STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

GÉRARD GRANCHER
DOMINIQUE FOURDRINIER

Puissance locale de tests de rang pour la comparaison d'échantillons discrets

Statistique et analyse des données, tome 5, nº 2 (1980), p. 15-29.
<http://www.numdam.org/item?id=SAD_1980__5_2_15_0>

Statistique et Analyse des Données
2 - 1980 pp. 15-30

PUISSANCE LOCALE DE TESTS DE RANG POUR LA COMPARAISON D'ECHANTILLONS DISCRETS

Gérard GRANCHER et Dominique FOURDRINIER

Laboratoire de Mathématiques
Université de Rouen
BP 67 76130 Mont-Saint-Aignan

INTRODUCTION

L'existence et la mise en oeuvre de tests de rang localement de plus forte puissance pour tester l'identité des lois de plusieurs échantillons à valeurs numériques sont bien connues, dans le cas où ces lois sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, et où elles se déduisent les unes aux autres par des translations d'amplitude inconnue mais de sens connu (ce quèon appelle une hypothèse de tendance sur les échantillons). On peut trouver par exemple ces résultats dans l'ouvrage de Hajek et Šidak ([4], II 4).

L'objet de cette étude (qui nous a été proposée par J.P Raoult dans le cadre des travaux de statistique non-paramétrique menés au Laboratoire de Mathématiques de L'Université de Rouen) est de réaliser une étude analogue pour des lois discrètes (et plus précisément de support fini) sur un espace totalement ordonné. En fait pour donner un équivalent à l'hypothèse de tendance de Hajek et Šidak nous avons dû ici (où la notion de translation n'a peut-être pas de sens) supposer que les supports des différentes lois en jeu se déduisent les unes des autres par des applications strictement croissantes dont les "positions" respectives sont bien connues ; en particulier, cela nous a imposé de supposer que les supports des probabilités en jeu ont tous même cardinal : de plus les calculs numériques n'ont été menés à terme que dans le cas où toutes ces probabilités sont uniformes sur leurs supports.

AMS 1970 Subjet classification : Primary 62G30 Secondary 62E15
Mots clés : Test de rang, Puissance Locale, Dénombrements de Permutations.

1 - CADRE DE NOTRE ETUDE :

On considère I expériences indépendantes réalisées sur un même ensemble noté Ω. On suppose que Ω est muni d'une structure d'ordre total, en général Ω est une partie de $\mathbb{R}$.

Une observation est donc un élément de $\Omega^{\mathfrak{I}}$ où $\mathfrak{I}$ est l'ensemble des expériences et card $\mathfrak{I}$ = I.

Soit Θ l'ensemble des paramètres.

On suppose que ces I expériences sont regroupées en T types $(T\geq 2)$ de telle sorte que toutes les expériences de même type soient régies par une même probabilité. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des types (T = card $\mathcal{T}$). On suppose que $\mathcal{T}$ est muni d'un ordre total. Les types d'expériences représentent les différents échantillons dans le cas d'échantillons multiples.

Pour chaque expérience $i(\in\mathfrak{I})$, on note $\tau(i)$ son type.

Pour tout élément $t(\in\mathcal{T})$, on définit N_t par : $N_t = \text{card } \tau^{-1}(\{t\})$; on a donc $\sum_{t\in\mathcal{T}} N_t = I$.

On suppose que l'hypothèse de tendance ci dessous est vérifiée :

Il existe une probabilité discrète P_o sur Ω, de support noté S_o, et, pour tout $\theta(\in\Theta)$ et pour tout $t(\in\mathcal{T})$, une application $h_{\theta,t}$ de S_o dans Ω, strictement croissante, de telle sorte que :

- pour tout $x(\in S_o)$ et tout $\theta(\in\Theta)$ l'application $t\rightsquigarrow h_{\theta,t}(x)$ est croissante,
- $h_{\theta,t}(P_o)$ est la probabilité qui régit les observations de type t quand θ est la valeur du paramètre.

On note V = card S_o.

On note pour tout (θ,t), $S_{\theta,t} = h_{\theta,t}(S_o)$, qui vérifie card $S_{\theta,t}= V$; on remarque que, pour tout θ, la probabilité P_θ qui régit l'observation (dans $\Omega^{\mathfrak{I}}$) est donnée par

$P_\theta = \prod_{i\in\mathfrak{I}} h_{\theta,\tau(i)}(P_o)$ et est concentrée sur $\prod_{i\in\mathfrak{I}} S_{\theta,\tau(i)}$.

On a donc

$(\forall i\in\mathfrak{I})\ (\forall x\in S_o)\quad P_\theta\left[\xi(i) = h_{\theta,\tau(i)}(x)\right] = P_o(\{x\})$.

On se propose de tester l'hypothèse nulle H_o définie par $H_o = \{\theta\in\Theta/\forall(t,t')\in\mathcal{T}^2\ h_{\theta,t} = h_{\theta,t'}\}$ à l'aide de tests de rang. Mais dans le cadre qui nous intéresse il y a possibilité d'observation d'exaequo. Nous allons donc devoir préciser cette notion de test de rang.

2 - TESTS DE RANG

Pourtout entier strictement positif K, on note Σ_K l'ensemble des applications surjectives de $\mathfrak{I}$ dans $\{1,2,\ldots\ldots,K\}$ (en particulier Σ_I est donc en bijection avec le groupe de permutations $\mathfrak{S}_I$) et $\mathcal{F}_K(S_o)$ l'ensemble des suites de longueur K, strictement croissantes, dans S_o

On note par ailleurs $\Lambda = \bigcup_{1\leq K\leq I} \Sigma_K$

2.1 Définition des tests de rang

$\mathcal{P}(\Sigma_I)$ désignant l'ensemble des parties de Σ_I, on note ρ l'application rangement, de $\Omega^{\mathfrak{I}}$ dans $\mathcal{P}(\Sigma_I)$ définie par :

$$(\forall\xi\in\Omega^{\mathfrak{I}})\quad \rho(\xi) = \{\sigma\in\Sigma_I /\ \forall(i,j)\in\mathfrak{I}^2\ \xi(i) > \xi(j) \Rightarrow \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

Les éléments de $\rho(\xi)$ sont dits les rangements compatibles avec l'observation ξ (ce sont tous les rangements possibles des I expériences selon l'ordre croissant de leurs résultats dans l'observation ξ).

On note γ l'application classement, de $\Omega^{\mathfrak{J}}$ dans Λ , définie par :
$(\forall\xi \in \Omega^{\mathfrak{J}})$ $(\forall i \in \mathfrak{J})$ $[\gamma(\xi)](i) = \text{card} \ \{x \in \xi\,(i) \ ; \ x \leq \xi\,(i)\}$;
on remarque que les données de $\rho(\xi)$ et $\gamma(\xi)$ sont équivalentes (c'est à dire qu'il existe une application bijective de $\mathcal{P}(\Sigma_I)$ sur Λ , χ, telle que $\gamma = \chi o \rho$).

Un test (c'est à dire une transition de probabilité Ψ , de $\Omega^{\mathfrak{J}}$ vers l'ensemble, à deux éléments, des décisions où pour tout ξ, $\Psi(\xi)$ désigne la probabilité qui régit la décision prise, quand on a observé ξ) est dit test de rang si $\Psi(\xi)$ ne dépend que de $\rho(\xi)$ (où, ce qui est équivalent, de $\gamma(\xi)$).

On remarque que la suite des masses des points de $S_{\theta,t}$, telles qu'on les rencontre quand on parcourt $S_{\theta,t}$ en croissant, ne dépend ni de θ, ni de t puisque c'est la suite des masses des points de S_o, telles qu'on les rencontre quand on parcourt S_o en croissant ; donc la loi de ρ(et de γ) sous θ ne dépend que des positions relatives des différents supports $S_{\theta,t}$. En particulier, les lois de ρ(et de γ) sont communes pour toutes les valeurs θ appartenant à H_o.

2.2 Alternative locale

On appelle <u>proximité</u> de H_o, l'ensemble, noté $\hat{H}$, des éléments θ de Θ tels que pour tout couple (x_1, x_2) d'éléments de S_o et pour tout couple (t_1, t_2) d'éléments de $\mathcal{T}$, on ait :

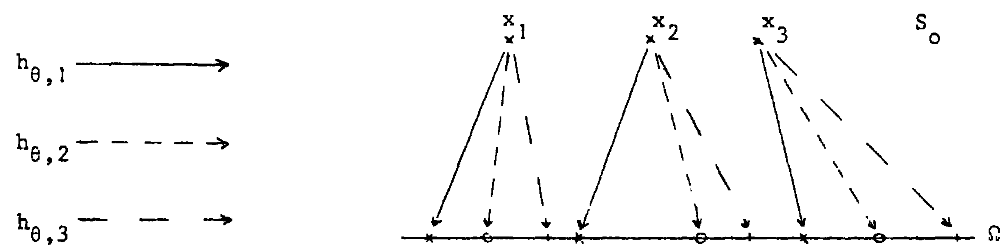
$$(x_1 < x_2 \text{ et } t_1 < t_2) \Rightarrow h_{\theta,t_2}(x_1) < h_{\theta,t_1}(x_2).$$

On pose $H' = \hat{H} - H_o$: on appelle H' l'alternative locale.

On suppose de plus que l'hypothèse de tendance stricte est vérifiée, c'est à dire que, pour tout élément θ de H', et tout élément x de S_o, l'application $t \rightsquigarrow h_{\theta,t}(x)$ est strictement croissante.

On remarque que, dans ces conditions, l'alternative locale correspond à l'ensemble des paramètres θ ($\in \Theta$) tels que les probabilités $h_{\theta,t}(P_o)$ (t parcourant $\mathcal{T}$) soient toutes décalées les unes par rapport aux autres, ce décalage étant le "plus faible" possible, en ce sens qu'il ne va pas juqu'au "croisement" entre les images de points de S_o.

exemple : cas où $\theta \in H'$



On a montré en [2] que l'on pouvait généralement munir Θ d'une topologie telle que $\hat{H}$ soit un voisinage de H_o ; H' justifie donc parfaitement son nom.

Pour tout $\theta(\in H')$, les positions relatives des supports de $S_{\theta,t}$ ($t \in \mathcal{T}$) sont constantes ; donc les lois de ρ(et de γ) sont communes pour toutes les valeurs de θ appartenant à H' (on trouvera une démonstration détaillées de ces propriétés de "liberté" (parameter-free) de(ρ et γ) en [3]).

Il en résulte que la recherche d'un test de rang de niveau α pour tester H_o contre H'se ramène à un problème de test d'hypothèse simple contre alternative simple ; il existe donc, d'après le théorème de Neyman-Pearson un test de plus forte puissance parmi les tests de rang de niveau α pour le problème d'hypothèse nulle H_o et d'alternative H'.

Autrement dit, il existe un test localement de plus forte puissance (en abrégé LMP) parmi les tests de rang de niveau α pour le problème d'hypothèse nulle H_o et d'alternative H'.

Pour déterminer un tel test, il suffit de calculer les lois de γ sous l'hypothèse nulle et sous l'alternative locale.

2.3. Lois du classement

Il est clair que, sous H_o, la probabilité d'observation d'un classement $\lambda(\in \Lambda)$ ne dépend que de sa "suite de plateaux", c'est-à-dire de la suitedes tailles des groupes d'ex-aequo tels qu'on les rencontre en parcourant les résultats rangés par ordre croissant. Plus précisément, si λ est de longueur K (c'est-à-dire comprend K groupes d'ex-aequo), si on note $\mathcal{S}_K(S_o)$ l'ensemble des suites de longueur K, strictement croissantes, dans S_o, et $(l_K)_{1\le k\le K}$ la suite de plateaux de λ (on a donc $\sum_{1\le k\le K} l_k = I$), on a, pour tout $\theta_o(\in H_o)$

$$(1)\quad P_{\theta_o}\left[\gamma = \lambda\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } K > \operatorname{card} S_o \\ \displaystyle\sum_{(x_1,\ldots,x_K)\in \mathcal{S}_K(S_o)} \prod_{k=1}^{K} P_o(\{x_k\})^{l_k} & \text{si } K \le \operatorname{card} S_o \end{cases} ;$$

dans le cas particulier où P_o est une probabilité uniforme discrète, il vient, si $K \le \operatorname{card} S_o$ et $V = \operatorname{card} S_o$

$$(1')\qquad P_{\theta_o}\left[\gamma = \lambda\right] = \left(\frac{1}{V}\right)^I \binom{V}{K} \qquad \left(\text{où } \binom{V}{K} = V\,!\ /\ K\,!\ (V-K)\,!\ \right)$$

On remarque que, sous l'alternative locale, les supports des probabilités régissant des expériences de types différents sont tous distincts et que donc il n'y a dans une observation ξ pas d'ex-aequo entre les résultats d'expériences de types différents ; autrement dit le classement, λ, associé à ξ vérifie les conditions suivantes (où K désigne la longueur λ) :

- pour tout k ($\in \{1,2,\ldots,K\}$), il existe un élément de $\mathcal{T}$ noté $\bar{\tau}(k)$ qui est le type commun de tous les éléments de $\lambda^{-1}(k)$,
- pour tout t, $\displaystyle\sum_{\bar{\tau}(k)=t} \operatorname{card} \lambda^{-1}(k) = N_t$ $(= \operatorname{card} \tau^{-1}(t))$;

un classement vérifiant ces conditions est dit τ-régulier, et on appellera typologie de λ la suite $(\bar{\tau}\,(k);\ 1\le k\le K)$.

Il est clair que sous l'hypothèse alternative locale, les expériences de même type étant indépendantes et de même loi, la probabilité d'observation de $\lambda(\in \Lambda)$ est nulle si λ n'est pas τ - régulier, et ne dépend que la typologie τ de λ quand λ est τ - régulier ; cette probabilité est donnée par la formule (2) ci-dessus (dont on trouvera une démonstration dans [3]).

Soit λ un élément de Λ τ - régulier, et soit $(l_k)_{1\le k\le K}$ sa suite de plateaux soit $\mathcal{M} = \{ k \in \{1,2,\ldots,K-1\} \; ; \; \bar{\tau}(k) \geq \bar{\tau}(k+1)\}$; $\mathcal{M}$ est appelé l'ensemble des points de montée de λ ; on pose $M = \text{card}\,\mathcal{M}$. Alors pour tout $\theta (\in H')$, on a :

$$(2) \quad \left[\begin{array}{l} P_\theta \left[\gamma = \lambda\right] = \\ \displaystyle\sum_{M \leq B \leq \inf(K,V)} \; \sum_{\substack{\mathcal{M} \subset \beta \subset \{1,\ldots,k-1\} \\ \text{card}\,\beta = B-1}} \; \sum_{(y_1,\ldots,y_B) \in \mathcal{J}_B(S_o)} \; \prod_{c=1}^{B} P_o(\{y_c\})^{1_{\beta,c}} \end{array} \right.$$

où, si $\beta = \{b_1,\ldots,b_{B-1}\}$ avec $b_1 < b_2 < \ldots < b_{B-1}$, $b_o = 0$ et $b_B = K$, on pose

$$1_{\beta,c} = \sum_{b_{c-1} < k \leq b_c} 1_k .$$

On remarque que, si $\theta \in H'$, $P_\theta\left[\gamma = \lambda\right]$ ne dépend que de la longueur de λ, de sa suite de plateaux et de sa typologie ; dans le cas où P_o est la probabilité uniforme sur S_o, $P_\theta\left[\gamma = \lambda\right]$ (où $\theta \in H'$) ne dépend que de la longueur de λ et du cardinal M de son ensemble de points de montée ; en effet il vient alors :

$$(2') \qquad P_\theta\left[\gamma = \lambda\right] = \left(\frac{1}{V}\right)^I \sum_{M \leq B \leq \inf(K,V)} \binom{K-1-M}{K-B} \binom{V}{B}$$

2.4 Test de description :

A tout λ ($\in \Lambda$), de longueur K, associons la famille $\Delta(\lambda)$ définie par :

$\Delta(\lambda) = (\text{card}\,\{i \in \mathfrak{I} \; ; \; \lambda(i) = k \text{ et } \tau(i) = t\} \; ; \; (k,t) \in \{1,\ldots,K\} \times \mathcal{T})$;

si λ est le classement de $\xi (\in \Omega^{\mathfrak{I}})$, on dit que $\Delta(\lambda)$ est la τ-description ordonnée (ou, plus simplement, la description) de ξ, on la note Des (ξ).

Soit, par exemple, $\mathfrak{I} = \{a,b,c,d,e,f,g\}$, $\mathcal{T} = \{1,2,3\}$ et τ défini par $\tau(a) = \tau(b) = 1$; $\tau(c) = \tau(d) = 2$, $\tau(e) = \tau(f) = \tau(g) = 3$; soit d'autre part l'observation ξ définie par le tableau suivant :

i	a	b	c	d	e	f	g
$\xi(i)$	12	-4	-4	3	0	3	3

alors Des (ξ) est donné par le tableau suivant :

t \ K	1	2	3	4
1	1	0	0	1
2	1	0	1	0
3	0	1	2	0

De manière plus générale, si on note Des $(\xi) = (d_{k,t} ; (k,t) \in \{1,\ldots,K\} \times \mathcal{T})$, on a nécessairement, pour t élément de $\mathcal{T}$, $\displaystyle\sum_{1 \leq k \leq K} d_{k,t} = N_t$, et, pour tout $k (1 \leq k \leq K)$, $\displaystyle\sum_{t \in \mathcal{T}} d_{k,t} = 1_k$, où $(1_k\ ;\ 1\le k\le K)$ est la suite de plateaux de ξ.

On remarque que λ est régulier (au sens introduit ci-dessus) si et seulement si, pour tout k, il existe un unique t tel que $d_{k,t}$ soit égal à 1_K (et on a alors pour tout autre t', $d_{k,t'} = 0$) ; cette valeur t est ce que nous avons noté $\bar{\tau}(k)$).

Il résulte, des études faites en 2.3. et 2.4 que pour tout $\lambda(\in\Lambda)$ les probabilités d'observation de λ sous l'hypothèse nulle et sous l'alternative locale ne dépendent que de $\Delta(\lambda)$. Si on appelle test de description tout test qui factorise à travers l'application Des, on en déduit qu'il existe un test de description qui est localement de plus forte puissance au niveau α parmi les tests de rang.

Soit Φ l'ensemble des applications φ de $\{1,\dots,I\}$ dans $\mathcal{J}$ vérifiant, pour tout $t(\in\mathcal{T})$, $\operatorname{card}\varphi^{-1}(t) = N_t$; étant donné une observation, on dira que φ $(\in\Phi)$ est une τ - situation (ou, plus simplement, une <u>situation</u>) compatible avec ξ si et seulement si, il existe σ , rangement , compatible avec ξ, tel que $= \tau \circ \sigma^{-1}$. On notera Sit (ξ) l'ensemble des situations compatibles avec ξ ; pratiquement φ appartient à Sit(ξ) si φ est la suite des types des expériences, tels qu'on les rencontre quand les expériences sont classées selon un rangement compatible avec ξ (si on reprend l'exemple ci-dessus, Sit (ξ) se compose des 6 situations suivantes :
(1,2,3,2,3,3,1), (1,2,3,3,2,3,1), (1,2,3,3,3,2,1)
(2,1,3,2,3,3,1), (2,1,3,3,2,3,1), (2,1,3,3,3,2,1).)

On remarque que les données de Des (ξ) et Sit (ξ) sont équivalentes, et que donc on peut parler de manière équivalente, de <u>test de situation</u> ou de <u>test de description</u>.

2.5Mise en oeuvre du test de rang localement de plus forte puissance

Nous nous limiterons ici au cas où P_o est la probabilité uniforme de support S_o. Il résulte alors des formules (1') et (2') ci-dessus qu'il faut connaître pour chaque couple (K,M), le nombre $\mathcal{R}(K,M)$ de rangements τ - réguliers λ de longueur K et tels que M soit le nombre de points de montées de λ. C'est ce que nous donne la formule (3) ci-dessous dans le cas où $\mathcal{T} = \{1,2\}$) ("comparaison de 2 échantillons").

$\mathcal{R}(K,M)$ est non nul seulement si $2\le K\le N_1+N_2$ et $\inf(K,V)\le M+1\le \sup\{K-N_1, K-N_2, K-E(K/2)\}$ où $E(K/2)$ désigne la partie entière de $K/2$; sous ces conditions, il vaut :

$$(3)\qquad \mathcal{R}(K,M) = \sum_{g\,=K-\inf\{N_2,K-1,M+1\}}^{\inf\{N_1,K-1,M+1\}} S_{N_1,g}\, S_{N_2;g} \binom{g}{K-M-1} \binom{K-g}{K-M-1}$$

où $S_{a,b}$ désigne le nombre de surjections d'un ensemble de cardinal a sur un ensemble de cardinal b.

Cette formule résulte de ce que λ, rangement τ-régulier de longueur K et tel que $\operatorname{card}\mathcal{M}(\lambda) = M$, est déterminé par :

- g le nombre de groupes d'ex-aequo provenant du 1er échantillon (g varie entre $K-\inf(N_2,M+1)$ et $\inf(N_1,M+1)$;
- la surjection définie sur l'ensemble des expériences de type 1, qui à chaque expérience associe le groupe d'ex-aequo de type 1 auquel elle appartient ;

- la surjection définie sur l'ensemble des expériences de type 2, qui à chaque expérience associe le groupe d'ex-aequo de type 2 auquel elle appartient ;
- la donnée des K-M-1 groupes d'ex-aequo du 1er échantillon suivis d'un groupe d'ex-aequo issu du 2ème échantillon;
- la donnée des K-M-1 groupes d'ex-aequo du 2ème échantillon précédés d'un groupe d'ex-aequo issu du 1er échantillon.

2.6 Critique

Le test dont nous venons de prouver l'existence présente un défaut important. En effet quand le statisticien recherche des tests localement de plus forte puissance, il nourrit l'espoir plus ou moins fondé que pour un paramètre même éloigné de l'hypothèse (n'appartenant pas à l'alternative locale), ces tests auront encore relativement une forte puissance. Or ici cet espoir semble vain.

Prenons le cas de deux types, où le deuxième échantillon est régi par une probabilité sur $\mathbb{R}$ translatée de celle régissant le premier échantillon et où ces deux probabilités sont uniformes et de support fini, composé de points équidistants, (soit $S_o = \{x_o + n\delta / 1 \leq n \leq V\}, \delta > o$) ; on peut prendre alors

$\Theta = \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 / \theta_1 < \theta_2\}$, $H_o = \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 / \theta_1 = \theta_2\}$, $H' = \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 / o < \theta_2 - \theta_1 < \delta\}$ et

$h_{(\theta_1, \theta_2), t}(x) = x + \theta_t$.

Il est alors évident que la loi de γ, quand $\theta (= (\theta_1, \theta_2))$ est la valeur du paramètre, ne dépend de θ qu'à travers la position de $\frac{\theta_2 - \theta_1}{\delta}$ relativement à la partition de $[0, \infty[$ en les intervalles $\{0\},]0,1[, \{1\},]1,2[, \ldots, \{V\},]V, +\infty[$; autrement dit, la fonction qui à tout b associe la puissance d'un test de rang quand la valeur du paramètre est $\theta (= (\theta_1, \theta_2))$, où $b = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\delta}$, est une constante sur chacun des atomes de cette partition.

Toute observation telle que deux expériences de types différents aient des résultats égaux conduit, pour les tests de rang LMP, à l'acceptation de l'hypothèse, puisque la probabilité d'un tel évènement sous l'alternative locale est nulle.

Dans l'exemple ci-dessus, quand b vaut 1, la probabilité que deux expériences de types différents aient un même résultat sera importante. D'une manière plus générale, la loi de γ sous l'hypothèse sera proche de celle de γ quand le paramètre $\theta (= (\theta_1, \theta_2))$ est tel que $\frac{\theta_2 - \theta_1}{\delta} = 1$ et on peut donc prévoir pour cette valeur du paramètre une faible puissance des tests de rang LMP.

3 - TESTS DE RANG UNIFORMEMENT RANDOMISE

3.1 Définition

Un test de rang est dit uniformément randomisé (en abrégé r.u.r.), si, une fois associé, à l'observation ξ, son rangement $\rho(\xi)$, le processus de prise de décision peut encore être décomposé en deux temps, dont le premier consiste à choisir σ, rangement compatible avec ξ, par tirage au sort selon la probabilité uniforme sur $\rho(\xi)$ (et dont le dernier peut évidemment faire à nouveau intervenir un processus aléatoire).

Autrement dit, on appelle test r.u.r. toute transition de probabilité, de $\Gamma^{\mathcal{J}}$ vers l'espace (à 2 éléments) des décisions, de la forme $\Psi \circ U \circ \rho$, où o désigne la composition de transition de probabilité (voir par exemple [5]) et où U est la transition uniforme de $\mathcal{P}(\Sigma_I)$ vers Σ_I qui, à toute partie Σ' de Σ_I, associe la probabilité uniforme sur Σ'. On notera $\bar{\rho} = U \circ \rho$, et on dira qu'un test est r.u.r. s'il factorise à travers $\bar{\rho}$.

3.2 Tests de rang uniformement randomisé de plus forte puissance

Il est classique (voir par exemple [1]), que, sous l'hypothèse H_o, $\bar{\rho}$ suit la loi uniforme sur Σ_I (on notera ici $\mathcal{U}$ la probabilité uniforme sur Σ_I).

D'autre part $\bar{\rho}$ a même loi relativement à toutes les probabilités P_θ telles que θ appartienne à l'alternative locale (puisqu'il en est déjà ainsi pour ρ, à travers laquelle $\bar{\rho}$ factorise) ; on notera $\mathcal{R}$ cette loi.

La recherche d'un test r.u.r. de niveau α pour tester H_o contre H' se ramène donc au problème du test sur Σ_I, de l'hypothèse simple ($\mathcal{U}$) contre l'alternative simple ($\mathcal{R}$) ; il existe donc un test localement de plus forte puissance parmi les tests de rang uniformément randomisé de niveau α, pour le problème de l'hypothèse H_o et d'alternative $\Theta - H$; un tel test sera dit r.u.r.l.m.p. ; il est fondé sur la considération, pour tout σ, de $\frac{\mathcal{R}(\{\sigma\})}{\mathcal{U}(\{\sigma\})}(= I\,!\,\mathcal{R}(\{\sigma\}))$.

On a montré (en [2]) que $\mathcal{R}(\{\sigma\})$ ne dépend en fait que de $\tau \circ \sigma^{-1}$, élément de l'ensemble Φ des applications de $\{1,2,\ldots,I\}$ dans $\mathcal{C}$ (introduit en 2.4). Soit donné φ ($\in \Phi$) et j ($\in \{1,\ldots,I-1\}$) ; j est dit point de croissance, d'équilibre, ou de décroissance de φ selon que $\varphi(j)$ est strictement inférieur, égal ou strictement supérieur à $\varphi(j+1)$; on note respectivement $\mathcal{C}_\varphi$, $\mathcal{E}_\varphi$ et $\mathcal{D}_\varphi$ les ensembles des points de croissance, d'équilibre et de décroissance de φ, et C_φ, E_φ, D_φ leurs cardinaux.

Soit $\mathcal{F}$ une partie finie de $\mathbb{N}$; on appelle suite décomposante de $\mathcal{F}$ la suite ordonnée en en décroissant des longueurs des intervalles maximaux non vides contenus dans $\mathcal{F}$. Si $\Gamma(=(\gamma_1,\ldots,\gamma_G))$ est la suite décomposante de $\mathcal{F}$, on a donc $\mathrm{card}\,\mathcal{F} = \sum_{g=1}^{G} \gamma_g$.

Alors on a :

$$\mathcal{R}(\{\sigma\}) = \sum_{\mathcal{D}_\varphi \subset \mathcal{J} \subset \{1,\ldots,I-1\}} \Big(\prod_{h=1}^{H} (U_{\mathcal{J},\varphi,h}+1)!\Big)^{-1} \sum_{\underline{x} \in \mathcal{S}_{J+1}(S_o)} \prod_{j=1}^{J+1} \left[P_o(\{x_j\})\right]^{m_j - m_{j-1}} \tag{4}$$

où

- $\varphi = \tau \circ \sigma^{-1}$
- $\mathcal{J} = \{m_1,\ldots,m_J\}$, $J = \mathrm{card}\,\mathcal{J}$, $o = m_0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_J < m_{J+1} = I$
- $(U_{\mathcal{J},\varphi,h})_{1 \le h \le H}$ est la suite décomposante de $\mathcal{E}_\varphi \cap \complement_{\{1,\ldots,I-1\}}\mathcal{J}$
- $\mathcal{S}_{J+1}(S_o)$ est l'ensemble des suites $\underline{x}$ $(=(x_1,\ldots,x_{J+1}))$ strictement croissantes de longueur J+1 dans S_o.

On a, pour tout $\varphi \in \Phi$, $\mathrm{card}\,\{\sigma;\ \tau \circ \sigma^{-1} = \varphi\} = \prod_{t \in \mathcal{C}} N_t\,!$; or l'observation ξ étant effectuée, σ est extrait, selon la probabilité uniforme, parmi tous les rangements compatibles avec ξ ; il en résulte que φ $(= \tau \circ \sigma^{-1})$ est extrait, selon la probabilité uniforme, parmi toutes les situations compatibles avec ξ ; de plus la loi qui régit la situation ainsi déterminée est, dans le cas où $\sigma \in H_0$, $\mathcal{U}'$, loi uniforme sur $\mathfrak{S}$, et dans le cas où $\theta \in H'$, la probabilité $\mathcal{R}'$ définie par $\mathcal{R}'(\{\varphi\}) = (\prod_{t \in \mathcal{T}} N_t\,!)\mathcal{R}(\{\sigma\})$ (où $\varphi = \tau \circ \sigma^{-1}$) ; le test r.u.r.l.m.p. est donc en fait un test de situation uniformément randomisée, fondé sur

$$\frac{\mathcal{R}'(\{\varphi\})}{\mathcal{U}'(\{\varphi\})} \quad (= \mathcal{R}'(\{\varphi\}) \frac{I\,!}{\prod_{t \in \mathcal{T}} N_t\,!}).$$

3.3 Cas où P_o est une probabilité uniforme

Dans toute la suite on suppose que P_o est la probabilité discrète uniforme sur S_o ; on suppose que $I \le V (= \text{card } S_o)$; on a alors :

$$\sum_{\underline{x} \in \mathcal{S}_{J+1}(S_o)} \prod_{j=1}^{J+1} \left[P_o(\{x_j\})\right]^{m_j - m_{j-1}} = \left(\frac{1}{V}\right)^I \text{card } \mathcal{S}_{J+1}(S_o) = \left(\frac{1}{V}\right)^I \binom{V}{J+1}$$

et donc (4) se simplifie en :

$$(4') \quad \mathcal{R}(\{\sigma\}) = \left[\frac{1}{V}\right]^I \sum_{D_\varphi \le J \le I-1} \binom{V}{J+1} \sum_{\substack{\mathcal{D}_\varphi \subset \mathcal{J} \subset \{1,\dots,I-1\} \\ \text{card } \mathcal{J} = J}} \left(\prod_{h=1}^{H} (U_{\mathcal{J},\varphi,h}+1)!\right)^{-1} \qquad (\text{où } D_\varphi = \text{card } \mathcal{D}_\varphi)$$

Soit $\mathcal{J}$ tel que $\mathcal{D}_\varphi \subset \mathcal{J} \subset \{1,\dots,I-1\}$ et card $\mathcal{J} = J$; $\mathcal{J}$ peut être caractérisé par $\complement \mathcal{J} \cap \mathcal{C}_\varphi$ (dont le cardinal, c, vérifie $0 \le c \le \inf\{C_\varphi, I-1-J\}$) et $\complement \mathcal{J} \cap \mathcal{E}_\varphi$ (dont le cardinal est $I-1-J-c$).

Pour toute partie $\mathcal{F}$ de $\mathbb{N}$, de suite décomposante $(\mu_h ;\ 1 \le h \le H)$, notons $W(\mathcal{F}) = \prod_{h=1}^{H} (\mu_h+1)!)^{-}$ (avec la convention $W(\emptyset) = 1$) et pour toute partie $\mathcal{E}$ de $\mathbb{N}$ et tout entier e ($\le$ card $\mathcal{E}$), notons $A(\mathcal{E},e) = \sum_{\substack{\mathcal{F} \subset \mathcal{E} \\ \text{card}\mathcal{F} = e}} W(\mathcal{F})$; on a alors :

$$(4'') \quad \mathcal{R}(\{\sigma\}) = \left[\frac{1}{V}\right]^I \sum_{\mathcal{D}_\varphi \le J \le I-1} \binom{V}{J+1} \sum_{0 \le c \le \inf(C_\varphi, I-1-J)} \binom{C_\varphi}{c} A(\mathcal{E}_\varphi, I-1-J-c)$$

La mise en oeuvre du test r.u.r.l.m.p. nécessite donc le calcul des coefficients $A(\mathcal{E},e)$; c'est l'objet de la formule (5) ci-dessous, où $(\gamma_g,\ 1 \le g \le G)$ est la suite décomposante de $\mathcal{E}$

$$(5) \quad A(\mathcal{E},e) = \sum_{(f_1,\dots,f_G) \in \mathcal{C}_{\Gamma,e}} \prod_{1 \le g \le G} \sum_{H=1}^{\inf\{f_g, \gamma_g - f_g + 1\}} \binom{\gamma_g - f_g + 1}{H} \sum_{\underline{R} \in \mathcal{S}_{\gamma_g, f_g, H}} P(\underline{R}) \binom{H}{s_1,\dots,s_L}$$

où $\mathcal{C}_{\Gamma,e} = \{(f_1,\dots,f_G) / \sum_{g=1}^{G} f_g = e, \forall g \in \{1,\dots,G\}\ 0 \le f_g \le \gamma_g\}$

$\mathcal{S}_{\gamma_g,f_g,H}$ est l'ensemble des suites $\underline{R} (=(r_1,\dots,r_H))$, de longueur H et qui sont suite décomposante d'une partie de cardinal f_g de $\{1,\dots,\gamma_g\}$.

$(s_1,\dots,s_L)$ est la suite des longueurs des intervalles maximaux de $\{1,\dots$ [illegible] lesquels $\underline{R}$ est constante.

$P(\underline{R}) = (\prod_{h=1}^{H} (r_h + 1)!)^{-1}$.

On trouve une démonstration détaillée de (5) dans [3] ; le principe en est de calculer $A(\mathcal{E},e)$ dans le cas où $\mathcal{E}$ est un intervalle (en montrant qu'alors $A(\mathcal{E},e)$ ne dépend que de e et de la longueur de $\mathcal{E}$), puis de montrer que, dans le cas général, $A(\mathcal{E},e)$ peut s'exprimer en fonction des coefficients $A(\mathcal{E}_g,f)$, où les ensembles $\mathcal{E}_g$ sont les intervalles maximaux contenus dans $\mathcal{E}$.

On appelle <u>caractéristique</u> d'un élément φ de Φ le couple $\eta(\varphi)$ composé de la suite décomposante de ses points d'équilibre et du nombre de ses points de décroissance : on note $\mathcal{K}$ l'ensemble dans lequel η prend ses valeurs. Il résulte de la formule (5) que $\mathcal{R}(\{\sigma\})$ ne dépend que de la caractéristique de la situation $\tau \circ \sigma^{-1}$; autrement dit, dans le cas où P_o est uniforme, le test r.u.r.l.m.p. peut être en fait considéré comme un <u>test de caractéristique</u>.

Pratiquement, notons $\mathcal{U}''$ et $\mathcal{R}''$ les probabilités (sur $\mathcal{K}$) images de $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{R}'$ par η, et $\sqsupset$ le préordre (dit "ordre de rejet") défini sur $\mathcal{K}$ par $k \sqsupset k' \Leftrightarrow \frac{\mathcal{R}''(\{k\})}{\mathcal{U}''(\{k\})} \geq \frac{\mathcal{R}''(\{k'\})}{\mathcal{U}''(\{k'\})}$, et appelons, pour tout $k (\in \mathcal{K})$, seuil de k le nombre $\mathcal{U}''(\{k' \in \mathcal{K} ; k' \sqsupset k\})$; on sait qu'alors on détermine la région de rejet d'un test de caractéristique l.m.p. de niveau α comme l'ensemble des k de seuil inférieur ou égal à α, et en "randomisant" s'il y a lieu afin d'ajuster le niveau du test à α.

4 - CALCULS NUMERIQUES

Nous avons calculé effectivement les deux tests de rang mis en évidence en 2 et 3, dans le cas où P_o est uniforme, et ceci pour deux échantillons de faibles effectifs (4 ou 5), et V variant entre 8 et 100. Des extraits de ces résultats numériques sont présentés dans les tableaux (I) et (II). Quelques commentaires s'imposent.

1) Le test de rang LMP est de forte puissance locale surtout lorsque le cardinal du support de P_o n'est pas très grand par rapport aux tailles des échantillons. D'ailleurs dans ce cas, ce test est quasiment un test de régularité : rejet de l'hypothèse si le rangement observé n'est pas τ-régulier ; non-rejet de l'hypothèse sinon.

2) Le test de rang r.u.r.l.m.p. est nettement moins puissant que le test non randomisé. Par contre, on observe un résultat très intéressant : l'ordre de rejet des différentes caractéristiques ne dépend pas de V, cardinal du support de P_o (cet ordre est décrit dans les tableaux III et IV), alors que l'ordre de rejet des descriptions en dépend. Si l'on réussissait à démontrer ce résultat, il ne serait plus nécessaire de connaitre V pour déterminer le test r.u.r.l.m.p. ; il suffirait de savoir que P_o est une probabilité uniforme. De plus on remarque que les premières situations rejetées se distinguent par le fait qu'elles proviennent d'observations telles que la plus petite valeur observée soit issue du 1^{er} échantillon et la plus grande valeur observée soit issue du 2^{ème} échantillon. Cette dernière remarque nous a conduit à proposer des tests, basés uniquement sur l'origine des valeurs extrêmes observées, dont l'étude fait l'objet du paragraphe suivant.

5 - TEST DES EXTREMA

Nous nous restreindrons dans ce paragraphe au cas où P_o est uniforme et où T est égal à 2.

5.1 Test des simples extréma

On considère l'ensemble E des observations ξ telles que le plus petit de leurs résultats ne puisse provenir que d'une expérience de type 1 et le plus grand de leurs résultats que d'une expérience de type 2 :

$$E = \{\xi \in \Omega^J / (\forall \sigma \in \rho(\xi))\ (\tau o \sigma^{-1})\ (1) = 1 \text{ et } (\tau o \sigma^{-1})(I) = 2\}$$

Il s'agit de construire un test de niveau α qui "ait tendance" à rejeter l'hypothèse quand l'évènement E se réalise. En fait, $Q_o(E)$ désignant la valeur commune des probabilités $P_\theta(E)$ (où $\theta \in H_o$), on aura toujours dans la pratique $Q_o(E) \geq \alpha$ ce qui conduira à accepter H_o systématiquement si E ne se réalise pas et, si E se réalise, à faire intervenir un artifice aléatoire attribuant à la décision d'acceptation de H_o la probabilité $1-(\alpha/Q_o(E))$.

Le test des extréma étant un test de rang, sa puissance locale sera inférieure ou égale à celle du test de rang LMP déterminé en 2. Pour le mettre en oeuvre il faut calculer $Q_o(E)$ et pour calculer sa puissance locale il faut calculer $Q'(E)$, la valeur commune des $P_\theta(E)$ quand appartient à H'. Ces calculs (P_o étant uniforme sur S_o, de cardinal V) font l'objet des formules (6) et (6') ci-dessous dont les démonstrations figurent en [3].

$$(6) \qquad Q_o(E) = \left(\frac{1}{V}\right)^I \sum_{e=1}^{V} (V-e) \left[e^{N_1} - (e-1)^{N_1}\right] \left[e^{N_2} - (e-1)^{N_2}\right]$$

$$(6') \qquad Q'(E) = \left(\frac{1}{V}\right)^I \sum_{e=o}^{V} (V-e) \left[(e+1)^{N_1} - e^{N_1}\right] \left[(e+1)^{N_2} - e^{N_2}\right]$$

5.2 Autres tests des extréma

On peut concevoir un test basé sur les bi-extréma, c'est-à-dire le type des deux plus grandes et des deux plus petites valeurs observées ; on peut également concevoir un test basé sur les extréma mais après randomisation. Les formules permettant l'étude de ces tests se trouvent en [3] ; les puissances locales qui en résultent sont exprimés dans les tableaux I et II. On remarque que les tests de rang basés sur les extréma sont de puissance locale nettement plus faible que le test de rang L.M.P..

Par contre le test des simples extréma ainsi que le test des bi-extréma ne présentent pas sans doute pas les chutes de puissance analysées en 2.6 ; cela est d'ailleurs certain dans le cas de translation ; en effet, si la probabilité qui régit les observations du second type est l'image par une translation, d'amplitude positive, de la probabilité régissant les observations du premier type, il est alors évident que la probabilité de E est une fonction croissante de l'amplitude de cette translation.

Puissance locale au seuil 5% des différents tests de rang.

deux échantillons de taille 4

V	Test de rang L.M.P.	Test des simples extréma	Test des bi-extrema	Test r.u.r. L.M.P.	Test r.u.r. des bi-extréma	Test r.u.r. des extréma
8	0,7588	0,1381	0,1356	0,0852	0,0820	0,0771
10	0,5460	0,1122	0,1112	0,0763	0,0744	0,0714
20	0,1988	0,0747	0,0746	0,0614	0,0610	0,0604
40	0,0971	0,0611	0,0611	0,0553	0,0552	0,0551
100	0,0650	0,0538	0,0638	0,0521	0,0520	0,0520

Tableau I

1 échantillon de taille 4
1 échantillon de taille 5

V	Test de rang L.M.P.	Test r.u.r. L.M.P.
10	0,7226	0,0810
20	0,2525	0,0632
40	0,1115	0,0561
100	0,0695	0,0523

Tableau II

2 échantillons de taille 5

V	Test de rang L.M.P	Test des simples extréma	Test des bi-extréma	Test r.u.p. L.M.P.
10	0,9044	0,1376	0,1356	0,0860
20	0,3329	0,0826	0,0824	0,0649
40	0,1467	0,0642	0,0642	0,0568
100	0,0758	0,0559	0,0553	0,0526

Tableau II bis

V = cardinal du support de la probabilité uniforme P_o

<u>Ordre de rejet par le test r.u.r.l.m.p.</u>

cas de deux échantillons de taille 4

ordre de rejet	CARACTERISTIQUE suite décomposante des points d'équilibre	 nombre de points de décroissance	Situations	Seuil
I	1,1,1,1	1	11221122*	0,0143
II	3,3	1	11112222*	0,0286
III	2,1,1	1	11211222* 11122122* 12211122 11222112	0,0857
IV	2,2	1	11121222* 11122212 12111222 12221112	0,1429
V	1,1	2	11212122* 12112122 12121122 11221212 11212212 12112212 12211212 12122112 12212112	0,2714
VI	∅	3	12121212	0,2857
VII	3,1,1	1	22111122 11222211	0,3143

Les situations marquées d'une astérisque sont celles pouvant conduire au rejet de l'hypothèse par les tests r.u.r. des bi-extréma.

Tableau III

Ordre de rejet I, correspond à la caractéristique maximale (pour la relation de préordre ⊐ définie en 3.9)

Ordre de rejet II, correspond à la caractéristique maximale (pour ⊐) parmi les caractéristiques qui ne sont pas d'ordre de rejet I.

<u>Ordre de rejet par le test r.u.r.l.m.p.</u>

cas de deux échantillons de taille 5

ordre de rejet	CARACTERISTIQUE suite décomposante des points d'équilibre	CARACTERISTIQUE nombre de points de décroissance	Situations	Seuil
I	2,2,1,1	1	1112211222 1112221122 1122111222 1122211122	0,0159
II	4,4	0	1111122222	0,0198
III	3,2,1	1	1111221222 1111222122 1221111222 1222111122 1112112222 1112222112 1121112222 1122221112	0,0516
IV	1,1,1,1	2	1121122122 1122112122 1122112212 1211221122 1221121122 1221122112 1121221122 1122121122 1122122112	0,0873
V	3,3	1	1111212222 1111222212 1211112222 1222211112	0,1032

<u>Tableau IV</u>

CONCLUSION

Dans le cas où on connait V on préférera utiliser les tests de rang basés sur les extréma ; toutefois lorsque l'on désirera un test de forte puissance locale on n'utilisera le test de rang L.M.P. qu'en ayant conscience de son défaut (chute de puissance dès que le paramètre sort de l'alternative locale).

Par contre, quand on ne connait pas V, on utilisera le test de rang uniformément randomisé localement de plus forte puissance, puisque l'ordre de rejet des situations ne dépend pas de V (c'est ce que l'on observe dans le cas de nos calculs, résultats qui restent à confirmer dans d'autre cas). Il faudra toutefois avoir conscience de la mauvaise qualité (faible puissance) de ce test pour de grandes valeurs de V.

BIBLIOGRAPHIE

1 AL'AIN Mikhael
Propriétés de liberté et d'invariance des tests de rang pour la comparaison d'échantillons (Thèse ROUEN, 1976).

2 FOURDRINIER Dominique
Existence de tests de rang localement de plus forte puissance pour les problèmes de comparaisons d'échantillons à lois discrètes (Thèse ROUEN, 1978).

3 GRANCHER Gérard
Puissance locale de certains tests de rang pour le problème de comparaison de plusieurs échantillons : étude théorique et numérique. (Thèse ROUEN, 1979).

4 HAJEK et ŠIDAK
Theory of rank tests (Academic Press, 1967).

5 RAOULT Jean-Pierre
Structures statistiques (PUF, 1975).