1}{c}+\eta$$

$$\sum_j \&(\tilde{h}_j^2) = p((1-(c-2)\eta)^2+(c-2)\eta^2)+(1-p)((\frac{1}{c}+\eta)^2+(\frac{1}{c}-\eta)^2+\frac{c-2}{c^2}) = r$$

Avec la décision du $\tilde{h}_j$ minimum,

$$pr(c.c) = pr(E_2) = (1-p)(\frac{1}{c}-\eta)$$

qui est arbitrairement proche de

$$(1-\frac{r-c^{-1}}{1-c^{-1}})c^{-1} = \frac{1-r}{c-1}$$

Avec la décision du $\tilde{h}_j$ maximum,

$$pr(c.c) = pr(E_1) = p(1-(c-2)\eta) + (1-p)(\frac{1}{c}+\eta)$$

qui est arbitrairement voisin de

$$\frac{r-c^{-1}}{1-c^{-1}} + (1-\frac{r-c^{-1}}{1-c^{-1}})c^{-1} = r.$$

* * *

Si on ne connaît pas les fonctions $\tilde{h}_j$ (ou n'en veut rien connaître par souci de simplicité), on peut cependant, avec un peu d'information, en trouver de bonnes approximations.

Soit $\hat{h}_j$ la régression linéaire de l'indicatrice h_j de la classe E_j sur le vecteur prédictif $\vec{g}$.

Au sens des moindres carrés, $\hat{h}_j$ est la meilleure approximation linéaire de $\tilde{h}_j$.

Les propriétés caractéristiques des modèles de régression sont [Rao, 4g.1] :

$\&(\tilde{h}_j) = \&(\hat{h}_j) = \&(h_j)$,

$\&(\tilde{h}_j f) = \&(h_j f)$ pour toute fonction f de $\vec{g}$,

$\&(\hat{h}_j f) = \&(h_j f)$ pour toute fonction linéaire f de $\vec{g}$.

Il en résulte

$$\&(\tilde{h}_j \hat{h}_j) = \&(h_j \hat{h}_j) = \&(\hat{h}_j^2)$$

puis, pour une fonction linéaire f quelconque de $\vec{g}$,

$$\&((f-\hat{h}_j)(\hat{h}_j-\tilde{h}_j)) = \&(f\hat{h}_j)-\&(f\tilde{h}_j)-\&(\hat{h}_j^2)+\&(\hat{h}_j\tilde{h}_j) = \&(fh_j)-\&(fh_j) = 0$$

enfin

$$\&(f-\tilde{h}_j)^2 = \&(f-\hat{h}_j+\hat{h}_j-\tilde{h}_j)^2 = \&(f-\hat{h}_j)^2 + \&(\hat{h}_j-\tilde{h}_j)^2 \geqslant \&(\hat{h}_j-\tilde{h}_j)^2$$

$\hat{h}_j$ est ainsi la fonction linéaire f de $\vec{g}$ qui minimise $\&(f-\tilde{h}_j)^2$.

Une bonne procédure linéaire de classement est donc : pronostiquer E_i à un individu qui porte $\vec{g}$ si $\hat{h}_i(\vec{g})$ est le maximum des $\hat{h}_j(\vec{g})$ pour $j=1,2,\ldots c$.

Soient π_j la proportion de E_j, $\vec{\mu}_j$ le vecteur moyen de $\vec{g}$ dans E_j, $\vec{\mu} = \sum_{j=1}^{c} \pi_j \vec{\mu}_j$ le vecteur moyen global, V la matrice (totale) des covariances de $\vec{g}$ dans E. Puisque

$\mathbb{E}(h_j) = \pi_j$, $\mathrm{cov}(h_j, \vec{g}) = \mathbb{E}(h_j \vec{g}) - \mathbb{E}(h_j)\mathbb{E}(\vec{g}) = \pi_j(\vec{\mu}_j - \vec{\mu})$

on a

$\hat{h}_j(\vec{g}) = \pi_j + \pi_j(\vec{\mu}_j - \vec{\mu})' V^{-1}(\vec{g} - \vec{\mu})$

d'où

$\sum_j \hat{h}_j = 1.$

Puisque

$\mathbb{E}((h_j - \hat{h}_j)\hat{h}_j) = 0$, il vient encore

$\mathbb{E}(\hat{h}_j^2) + \mathbb{E}(h_j - \hat{h}_j)^2 = \mathbb{E}(h_j^2)$

puis l'analyse de variance

$\mathrm{var}(\hat{h}_j) + \mathrm{var}(h_j - \hat{h}_j) = \mathrm{var}(h_j) = \pi_j(1-\pi_j)$

La procédure est liée à l'analyse factorielle discriminante (vecteurs propres de $V^{-1}B$) et à l'analyse de variance multivariée par

$\mathrm{tr}(V^{-1}B) = \sum_{j=1}^{c} \pi_j^{-1} \mathrm{var}(\hat{h}_j)$

où

$B = \sum_{j=1}^{c} \pi_j (\vec{\mu}_j - \vec{\mu})(\vec{\mu}_j - \vec{\mu})'$

est la matrice des covariances interclasse. En effet,

$$\sum_{i=1}^{w} (V^{-1}B)_{ii} = \sum_{i,k} (V^{-1})_{ik} B_{ki} = \sum_{i,k} (V^{-1})_{ik} \sum_{j=1}^{c} \pi_j (\mu_{kj} - \mu_k)(\mu_{ij} - \mu_i)$$

$$= \sum_j \pi_j \sum_{i,k} (\mu_{ij} - \mu_i)(V^{-1})_{ik}(\mu_{kj} - \mu_k)$$

$$= \sum_j \pi_j (\vec{\mu}_j - \vec{\mu})' V^{-1} (\vec{\mu}_j - \vec{\mu})$$

et

$$\mathrm{var}(\hat{h}_j) = \mathbb{E}(\hat{h}_j - \pi_j)^2$$

$$= \pi_j^2 (\vec{\mu}_j - \vec{\mu})' V^{-1} \mathbb{E}((\vec{g} - \vec{\mu})(\vec{g} - \vec{\mu})') V^{-1} (\vec{\mu}_j - \vec{\mu})$$

$$= \pi_j^2 (\vec{\mu}_j - \vec{\mu})' V^{-1} (\vec{\mu}_j - \vec{\mu})$$

On arrive à un coefficient de détermination de la classification par les variables prédictives, variant dans [0,1], en divisant la quantité ci-dessus par (c-1) :

$\rho^2 = (c-1)^{-1} \sum_{j=1}^{c} \pi_j^{-1} \mathrm{var}(\hat{h}_j)$

En effet, $\rho^2 = 0$ si et seulement si $\mathrm{var}(\hat{h}_j) = 0$ pout tout j, c'est-à-dire $\hat{h}_j(\vec{g}) = \pi_j$ pour tout j et presque tout $\vec{g}$.

C'est principalement le cas lorsque $\vec{\mu}_j = \vec{\mu}$ pour tout j.

En outre, $\rho^2 \leqslant 1$ car

$$\mathrm{var}(\hat{h}_j) \leqslant \pi_j(1-\pi_j)$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{c} \pi_j^{-1}\mathrm{var}(\hat{h}_j) \leqslant \sum_{j=1}^{c}(1-\pi_j) = c-1$$

Il s'ensuit que la condition nécessaire et suffisante pour que $\rho^2 = 1$ est $\mathrm{var}(h_j-\hat{h}_j) = 0$ pour tout j, soit $\hat{h}_j = h_j$ pour tout j et presque tout individu. C'est le cas notamment de la détermination linéaire complète des indicatrices h_j par $\vec{g}$. Des considérations algébrico-géométriques montrent que ceci arrive quand, au sein de l'espace R^w des $\vec{g}$, tout individu de E_j se situe dans un hyperplan de dimension (w-c+1), les c hyperplans ainsi définis étant parallèles et distincts.

Si c = 2, ρ^2 se réduit à

$$\frac{\mathrm{var}(\hat{h}_1)}{\mathrm{var}(h_1)} = \pi_1\pi_2(\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}_2)'V^{-1}(\vec{\mu}_1 - \vec{\mu}_2)$$

Si, en outre, w = 1, ρ est la corrélation bisériale de point.

Il est encore intéressant de noter que, si les variables prédictives g_i sont les w premières indicatrices d'une classification à (w+1) catégories F_i, croisée avec celle des c classes E_j,

$$\hat{h}_j = \mathrm{pr}(E_j/F_{w+1}) + \sum_{i=1}^{w}(\mathrm{pr}(E_j/F_i)-\mathrm{pr}(E_j/F_{w+1}))g_i$$

$$= \sum_{i=1}^{w+1} \mathrm{pr}(E_j/F_i)g_i$$

et que, par conséquent, l'appartenance à F_i (soit g_i=1, les autres nuls), prédit, comme il se doit, la catégorie E_j qui maximise $\mathrm{pr}(E_j/F_i)$. Dans ce cas,

$$\rho^2 = \frac{1}{c-1}\left(\sum_{i=1}^{w+1}\sum_{j=1}^{c}\frac{\mathrm{pr}^2(F_i\cap E_j)}{\mathrm{pr}(F_i)\mathrm{pr}(E_j)} - 1\right)$$

et ρ est l'indice de contingence de Cramer quand $c-1 \leqslant w$.

* * *

On peut examiner le problème de classement d'un autre point de vue en faisant appel aux résidus $\varepsilon_j = h_j - f_j$.

Le maximum $\max_c f_i$ des fonctions classificatrices correspond au minimum de $\sum_{j=1}^{c} \varepsilon_j^2$ conditionnel à E_i puisque, dans E_i,

$$\sum_j \varepsilon_j^2 = (1-f_i)^2 + \sum_{j\neq i} (0-f_j)^2 = 1 - 2 f_i + \sum_j f_j^2$$

Dans l'ensemble des distributions et des fonctions f_j telles que $\sum_j \&(\varepsilon_j^2) = v$, nombre fixé, la fourchette de la probabilité de mauvais classement est $[0, \inf\{1, 2v\}]$.

Il y a erreur de classement quand un individu de E_j obtient, via son $\vec{g}$, un f_i maximum avec $i \neq j$. Dans ce cas,

$$2(\varepsilon_j^2+\varepsilon_i^2) \geqslant \varepsilon_j^2+\varepsilon_i^2-2\varepsilon_j\varepsilon_i = (\varepsilon_j-\varepsilon_i)^2 = (1-f_j+f_i)^2 \geqslant 1$$

puisque $h_j = 1$, $h_i = 0$ et $f_i \geqslant f_j$.

Soit 1 l'indicatrice d'erreurs : 1 = 1 s'il y a erreur, 1 = 0 sinon. De

$$1 \leqslant 2 \sum_j \varepsilon_j^2$$

on tire

$$pr(m.c) = \&(1) \leqslant \&(2 \sum_j \varepsilon_j^2) = 2v.$$

Il reste à montrer que, si $v \in [0, 0.5]$ (resp. > 0.5, resp. $\geqslant 0$), il existe des fonctions f_j et des distributions de $\vec{g}$ dans des E_j telles que $\sum_j \&(\varepsilon_j^2) = v$ et telles que la probabilité de mauvais classement soit arbitrairement voisine de $2v$ (resp. égale à 1, resp. égale à 0).

Soient f_j la projection de R^c sur son j^e axe, c'est-à-dire $f_j(\vec{g}) = g_j$, et $i = j + 1$ (modulo c).

Si $v \in [0, 0.5]$, pour η arbitrairement petit et positif, on prend

$$p = \frac{2v}{(1+2\eta)^2}$$

qui est donc $\in [0, 1[$ et arbitrairement proche de $2v$.

Pour $j = 1, 2, \ldots c$, dans E_j, une proportion $\frac{1-p}{c}$ d'individus portent $g_j = 1$, les autres $g_k = 0$, et une proportion $\frac{p}{c}$ d'individus portent $g_j = 0.5-\eta$, $g_i = 0.5+\eta$, les autres $g_k = 0$.

La probabilité d'erreurs est donc p.

$$\&(\varepsilon_j^2) = c^{-1}((1-p)(1-1)^2 + p(1-0.5+\eta)^2 + (1-p)(0-0)^2 + p(0-0.5-\eta)^2$$
$$+ (c-2)((1-p)(0-0)^2 + p(0-0)^2)) = 2\, c^{-1} p(0.5+\eta)^2.$$

Ainsi
$\sum_j \&(\varepsilon_j^2) = 2\ p(0.5+\eta)^2 = v.$

Dans les deux autres cas de v, pour j = 1,2,...c, dans E_j de proportion c^{-1}, tous les individus portent $g_j = 1\mp\sqrt{0.5v}$, $g_i = \pm\sqrt{0.5v}$, les autres $g_k = 0$.
$\&(\varepsilon_j^2) = c^{-1}((1-1\pm\sqrt{0.5v})^2 + (0\mp\sqrt{0.5v})^2 + (c-2)(0-0)^2) = vc^{-1}$, donc
$\sum_j \&(\varepsilon_j^2) = v.$

Si $v > 0.5$, avec $g_j = 1-\sqrt{0.5v}$ et $g_i = \sqrt{0.5v}$, la probabilité d'erreurs est 1 puisque $g_j < 0.5 < g_i$.

Si $v \geqslant 0$, avec $g_j = 1+\sqrt{0.5v}$ et $g_i = -\sqrt{0.5v}$, la probabilité d'erreurs est 0 puisque $g_i \leqslant 0 < 1 \leqslant g_j$.

Avec un tel résultat, il est naturel de prendre comme critère de choix d'une procédure la minimisation de $\sum_j \&(\varepsilon_j^2)$ avec l'information dont on dispose.

Si l'on connaît la distribution de $\vec{g}$ liée à chaque E_j et la proportion π_j de (dans un choix au hasard d'un individu, la probabilité a priori d'appartenance à) E_j, le principe des moindres carrés procure encore $\tilde{h}_j$ comme fonction classificatrice optimum.
$\&(\varepsilon_j^2) = \&(h_j^2) - 2\&(h_j\tilde{h}_j) + \&(\tilde{h}_j^2) = \&(h_j) - \&(\tilde{h}_j^2) = \pi_j - \&(\tilde{h}_j^2)$
donne
$\sum_j \&(\varepsilon_j^2) = 1 - \sum_j \&(\tilde{h}_j^2)$
ce qui permet de transposer la fourchette de pr(c.c) donnée ci-avant.

Avec la règle du $\tilde{h}_j$ maximum, la fourchette de pr(m.c) est
$[\frac{c-1}{c}(1-\sqrt{1-\frac{cv}{c-1}}), v\ ]$
dans l'ensemble des distributions telles que $\sum_j \&(\varepsilon_j^2) = v$.

Si on recherche le minimum de $\sum_j \&(h_j - f_j)^2$ au sein des fonctions linéaires f_j, le même principe des moindres carrés fournit encore $\hat{h}_j$ comme meilleure fonction classificatrice.

Avec une information plus étendue que celle des deux premiers moments, rien n'empêcherait d'ailleurs de considérer d'autres types

de fonctions classificatrices f_j - par exemple polynomiales - en résolvant les équations normales qui donnent le minimum de $\&(\Sigma_j (h_j - f_j)^2)$.

Notons que pour les fonctions $\tilde{h}_j$ ou $\hat{h}_j$, on a

$\Sigma_j \varepsilon_j = 0$ car $\Sigma_j \tilde{h}_j = \Sigma_j \hat{h}_j = \Sigma_j h_j = 1$ et

$\&(\varepsilon_j) = 0$ car $\&(\tilde{h}_j) = \&(\hat{h}_j) = \&(h_j) = \pi_j$.

Le théorème général donnant la fourchette de pr(m.c) en termes de v pourrait inclure ces conditions d'échelle à titre d'hypothèse sur les f_j puisque les exemples qu'il contient satisfont à ces conditions, comme on le vérifie aisément.

* * *

Pour construire des exemples de régressions linéaires, on utilisera le lemme suivant.

Si la distribution de $\vec{g} = (g_1, g_2, \ldots g_{c-1})$ est telle que $\&(g_j) = \pi_j$, $\&(g_j \vec{g}) = \pi_j \vec{\mu}_j$ pour $j=1,2,\ldots(c-1)$ et que les $(c-1)$ vecteurs $\pi_j(\vec{\mu}_j - \vec{\mu})$ sont linéairement indépendants, en posant $g_c = 1 - \sum_{j=1}^{c-1} g_j$, la régression linéaire de h_j sur $\vec{g}$ est g_j, quel que soit $j=1,2,\ldots c$ et $\sum_{j=1}^{c} \&(\varepsilon_j^2) = 1 - \sum_{j=1}^{c} \&(g_j^2)$

$\mathrm{cov}(g_j, \vec{g}) = \&(g_j \vec{g}) - \&(g_j)\&(\vec{g}) = \pi_j(\vec{\mu}_j - \vec{\mu})$

est la j^e colonne de la matrice inversible V, donc

$[\,0\ldots0\ \pi_j^{-1}\ 0\ldots0\,]\,V = (\vec{\mu}_j - \vec{\mu})'$

Pour $j=1,2,\ldots(c-1)$:

$$\hat{h}_j(\vec{g}) = \pi_j + \pi_j(\vec{\mu}_j - \vec{\mu})'V^{-1}(\vec{g} - \vec{\mu})$$

$$= \pi_j + \pi_j[\,0\ldots0\ \pi_j^{-1}\ 0\ldots0\,](\vec{g} - \vec{\mu})$$

$$= \pi_j + g_j - \pi_j = g_j$$

et $\hat{h}_c = 1 - \sum_{j=1}^{c-1} \hat{h}_j = 1 - \sum_{j=1}^{c-1} g_j = g_c$.

Enfin

$$\&(\varepsilon_j^2) = \&(h_j^2) - 2\&(h_j \hat{h}_j) + \&(\hat{h}_j^2) = \&(h_j) - \&(\hat{h}_j^2) = \pi_j - \&(g_j^2)$$

Avec la règle du $\hat{h}_j$ maximum, la fourchette de pr(m.c) est $[0, \inf\{1,2v\}]$ dans l'ensemble des distributions telles que $\sum_j \&(\varepsilon_j^2) = v$.

On a encore

$$\sum_j \&(\varepsilon_j^2) \leqslant \sum_j \pi_j(1-\pi_j) \leqslant 1-c^{-1}$$

car

$$\&(\varepsilon_j^2) = \mathrm{var}(\varepsilon_j) = \pi_j(1-\pi_j) - \mathrm{var}(\hat{h}_j)$$

Evidemment les bornes générales 0 et $\inf\{1,2v\}$ restent minorant et majorant. Si $v = 0$, les deux bornes sont nulles car pour tout j, $\&(\varepsilon_j^2) = 0$ exige presque sûrement $h_j = \hat{h}_j$, donc une probabilité d'erreurs nulle. Si $v = 1-c^{-1}$, $\hat{h}_j(\vec{g}) = c^{-1}$ pour tout j et presque tout $\vec{g}$: la probabilité de mauvais classement n'est pas définie.

Il reste à montrer que si $v \in]0,0.5]$ (resp. $\in]0.5, 1-c^{-1}[$, resp. $\in]0, 1-c^{-1}[$), il existe une distribution de $\vec{g}$ vérifiant le lemme, telle que $\sum_j \&(g_j^2) = 1-v$ et que la probabilité d'erreurs soit arbitrairement proche de 2v (resp. vaille 1, resp. vaille 0).

En ce qui concerne la borne supérieure, on considère

$$y = 0.25+0.5c^{-1} \pm 0.25c^{-1}\sqrt{(c-2)^2-8c(c-2)\eta(1+2\eta)}$$

On a

$$-2cy^2-2(c-2)\eta^2+4y+c-3 = (c-2)(1+\eta-y)$$

Quand η parcourt $]0, 0.25(\sqrt{2(1-c^{-1})}-1)]$, y est réel et la fonction continue $1+\eta-y$ parcourt

$]0.5, 0.5-0.5c^{-1}+0.25\sqrt{2(1-c^{-1})}]$ si y est pris avec le signe + et

$[0.5-0.5c^{-1}+0.25\sqrt{2(1-c^{-1})}, 1-c^{-1}[$ si y est pris avec le signe -.

Avec $p \in]0,1]$, on répartit les c^2 vecteurs de dimension c qui suivent.

Dans E_j de proportion c^{-1}, une proportion $\frac{1-p}{c}$ d'individus portent $g_j = 1$, les autres $g_k = 0$, et pour chacun des $i \neq j$, une proportion $\frac{p}{c(c-1)}$ d'individus portent $g_j = y-\eta$, $g_i = y+\eta$, les autres $g_k = \frac{1-2y}{c-2}$ (si $c > 2$).

Des considérations algébriques rudimentaires et fastidieuses montrent que les (c-1) premières variables ainsi créées satisfont aux conditions du lemme et que

$$\sum_j \&(g_j^2) = 1-p(1+\eta-y)$$

Il y a mauvais classement quand, dans E_j, $g_j = y-\eta$, $g_i = y+\eta$, les autres $g_k = \frac{1-2y}{c-2}$. La probabilité d'erreur est donc p.

On procède alors au choix des paramètres η et p.

a) Si $v \in]0,0.5]$, on prend η positif arbitrairement petit, y avec le signe + et $p = v(1+\eta-y)^{-1}$.

$1+\eta-y$ est arbitrairement proche de 0.5, p est arbitrairement voisin de 2v et $\sum_j \&(g_j^2) = 1-v$.

b)Si $v \in]0.5, 0.5-0.5c^{-1}+0.25\sqrt{2(1-c^{-1})}]$, on prend y avec le signe + η tel que $1+\eta-y = v$ et $p = 1$.

c)Si $v \in]0.5-0.5c^{-1}+0.25\sqrt{2(1-c^{-1})}, 1-c^{-1}[$, on prend y avec le signe - η tel que $1+\eta-y = v$ et $p = 1$.

En ce qui concerne la borne inférieure, on prend $p = \frac{c-1+cv}{2(c-1)}$ qui est donc $\in]0.5,1[$

$a = v+(c-1-cv)\sqrt{vc^{-1}(c-1+cv)^{-1}}$

$b = v-\sqrt{vc^{-1}(c-1+cv)}$

Pour $j=1,2,\ldots c$, dans E_j, le vecteur dont la j^e composante est 1-a, les (c-1) autres $a(c-1)^{-1}$ apparaît en proportion pc^{-1} et le vecteur dont la j^e composante est 1-b, les autres $b(c-1)^{-1}$ apparaît en proportion $(1-p)c^{-1}$.

En notant que

$pa + (1-p)b = v$

$pa^2 + (1-p)b^2 = v(1-c^{-1})$,

l'algèbre élémentaire indique que les (c-1) premières variables ainsi créées respectent les conditions du lemme et que

$\sum_j \&(g_j^2) = 1-v$

Il n'y a aucune erreur de classement car

$a(c-1)^{-1} < 1-a$

$b(c-1)^{-1} < 1-b$

donc pr(m.c) peut atteindre 0.

* * *

Le coût de l'erreur qui confond deux catégories peut varier suivant les classes considérées. Il est donc intéressant d'avoir aussi un renseignement sur la probabilité de ce type de mauvais classement.

Si on utilise des $\hat{h}_j$ telles que $var(\varepsilon_k-\varepsilon_i) = v$ pour deux catégories spécifiées E_k et E_i, la fourchette de la probabilité d'attribuer un individu de E_k à E_i ou vice-versa est $[0,v]$.

Notons que $v \in [0,1]$ car

$$var(\varepsilon_k-\varepsilon_i) \leqslant (\sqrt{var(\varepsilon_k)}+\sqrt{var(\varepsilon_i)})^2 \leqslant (\sqrt{\pi_k(1-\pi_k)}+\sqrt{\pi_i(1-\pi_i)})^2$$
$$\leqslant (\sqrt{0.25}+\sqrt{0.25})^2 = 1$$

Par conséquent, si $v = 1$, la probabilité ci-dessus n'est pas définie puisqu'alors $\pi_k = \pi_i = 0.5$ et $\hat{h}_k(\vec{g}) = \hat{h}_i(\vec{g}) = 0.5$ pour presque tout $\vec{g}$.

Pour un individu de E_k assigné à E_i,

$$\varepsilon_k-\varepsilon_i = 1-\hat{h}_k+\hat{h}_i \geqslant 1$$

et pour un individu de E_i assigné à E_k,

$$\varepsilon_k-\varepsilon_i = -\hat{h}_k-1+\hat{h}_i \leqslant -1$$

L'indicatrice de ce double type d'erreur est inférieure ou égale à $(\varepsilon_k-\varepsilon_i)^2$. Le passage par la moyenne fournit un minorant 0 et un majorant v qui sont des bornes comme le montre l'exemple suivant pour $v \in [0,1[$.

Avec η arbitrairement petit en valeur absolue tel que

$$1-v > |\eta|(1+v)$$

soient

$$a = 1-v-\eta^2(1+v)$$
$$b = (1+2\eta)(1-v)+\eta^2(1+v)$$
$$d = 1-v+\eta(1+v)$$

Pour $j=1,2,\ldots(c-1)$, dans E_j, le vecteur $\vec{g}$ de dimension c tel que $g_j = 1$, les autres g_k nuls, apparaît en proportion $0.5(1-v)(c-1)^{-1}$; dans E_{c-1}, le vecteur tel que $g_{c-1} = 0.5(1-\eta)$, $g_c = 0.5(1+\eta)$, les autres nuls, apparaît en proportion $0.5v(1+\eta)^{-1}$; dans E_c enfin, le vecteur tel que $g_{c-1} = 0.5(1+\eta)$, $g_c = 0.5(1-\eta)$, les autres nuls, apparaît en proportion $0.5vab^{-1}(1+\eta)^{-1}$ et le vecteur tel que $g_{c-1} = v\eta d^{-1}$, $g_c = 1-v\eta d^{-1}$, les autres nuls, apparaît en proportion $0.5d^2b^{-1}$.

On montre que les variables respectent les conditions du lemme et que $var(\varepsilon_c-\varepsilon_{c-1}) = v$.

Si $\eta > 0$, E_c et E_{c-1} sont confondus en proportion

$0.5vab^{-1}(1+\eta)^{-1}+0.5v(1+\eta)^{-1} = v(1-v)b^{-1}$

quantité arbitrairement proche de v.

Si $\eta < 0$, il n'y a d'erreur d'aucune sorte.

Si on emploie des $\hat{h}_j$ telles que $var(\varepsilon_k-\varepsilon_i) = v$ pour deux classes spécifiées E_k et E_i, la fourchette de la probabilité d'attribuer un individu de E_k à E_i est $[0,(1+v^{-1})^{-1}]$

Quels que soient la variable g et l'ensemble A, la variance de g est supérieure ou égale à sa variance entre A et E-A, qui est

$pr(A)(\&(g/A)-\&(g))^2 + (1-pr(A))(\&(g/E-A)-\&(g))^2$

On en déduit

$$\frac{(\&(g/E-A)-\&(g))^2}{var(g)+(\&(g/E-A)-\&(g))^2} \leqslant pr(A) \leqslant \frac{var(g)}{var(g)+(\&(g/A)-\&(g))^2}$$

Appliquons la dernière inégalité à la variable $\varepsilon_k-\varepsilon_i$ et à l'ensemble A des individus de E_k qui portent $\hat{h}_i$ maximum.

Dans A,

$\varepsilon_k-\varepsilon_i = 1-\hat{h}_k+\hat{h}_i \geqslant 1$

donc

$\&(\varepsilon_k-\varepsilon_i/A) \geqslant 1$

alors que

$\&(\varepsilon_k-\varepsilon_i) = 0$

On obtient

$$pr(A) \leqslant \frac{var(\varepsilon_k-\varepsilon_i)}{var(\varepsilon_k-\varepsilon_i)+(\&(\varepsilon_k-\varepsilon_i/A)-\&(\varepsilon_k-\varepsilon_i))^2} \leqslant \frac{v}{1+v}$$

L'exemple précédent montre que la probabilité peut atteindre 0. Pour la borne supérieure concernant $v \in [0,1[$, soient η positif arbitrairement petit tel que

$1-v > \eta(c-2)(1-v)+(c-1)\eta^2$

$a = 1 + \eta$

$b = c + (c-2)v$

$d = 1 + (c-2)v.$

Pour $j=1,2,\ldots(c-2)$ (si $c > 2$), dans E_j de proportion $a(1-v)b^{-1}$, il y a le seul vecteur tel que $g_j = 1-v(1-v)a^{-1}b^{-1}$, $g_{c-1} = -vda^{-1}b^{-1}$, $g_c = v(c-1)a^{-1}b^{-1}$, les autres $g_k = -v(1-v)a^{-1}b^{-1}$; dans E_{c-1} de proportion adb^{-1}, il y a le seul vecteur tel que $g_k = -v(1-v)a^{-1}b^{-1}$ pour $k=1,2,\ldots(c-2)$, $g_{c-1} = 1-vda^{-1}b^{-1}$ et $g_c = v(c-1)a^{-1}b^{-1}$; dans E_c, le vecteur tel que $g_k = -v(1-v)a^{-1}b^{-1}$ pour $k=1,2,\ldots(c-2)$, $g_{c-1} = -vda^{-1}b^{-1}$ et $g_c = 1+v(c-1)a^{-1}b^{-1}$ apparaît en proportion $(1+va^{-2})^{-1}-a(c-1)b^{-1}$, et le vecteur tel que $g_k = a(1-v)b^{-1}$ pour $k=1,2,\ldots(c-2)$, $g_{c-1} = adb^{-1}$, $g_c = 1-a(c-1)b^{-1}$ apparaît en proportion $(1+a^2v^{-1})^{-1}$.

Les $(c-1)$ premières variables ainsi créées satisfont aux conditions du lemme et on a $var(\varepsilon_c-\varepsilon_{c-1}) = v$. Comme adb^{-1} est supérieur à $1-a(c-1)b^{-1}$ et $a(1-v)b^{-1}$, la probabilité d'attribuer un individu de E_c à E_{c-1} est celle du dernier vecteur, soit $(1+a^2v^{-1})^{-1}$ arbitrairement proche de $(1+v^{-1})^{-1}$.

Le fait que des probabilités n'atteignent pas leur borne provient visiblement de l'ambiguïté de l'attribution quand f_i n'est pas seul maximum. Ainsi, rien n'empêche de prendre $\eta = 0$ dans tous les exemples donnés jusqu'ici; $\sum_j \&(\tilde{h}_j^2) = r$, $\sum_j \&(\varepsilon_j^2) = v$ ou $var(\varepsilon_k-\varepsilon_i) = v$ sont conservés; mais la probabilité d'erreurs ne serait plus définie car il y aurait plusieurs f_j maxima.

* * *

Outre sa justification théorique comme meilleure approximation linéaire de la règle de Bayes et comme règle minimax au sein des prédictions linéaires, la procédure de $\hat{h}_j$ maximum a un aspect pratique extrêmement attractif. Elle rentre en effet dans le schéma général des régressions linéaires et, par conséquent, ne pose aucun problème de calcul.

Supposons plus précisément qu'on utilise un algorithme qui, en modifiant la matrice des covariances résiduelles, fait passer une variable de l'état de critère à celui de prédicteur. A chaque stade de la progression, on dispose de $cov(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$, ε_i étant le

résidu du i^e critère sur l'ensemble des explicateurs du moment.
L'objectif peut être alors d'obtenir

$$v = \sum_j \&(h_j - \hat{h}_j)^2 = \sum_j \mathrm{var}(\varepsilon_j)$$

aussi petit que possible.

Au départ, en l'absence de prédicteurs, $\hat{h}_j$ est π_j, donc

$$v = \sum_j \mathrm{var}(h_j) = \sum_j \pi_j(1-\pi_j).$$

A ce stade initial, il y a déjà une décision possible, moins absurde qu'il n'y paraît : elle consiste à attribuer n'importe quel individu à la classe la plus importante, en ignorant son $\vec{g}$.

A chaque stade, la méthode permet de diminuer v au mieux par

1) Adjonction de nouvelles variables prédictives.
Si on adjoint les variables g_1 pour $1 \in L$, v diminue de

$$\sum_{j=1}^{c} \vec{\sigma}_j' S^{-1} \vec{\sigma}_j \quad \text{où } S = [\mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_1)]_{i\in L, 1\in L} \text{ et } \vec{\sigma}_j = [\mathrm{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_j)]_{1\in L}$$

En effet, $\mathrm{var}(\varepsilon_j)$ devient $\mathrm{var}(\varepsilon_j) - \vec{\sigma}_j' S^{-1} \vec{\sigma}_j$.

2) Fusion de classes entre elles, si cette option est admise.
Si on agrège les catégories E_j pour $j \in J$, v devient

$$v + \sum_{\substack{j,k\in J \\ j\neq k}} \mathrm{cov}(\varepsilon_j, \varepsilon_k)$$

En effet, la régression linéaire de l'indicatrice $\sum_{j\in J} h_j$ de $\bigcup_{j\in J} E_j$ sur $\vec{g}$ est

$$(\sum_{j\in J} \pi_j) + (\sum_{j\in J} \pi_j)((\sum_{j\in J} \pi_j)^{-1} \sum_{j\in J} \pi_j \vec{\mu}_j - \vec{\mu})' V^{-1} (\vec{g} - \vec{\mu})$$

$$= \sum_{j\in J} (\pi_j + \pi_j(\vec{\mu}_j - \vec{\mu})' V^{-1} (\vec{g} - \vec{\mu})) = \sum_{j\in J} \hat{h}_j$$

donc $\sum_{j\in J} \varepsilon_j$ est le résidu correspondant à $\bigcup_{j\in J} E_j$.

Par le regroupement des E_j pour $j \in J$, $\sum_j \mathrm{var}(\varepsilon_j)$ devient donc

$$\sum_{j\notin J} \mathrm{var}(\varepsilon_j) + \mathrm{var}(\sum_{j\in J} \varepsilon_j) = \sum_j \mathrm{var}(\varepsilon_j) + \sum_{\substack{j,k\in J \\ j\neq k}} \mathrm{cov}(\varepsilon_j, \varepsilon_k)$$

On dispose ainsi d'un algorithme très souple qui permet de contrôler la borne supérieure de la probabilité totale d'erreurs. Dans les domaines médicaux et psychologiques en particulier, on a parfois affaire à des classifications assez contestables.

Une bonne stratégie serait de partir d'un classement fin, quitte à abandonner en route une part des différenciations primitives, au vu des maigres progrès obtenus par seule considération d'explicateurs quantitatifs.

Certes l'étude théorique a été faite au niveau strictement descriptif et les commentaires pratiques présents ne tiennent pas compte des aléas de l'échantillonnage. Mais on peut escompter qu'un échantillon de taille raisonnable fournirait de bonnes estimations des paramètres de la population.

Sans prétendre arriver aux meilleures solutions, on se contentera dans l'exemple numérique suivant de n'examiner chaque fois que

1) l'adjonction d'un seul prédicteur; on choisira parmi le jeu encore disponible la variable g_1 qui maximise
$var^{-1}(\varepsilon_1) \sum_{j=1}^{c} cov^2(\varepsilon_1, \varepsilon_j)$;

2) la réunion d'un couple de classes; on confondra E_k et E_i qui maximisent $-2\ cov(\varepsilon_k, \varepsilon_i)$.

Il est intéressant de noter que, ce faisant, on neutralise la distinction de deux catégories qui, par les derniers théorèmes, se discriminaient mal puisque
$var(\varepsilon_k - \varepsilon_i) = var(\varepsilon_k) + var(\varepsilon_i) - 2\ cov(\varepsilon_k, \varepsilon_i)$.

Malgré l'insuffisance notoire de l'effectif, l'exemple qui vient, réalisé sur une calculatrice de poche TI 59 avec le programme TISOFT 20591003, révèle les possibilités de la procédure. Il concerne un jeu de 5 prédicteurs possibles, 4 catégories primitives et 20 individus. Le critère d'arrêt est que la borne supérieure de la probabilité d'erreurs soit inférieure à 0.5, soit que $v < 0.25$. Cet objectif peut sembler bien lâche; mais les exemples théoriques précédents montrent assez que les extrémités des fourchettes ne sont approchées que dans les cas limites de distributions pathologiques qui ne sont pas rencontrées dans la réalité.

Pour passer des régressions de $g_k, \ldots g_w$, $h_1 = g_{w+1}, \ldots h_c = g_{w+c}$ sur $g_1, \ldots g_{k-1}$ aux régressions de $g_{k+1}, \ldots g_w, g_{w+1}, \ldots g_{w+c}$ sur

$g_1, \ldots g_{k-1}, g_k$, les formules bien connues sont, en termes des sommes de produits d'écarts SP_{ij} (covariances résiduelles multipliées par l'effectif) et pour $i=k+1, \ldots w+c$:

SP_{ki} devient $\beta_{ik} = SP_{ki} SP_{kk}^{-1}$,
α_i devient $\alpha_i - \beta_{ik}\alpha_k$,

β_{ij} devient $\beta_{ij} - \beta_{ik}\beta_{kj}$ pour $j=1,2,\ldots k-1$,

SP_{ij} devient $SP_{ij} - \beta_{ik} SP_{kj}$ pour $j=i, i+1, \ldots w+c$.

Les résultats sont présentés avec 3 décimales, bien que les calculs aient été exécutés avec 13 chiffres significatifs. L'indicatrice de la 4^e classe, redondante, n'a pas été introduite. Le tableau A des données individuelles est :

Individu	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	$g_6=h_1$	$g_7=h_2$	$g_8=h_3$
1	3	6	4	9	7	0	0	1
2	8	2	9	7	0	0	0	0
3	5	8	5	4	5	0	1	0
4	6	5	6	2	8	0	0	0
5	4	2	6	4	4	1	0	0
6	1	9	5	6	8	0	0	1
7	8	1	5	3	6	0	0	0
8	8	3	7	5	9	0	0	0
9	0	6	2	8	5	0	0	1
10	5	9	3	0	2	0	1	0
11	9	0	8	4	5	0	0	0
12	4	5	9	8	5	0	0	1
13	2	9	4	8	9	0	0	1
14	9	0	6	5	4	0	0	0
15	4	6	8	3	7	0	1	0
16	2	7	6	9	8	0	0	1
17	8	4	2	6	0	1	0	0
18	7	4	9	0	5	0	0	0
19	2	9	8	1	6	0	1	0
20	9	1	6	6	3	0	0	0

Le vecteur des μ_j et la matrice des SP_{ij} constituent le tableau B :

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
μ_j	5.2	4.8	5.9	4.9	5.3	0.1	0.2	0.3	0.4
SP_{1j}	163.2	-138.2	34.4	-45.6	-66.2	1.6	-4.8	-19.2	22.4
SP_{2j}		185.2	-39.4	-0.4	55.2	-3.6	12.8	13.2	-22.4
SP_{3j}			91.8	-27.2	8.6	-3.8	0.4	-5.4	8.8
SP_{4j}				151.8	15.6	0.2	-11.6	18.6	-7.2
SP_{5j}					132.2	-6.6	-1.2	10.2	-2.4
SP_{6j}						1.8	-0.4	-0.6	-0.8
SP_{7j}							3.2	-1.2	-1.6
SP_{8j}								4.2	-2.4
SP_{9j}									4.8

La dernière colonne, relative à $h_4 = g_9$, se trouve aisément à partir des trois précédentes :

$\mu_9 = \&(h_4) = 1-\&(h_1)-\&(h_2)-\&(h_3) = 1-\mu_6-\mu_7-\mu_8$

$SP_{i9} = -SP_{i6}-SP_{i7}-SP_{i8}$

A ce stade initial, $\sum_{j=6}^{9} SP_{jj}$ est 14, très supérieur au seuil fixé $0.25\times20 = 5$. En prenant g_1 comme premier prédicteur, $\sum_{j=6}^{9} SP_{jj}$ diminuerait de

$SP_{11}^{-1} \sum_{j=6}^{9} SP_{1j}^2 = 163.2^{-1}(1.6^2+4.8^2+19.2^2+22.4^2) = 5.490$

Pour g_2, g_3, g_4, g_5, il s'agirait respectivement de 4.605, 1.320, 3.507, 1.171.

En fusionnant E_1 et E_2, $\sum_{j=6}^{9} SP_{jj}$ diminuerait de $-2\ SP_{67} = 0.8$. Pour $E_1 \cup E_3$, $E_1 \cup E_4$, $E_2 \cup E_3$, $E_2 \cup E_4$, $E_3 \cup E_4$, il s'agirait respectivement de 1.2, 1.6, 2.4, 3.2 et 4.8.

On est amené à faire entrer g_1 au titre de premier prédicteur, ce qui fait descendre $\sum_{j=6}^{9} SP_{jj}$ à 8.510. Par les formules ci-dessus, le tableau B devient le tableau C :

j	2	3	4	5	6	7	8	9
α_j	9.203	4.804	6.353	7.409	0.049	0.353	0.912	-0.314
β_{j1}	-0.847	0.211	-0.279	-0.406	0.010	-0.029	-0.118	0.137
SP_{2j}	68.170	-10.270	-39.015	-0.859	-2.245	8.735	-3.059	-3.431
SP_{3j}		84.549	-17.588	22.554	-4.137	1.412	-1.353	4.078
SP_{4j}			139.059	-2.897	0.647	-12.941	13.235	-0.941
SP_{5j}				105.347	-5.951	-3.147	2.412	6.686
SP_{6j}					1.784	-0.353	-0.412	-1.020
SP_{7j}						3.059	-1.765	-0.941
SP_{8j}							1.941	0.235
SP_{9j}								1.725

Maintenant, en prenant g_2, g_3, g_4, g_5 comme prédicteur supplémentaire ou en faisant $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cup E_3$, $E_1 \cup E_4$, $E_2 \cup E_3$, $E_2 \cup E_4$, $E_3 \cup E_4$, $\sum_{j=6}^{9} SP_{jj}$ diminuerait respectivement de 1.503, 0.444, 2.473, 0.910 ou 0.706, 0.824, 2.039, 3.529, 1.882, -0.471. Le meilleur choix est de réunir E_2 et E_3, ce qui atteint l'objectif :

$\sum_j SP_{jj}$ devient 4.980.

Les paramètres de

$g_{(78)} = g_7 + g_8 = h_2 + h_3$

sont obtenus par les formules générales de fusion de E_k et E_i :

$\alpha_{(ki)} = \alpha_k + \alpha_i \qquad \beta_{(ki)1} = \beta_{k1} + \beta_{i1}$

$SP_{(ki)1} = SP_{k1} + SP_{i1}$ si $1 \neq k, i$

$SP_{(ki)(ki)} = SP_{kk} + SP_{ii} + 2SP_{ki}$

La partie droite du tableau C devient :

j	6	78	9
α_j	0.049	1.265	-0.314
β_{j1}	0.010	-0.147	0.137
SP_{2j}	-2.245	5.676	-3.431
SP_{3j}	-4.137	0.059	4.078
SP_{4j}	0.647	0.294	-0.941
SP_{5j}	-5.951	-0.735	6.686
SP_{6j}	1.784	-0.765	-1.020
$SP_{(78)j}$		1.470	-0.706
SP_{9j}			1.725

Avec les régressions

$\hat{h}_1 = 0.049 + 0.010\ g_1$

$\hat{h}_{(23)} = 1.265 - 0.147\ g_1$

$\hat{h}_4 = -0.314 + 0.137\ g_1$,

les vingt individus sont bien reclassés sauf les deux de E_1 qui obtiennent :

	$\hat{h}_1$	$\hat{h}_{(23)}$	$\hat{h}_4$
n°5	0.088	0.676	0.235
n°17	0.127	0.088	0.784

Essayons d'autres solutions en introduisant d'abord la seconde meilleure variable prédictive g_2. Le tableau B devient le tableau D :

j	1	3	4	5	6	7	8	9
α_j	8.782	6.921	4.910	3.869	0.193	-0.132	-0.042	0.981
SP_{1j}	60.072	4.999	-45.898	-25.009	-1.086	4.752	-9.350	5.685
β_{j2}	-0.746	-0.213	-0.002	0.298	-0.019	0.069	0.071	-0.121
SP_{3j}		83.418	-27.285	20.343	-4.566	3.123	-2.592	4.035
SP_{4j}			151.799	15.719	0.192	-11.572	18.629	-7.248
SP_{5j}				115.747	-5.527	-5.015	6.266	4.276
SP_{6j}					1.730	-0.151	-0.343	-1.235
SP_{7j}						2.315	-2.112	-0.052
SP_{8j}							3.259	-0.803
SP_{9j}								2.091

On vérifie que $\sum_{j=6}^{9} SP_{jj} = 14-4.605 = 9.395$. La meilleure décision ultérieure est de fondre E_2 et E_3, ce qui transforme la partie droite du tableau D en :

j	6	78	9
α_j	0.193	-0.174	0.981
SP_{1j}	-1.086	-4.598	5.685
β_{j2}	-0.019	0.140	-0.121
SP_{3j}	-4.566	0.531	4.035
SP_{4j}	0.192	7.056	-7.248
SP_{5j}	-5.527	1.251	4.276
SP_{6j}	1.730	-0.495	-1.235
$SP_{(78)j}$		1.350	-0.855
SP_{9j}			2.091

Les pertes apportées à $\sum_j SP_{jj}$ respectivement par l'adjonction de g_1, g_3, g_4, g_5 et les réunions $E_1 \cup (E_2 \cup E_3)$, $E_1 \cup E_4$, $(E_2 \cup E_3) \cup E_4$ sont 0.910, 0.449, 0.674, 0.435 et 0.989, 2.471, 1.711. Après l'agrégation de E_1 et E_4, la partie droite du tableau D est

j	69	78
α_j	1.174	-0.174
SP_{1j}	4.598	-4.598
β_{j2}	-0.140	0.140
SP_{3j}	-0.531	0.531
SP_{4j}	-7.056	7.056
SP_{5j}	-1.251	1.251
$SP_{(69)j}$	1.350	-1.350
$SP_{(78)j}$		1.350

Puisque $\sum_j SP_{jj} = 2.700$, le seuil est largement dépassé. Les régressions appliquées aux données donnent une seule erreur pour l'individu n° 4 de $E_1 \cup E_4$:

$\hat{h}_{(14)} = 0.472 \qquad \hat{h}_{(23)} = 0.528$

Si, après la considération du prédicteur g_2, on refuse de confondre E_2 et E_3, on sera amené à adjoindre la variable g_4. Le tableau D devient le tableau E :

j	1	3	5	6	7	8	9
α_j	10.267	7.804	3.361	0.187	0.243	-0.645	1.215
SP_{1j}	46.194	-3.251	-20.256	-1.028	1.253	-3.717	3.493
β_{j2}	-0.747	-0.213	0.298	-0.019	0.069	0.072	-0.121
SP_{3j}		78.514	23.169	-4.531	1.043	0.757	2.732
β_{j4}	-0.302	-0.180	0.104	0.001	-0.076	0.123	-0.048
SP_{5j}			114.120	-5.547	-3.817	4.337	5.027
SP_{6j}				1.730	-0.137	-0.367	-1.226
SP_{7j}					1.433	-0.692	-0.604
SP_{8j}						0.973	0.086
SP_{9j}							1.745

L'objectif n'est pas encore atteint car $\sum_{j=6}^{9} SP_{jj} = 5.881$. Il s'impose alors de réunir E_1 et E_4, ce qui change la partie de droite du tableau E en :

j	69	7	8
α_j	1.402	0.243	-0.645
SP_{1j}	2.465	1.253	-3.717
β_{j2}	-0.140	0.069	0.072
SP_{3j}	-1.800	1.043	0.757
β_{j4}	-0.046	-0.076	0.123
SP_{5j}	-0.520	-3.817	4.337
$SP_{(69)j}$	1.022	-0.741	-0.281
SP_{7j}		1.433	-0.692
SP_{8j}			0.973

$\sum_j SP_{jj} = 3.428$ tombe en-dessous de 5. Les régressions reclassent bien tous les individus dans $E_1 \cup E_4$, E_2 et E_3.

On peut enfin désirer garder distinctes les quatre classes. Après g_2 et g_4, on adjoindra successivement g_5 et g_1, ce qui transforme le tableau E en :

j	3	6	7	8	9
α_j	6.902	0.864	0.208	-0.021	-0.051
β_{j1}	0.020	-0.047	0.014	-0.069	0.103
β_{j2}	-0.260	-0.038	0.088	0.012	-0.063
SP_{3j}	73.792	-3.364	1.806	-0.064	1.622
β_{j4}	-0.195	-0.007	-0.069	0.099	-0.023
β_{j5}	0.207	-0.057	-0.031	0.026	0.062
SP_{6j}		1.365	-0.295	-0.295	-0.775
SP_{7j}			1.298	-0.507	-0.495
SP_{8j}				0.604	0.198
SP_{9j}					1.072

Puisque $\sum_j SP_{jj} = 4.339$, le seuil est dépassé. Les régressions

$$\hat{h}_1 = 0.864 - 0.047\, g_1 - 0.038\, g_2 - 0.007\, g_4 - 0.057\, g_5$$

$$\hat{h}_2 = 0.208 + 0.014\, g_1 + 0.088\, g_2 - 0.069\, g_4 - 0.031\, g_5$$

$$\hat{h}_3 = -0.021 - 0.069\, g_1 + 0.012\, g_2 + 0.099\, g_4 + 0.026\, g_5$$

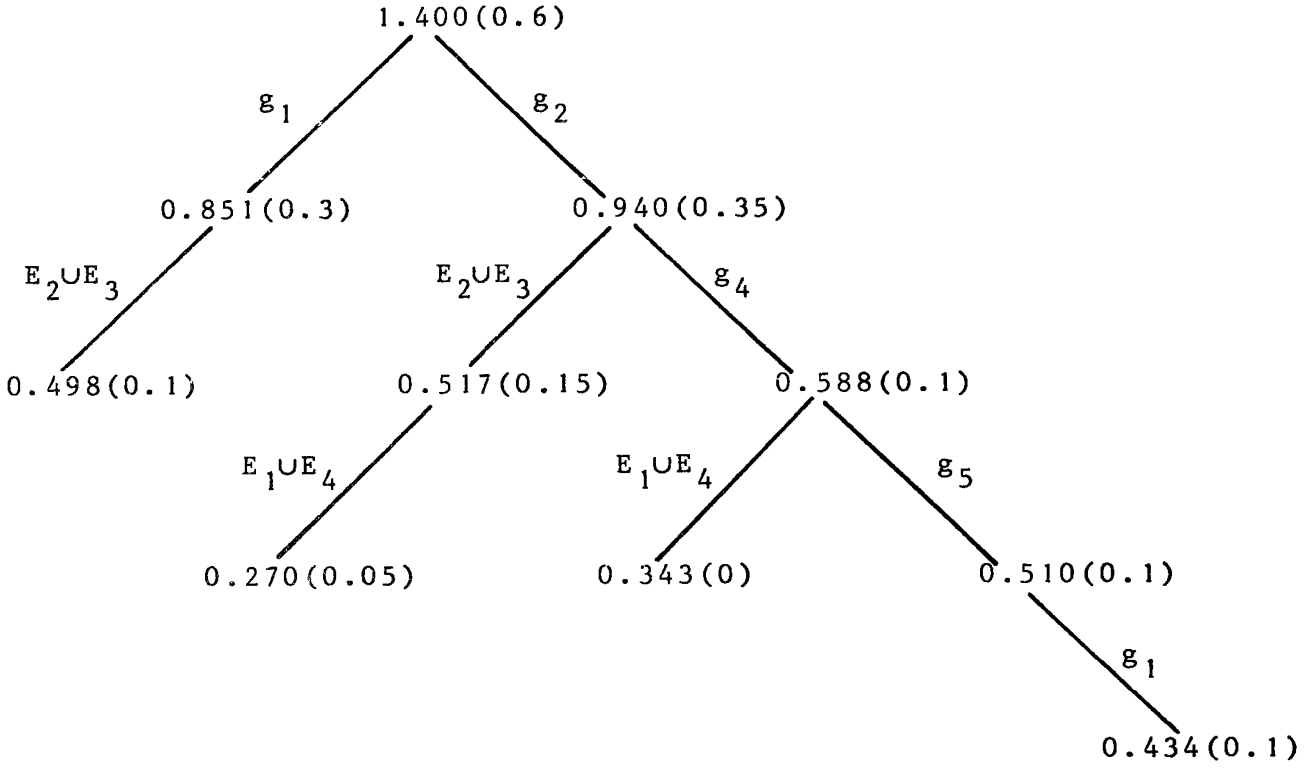
$$\hat{h}_4 = -0.051 + 0.103\, g_1 - 0.063\, g_2 - 0.023\, g_4 + 0.062\, g_5$$

font commettre deux erreurs sur les vingt données. Elles attribuent les deux individus de E_1 à E_4 :

	$\hat{h}_1$	$\hat{h}_2$	$\hat{h}_3$	$\hat{h}_4$
n°5	0.343	0.039	0.226	0.392
n°17	0.292	0.256	0.069	0.383

Cette mauvaise discrimination entre E_1 et E_4 est manifestée par la forte valeur persistante de $-SP_{69}$.

Les différentes solutions envisagées sont présentées dans l'arbre suivant où la cote d'un sommet est $2 \sum_j var(\varepsilon_j) = 0.1 \sum_j SP_{jj}$. et le nombre entre parenthèses le taux d'erreur obtenu en reclassant les vingt individus selon les régressions correspondantes.



* * *

Les résultats de [Heuchenne] concernent une dichotomie et sont résumés comme suit.

La probabilité d'attribuer un individu de E_1 à E_2 (resp. de E_2 à E_1) est notée p_1 (resp. p_2); la probabilité totale d'erreurs est $p = p_1 + p_2$.

Dans l'ensemble des distributions pour lesquelles π_1 et ρ^2 (ou $\text{var}(\varepsilon_1) = \text{var}(\varepsilon_2) = \pi_1\pi_2(1-\rho^2)$) sont donnés, q désigne la valeur attendue de p. Les fourchettes de p_1, p_2 et p concernent ce même ensemble.

Soit

$$a = \frac{\pi_1\pi_2\ \rho^2(1-\rho^2)}{0.25-\pi_1\pi_2(1-\rho^2)^2}$$

1) si $\pi_1^{-1} \leqslant 2(1-\rho^2) \leqslant \pi_2^{-1}$, $q = \pi_2$ et les fourchettes de p_1, p_2, p sont respectivement $[0,a]$, $[\pi_2-a,\pi_2]$, $[\pi_2-a,\pi_2+a]$.

2) Si $2(1-\rho^2) \leqslant \inf\{\pi_1^{-1},\pi_2^{-1}\}$, $q = 2\pi_1\pi_2(1-\rho^2)$, la fourchette de p_1 et p_2 est $[0,a]$, la fourchette de p est $[0,4\pi_1\pi_2(1-\rho^2)]$.

3) Si $\pi_2^{-1} \leqslant 2(1-\rho^2) \leqslant \pi_1^{-1}$, $q = \pi_1$ et les fourchettes de p_1, p_2, p sont respectivement $[\pi_1-a,\pi_1]$, $[0,a]$, $[\pi_1-a,\pi_1+a]$.

En tenant compte de ce que a, toujours inférieur à π_1 et π_2, atteint un maximum

$$\frac{1-\rho^2}{2-\rho^2} = \frac{4\ \text{var}(\varepsilon_1)}{1+4\ \text{var}(\varepsilon_1)}$$

pour $\pi_1 = \pi_2 = 0.5$, on peut voir que ces énoncés sont (évidemment) compatibles avec les précédents. Ils sont cependant plus précis parce qu'ils font intervenir explicitement les probabilités a priori π_1 et π_2. Pour $c > 2$, cela ouvre les questions :

1) Comment améliorer les fourchettes si l'on tient compte des π_j ?

2) Avec ou sans cette information, pourrait-on définir une probabilité attendue d'erreurs ? S'il se révélait que cette dernière est fonction croissante de $\sum_j \&(\varepsilon_j^2)$, on pourrait parler de la meilleure procédure linéaire en moyenne sans hypothèse distributionnelle.

3) Quelle est la fourchette de la probabilité d'attribuer un individu de $\bigcup_{k\in K} E_k$ à $\bigcup_{j\in J} E_j$ si $K \cap J = \emptyset$? En ce sens, nous

n'avons pu obtenir que des résultats très partiels et peu satisfaisants.

L'auteur se propose, dans un prochain travail, de comparer numériquement sur des données réelles la méthode proposée à des concurrentes (analyse factorielle discriminante, règle de Bayes en multinormalité,...).

* * *

C.Heuchenne. *La meilleure discrimination linéaire sans hypothèse distributionnelle ?* Bull.Soc.Sc.Liège, 49, 3-4, 1980, pp.128-143.

C.R.Rao. *Linear statistical inference and its applications.* Wiley, 1973.