Statistique et analyse des données

Bernard Charles
Roch Roy

Calcul fonctionnel et séries chronologiques

Statistique et analyse des données, tome 5, nº 1 (1980), p. 33-49.
<http://www.numdam.org/item?id=SAD_1980__5_1_33_0>

Statistique et Analyse des Donnees
1 - 1980 pp. 33-49

CALCUL FONCTIONNEL ET SERIES CHRONOLOGIQUES

par

Bernard CHARLES* et Roch ROY**

Departement de mathématiques, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Place Eugène Bataillon, 34060 Montpellier, France.
Département d'informatique et de recherche opérationnelle, Université de Montréal, Case postale 6128, Succursale "A", Montréal, P.Q., H3C 3J7.

RESUME

L'objectif principal de cet article est de préciser le contexte mathématique le plus général possible dans lequel les manipulations d'opérateurs telles que faites dans le livre de Box et Jenkins (1976) demeurent valides. Ceci nous amène à considérer une famille d'opérateurs engendrée par l'opérateur décalage à gauche B, famille opérant sur l'espace des processus commençant à 0 ainsi que sur celui des processus commençant à $-\infty$. Pour chacun de ces deux espaces, en utilisant uniquement des notions générales d'algèbre linéaire ainsi que les principes de base du calcul fonctionnel, nous déduisons des conditions nécessaires et suffisantes pour l'inversibilité d'un opérateur polynomial en B ainsi que pour la simplification d'un facteur commun dans l'équation de définition d'un modèle ARMA. Finalement, nous discutons les implications de ces résultats sur différentes questions traitées dans Box et Jenkins.

* Le présent travail a été réalisé alors qu'il était professeur visiteur à l'Université de Montréal.

** Recherche subventionnée par le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada, subvention n° A 4145.

I - INTRODUCTION

Dans certains livres de séries chronologiques, la notion d'opérateur est maintenant utilisée afin de représenter diverses classes de processus stochastiques. L'avantage étant bien sûr de simplifier la notation. Par exemple, Box et Jenkins (1976) en font une utilisation intense. L'équation typique que l'on rencontre dans ce livre est l'équation définissant un processus mixte d'ordre (p,q) (ARMA(p,q))

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \ldots - \phi_p X_{t-p} = A_t - \theta_1 A_{t-1} - \ldots - \theta_q A_{t-q}$$

que l'on abrège par l'équation

$$\phi(B) X_t = \theta(B) A_t$$

où B désigne l'opérateur décalage à gauche défini par $BX_t = X_{t-1}$, $\phi(B) = 1-\phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p$ désigne l'opérateur autorégressif et $\theta(B) = 1-\theta_1 B - \ldots - \theta_q B^q$ l'opérateur moyenne mobile. Dépendant des circonstances, tantôt nous voudrons représenter X_t uniquement en termes du bruit blanc A_t, ce qui nous amène à inverser l'opérateur $\phi(B)$, tantôt nous voudrons représenter X_t comme une combinaison linéaire des valeurs passees $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$, ce qui nous amène à inverser l'opérateur $\theta(B)$.

Bien que l'utilisation d'opérateurs nous situe dans un contexte mathématique plus abstrait, elle est quand même avantageuse puisqu'en plus d'abréger la notation, elle permet bien souvent de rendre certains développements plus transparents. Dans leur livre, Box et Jenkins font des opérations formelles sur des polynômes d'operateurs comme si c'était des polynômes d'une variable complexe sans préciser le cadre mathématique dans lequel ces opérations sont valides. Pour le statisticien familier avec la théorie des processus stochastiques, cette lacune n'est pas trop gênante puisqu'il est en général relativement facile de démontrer les mêmes résultats sans faire appel à la notion d'opérateur. Cependant, pour le praticien de même que pour l'étudiant qui s'initie aux séries chronologiques, cette approche peut devenir rapidement ennuyeuse. De plus elle présente un danger car elle peut inciter le lecteur à faire de nouveaux développements en utilisant les opérateurs sans se préoccuper du contexte mathématique dans lequel ces manipulations d'opérateurs sont valides.

L'objectif premier de cet article est de décrire le cadre mathématique le plus général possible dans lequel les manipulations d'opérateurs demeurent valides. Ceci nous amène à considérer une famille d'opérateurs engendrée par l'opérateur décalage à gauche B, famille opérant sur un espace de processus stochastiques qui est à préciser. Nous verrons qu'en utilisant uniquement des notions générales d'algèbre linéaire ainsi que les principes de base du calcul fonctionnel, nous pouvons cerner relativement aisément les possibilités et les limites des représentations en termes d'opérateurs. Un point qui nous semble important est celui des principes de base du calcul fonctionnel. Le seul fait de les expliciter, ce qui peut se faire très simplement en quelques pages, permet d'éviter des obscurités et des redites et de démontrer de façon rigoureuse et élémentaire certaines propriétés des processus ARMA et ARIMA.

Le présent article est de nature didactique et devrait être utile à tous ceux qui enseignent et/ou utilisent la méthode de Box et Jenkins. Il est le fruit de la collaboration d'un mathématicien et d'un statisticien ayant expérimenté à plusieurs reprises le livre de Box et Jenkins comme référence de base pour un cours de séries chronologiques. Nous sommes restés le plus près possible de ce livre et nous avons situé ce qui est fait par rapport à la théorie générale des processus stochastiques pour laquelle nous nous référons au livre de Cramer et Leadbetter (1967).

Dans la Section 2, nous présentons les principes de base du calcul fonctionnel. Dans la Section 3, nous précisons les espaces de processus sur lesquels nous allons opérer et dans la Section 4, nous définissons les espaces d'opérateurs (ou de fonctions de transfert) que nous voulons discuter. Dans la Section 5, nous reprenons sans utiliser la notion d'opérateur le raisonnement présenté dans Box et Jenkins (1976) chapitre 3 afin de déduire les conditions de stationnarité et d'inversibilité d'un processus ARMA. En particulier, la démonstration que nous présentons afin d'obtenir la condition nécessaire et suffisante pour la stationnarité d'un processus ARMA nous paraît plus simple que celle présentée par Pagano (1973) dans le cas d'un processus autorégressif.

Dans les Sections 6 et 7, nous étudions en termes d'opérateurs, quelques propriétés d'un processus ARMA : d'abord comme processus commençant à l'instant 0 dans la Section 6 et puis comme processus commençant à $-\infty$ dans la Section 7. Nous discutons brièvement dans la Section 8 quelques propriétés des processus ARIMA. Dans la Section (9), nous reprenons dans un cadre mathématique approprié et sous une forme plus générale un calcul de Box et Jenkins (1976) p. 80 sur la transformation des covariances lorsqu'on applique des fonctions de transfert aux processus considérés.

Nous concluons finalement par la Section 10 en discutant quelques implications de notre article sur le choix du cadre mathématique pour l'étude des processus ARIMA. En particulier, il est noté que pour les processus ARIMA non-stationnaires, il y a un net avantage à considérer des processus commençant à l'instant 0 sinon très peu de manipulations d'opérateurs sont permises.

2 - ELEMENTS DE CALCUL FONCTIONNEL

Soit E un espace vectoriel complexe. L'ensemble $L(E)$ des opérateurs linéaires de E dans E est de façon naturelle un algèbre sur le corps C des nombres complexes, c'est-à-dire, A et B désignant des éléments de $L(E)$ et α un nombre complexe, on a :

a) $L(E)$ est un espace vectoriel pour les lois $A+B$ et αA.

b) $L(E)$ est muni de la loi AB qui est associative, distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition et qui vérifie $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$.

c) $L(E)$ possède un élément unité I : $AI = IA = A$.

Lorsqu'on veut définir des fonctions d'un opérateur linéaire B on doit se donner une sous-algèbre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}(E)$ contenant B et une algèbre $\mathcal{A}$ de fonctions complexes définies sur un domaine D du plan complexe que nous supposerons être un disque de centre 0. Etant donné $f \in \mathcal{A}$ on cherche à définir $f(B) \in \mathcal{B}$. On part de l'idée que $f(B)$ s'obtient en remplaçant z par B dans $f(z)$, mais ceci n'a de sens que si f est un polynôme. Si $f(z) = a_o + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ on peut en effet poser $f(B) = a_o I + a_1 B + \ldots + a_n B^n$, ce qui donne un opérateur $f(B) \in \mathcal{B}$. Si l'on note θ l'application de l'algèbre $\mathcal{A}_o$ des fonctions polynômes sur D dans l'algèbre $\mathcal{B}$, définie par $\theta(f) = f(B)$, on a les propriétés suivantes faciles à vérifier (f et g désignent des éléments de $\mathcal{A}_o$ et α un nombre complexe) :

$$(1) \qquad \begin{cases} \theta \text{ est linéaire : } \theta(f+g) = \theta(f) + \theta(g),\ \theta(\alpha f) = \alpha\theta(f) \\ \qquad\qquad \text{ou} \quad (f+g)(B) = f(B) + g(B),\ (\alpha f)(B) = \alpha f(B) \\ \theta(fg) = \theta(f)\theta(g) \quad \text{ou} \quad (fg)(B) = f(B)g(B) \\ \theta(1) = I \\ \theta(z) = B \end{cases}$$

Les conditions (1) traduisent l'idée que l'on peut calculer avec les fonctions d'opérateurs comme avec les fonctions ordinaires, z étant remplacé par B. Elles expriment que θ est un morphisme (ou homomorphisme) de l'algèbre $\mathcal{A}_o$ dans l'algèbre $\mathcal{B}$, qui transforme z en B. Nous prendrons donc les conditions (1) comme principes de base pour la définition de $f(B)$ lorsque $f \in \mathcal{A}$.

Nous allons montrer que les conditions (1) suffisent pour fonder le calcul fonctionnel avec l'algèbre $\mathcal{R}$ des fonctions rationnelles sur D. Une fonction rationnelle sur D est par définition une fonction de la forme $r = \frac{p}{q}$ où p et q sont des polynômes et où q n'a pas de racine dans D. Si θ est une application de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{B}$ vérifiant les conditions (1) on doit avoir pour $f = \frac{p}{q} \in \mathcal{R}$:

$$\theta(f) = \theta(p)\theta(\tfrac{1}{q}) = p(B)\theta(\tfrac{1}{q}) .$$

Pour déterminer $\theta(\frac{1}{q})$ on remarque que $q\,\frac{1}{q} = \frac{1}{q}\,q = 1$, ce qui implique que

$$q(B)\theta(\tfrac{1}{q}) = \theta(\tfrac{1}{q})q(B) = \theta(1) = I$$

En d'autres termes $\theta(\frac{1}{q})$ doit être l'inverse de $q(B)$, ce qui nécessite $q(B)$ inversible dans $\mathcal{B}$ pour tout polynôme q n'ayant pas de racine dans D. Si cette condition est réalisée on doit donc définir θ par :

$$\theta(\tfrac{p}{q}) = p(B)q(B)^{-1} .$$

Cette définition est cohérente car si $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ ou ce qui est équivalent $sp = rq$ on en déduit $s(B)p(B) = r(B)q(B)$, d'où $p(B)q(B)^{-1} = r(B)s(B)^{-1}$. Ce point étant acquis il est facile de montrer que θ défini comme indiqué vérifie les conditions (1).

Un polynôme q non nul peut être mis sous la forme $q(z) = a(z-\lambda_1)\ldots(z-\lambda_n)$ avec $a \neq 0$. L'inversibilité dans $\mathcal{B}$ de $q(B)$ équivaut à l'inversibilité dans $\mathcal{B}$ des opérateurs $B-\lambda_1 I,\ldots,B-\lambda_n I$. L'inversibilité de $q(B)$ dans $\mathcal{B}$ pour tout polynôme q sans racine dans D équivaut donc à l'inversibilité de $B-\lambda I$ dans $\mathcal{B}$ pour tout $\lambda \notin D$. En d'autres termes,

D doit contenir le spectre de B relativement à l'algèbre $\mathcal{B}$. Ceci montre en passant que le calcul fonctionnel avec B dépend de façon essentielle de l'algèbre $\mathcal{B}$ dans laquelle on impose à $f(B)$ de se trouver. Ce fait est important car le choix de $\mathcal{B}$ est souvent lié de façon naturelle au problème que l'on étudie.

Pour définir $f(B)$ pour des fonctions plus générales que des fonctions rationnelles il faut faire intervenir des topologies et poser un principe de continuité de la forme suivante (f_n désigne une suite convergente de fonctions de A) :

$$(\lim_{n \to \infty} f_n)(B) = \lim_{n \to \infty} (f_n(B)) \ .$$

Dans la suite nous aurons seulement à inverser des polynômes en B dans une algèbre d'opérateurs $\mathcal{B}$ et à représenter l'inverse, lorsqu'il existe, comme série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n B^n$. Nous n'aurons donc pas à faire appel à des propriétés topologiques générales.

Les principes du calcul fonctionnel tels que nous venons de les exposer se trouvent sous une forme plus ou moins explicite dans les ouvrages d'analyse fonctionnelle. On pourra en particulier consulter le livre de Dunford et Schwartz (1958), tome 1, chapitre 7.

3 - ESPACES DE PROCESSUS STOCHASTIQUES

Dans cet article, nous considérons uniquement les processus stochastiques à temps discret de la forme $\{X_t : t \in Z\}$ où Z désigne l'ensemble des entiers relatifs et, afin d'alléger la notation, nous écrivons $X = \{X_t : t \in Z\}$. Nous supposons que le processus X est à valeurs réelles, cependant tous les développements faits dans ce texte demeurent valides pour un processus à valeurs complexes. Désignons par $P(Z)$ l'ensemble des processus X du second ordre c'est-à-dire pour lesquels $E[X_t^2] < \infty$ pour tout $t \in Z$. L'ensemble $P(Z)$ est de façon naturelle un espace vectoriel sur le corps des nombres complexes C par les opérations :

$$(2) \qquad \begin{cases} (X + Y)_t = X_t + Y_t \ , \\ (\alpha X)_t = \alpha X_t \ , \end{cases} \qquad t \in Z \ , \ \alpha \in C \ .$$

En vue des applications et aussi pour se situer dans un cadre mathématique praticable, on envisage les deux sous-espaces suivants de $P(Z)$.

- L'espace $P(N)$ qui est l'ensemble des processus $X = \{X_t : t \in N\}$ qui commencent à l'instant zéro (pour interpréter $X = \{X_t : t \in N\}$ comme élément de $P(Z)$, on convient que $X_t = 0$ pour $t < 0$).
- L'espace $P_\infty(Z)$ des processus bornés en moyenne quadratique c'est-à-dire tels que

$$(3) \qquad \sup_{t \in Z} E\left[X_t^2\right] < \infty \ .$$

Il est facile de vérifier que ces deux ensembles constituent des sous-espaces vectoriels de $P(Z)$. De plus, en vertu de l'inégalité de Schwarz, on a

$$(E[|X_t|])^2 \leq E[|X_t|^2]$$

donc si $X \in P_\infty(Z)$ on a aussi

$$\sup_{t \in Z} E[|X_t|] < \infty \quad \text{et} \quad \sup_{t \in Z} \mathrm{Var}(X_t) < \infty .$$

Le sous-espace $P_\infty(Z)$ contient les processus stationnaires au sens large. En effet, puisqu'un processus stationnaire au sens large est un processus du second ordre dont les deux premiers moments sont invariants par rapport aux translations dans le temps, il s'ensuit que

$$E[X_t^2] = E[X_0^2] \quad , \qquad t \in Z$$

et par conséquent, la condition (3) est automatiquement satisfaite.

4 - ESPACES DE FONCTIONS DE TRANSFERT

4.1 - La notion de fonction de transfert

Une fonction de transfert sur $P(Z)$ est une application ϕ de $P(Z)$ dans $P(Z)$. Elle est dite physiquement réalisable si $(\phi X)_t$ est calculable à partir des X_j tels que $j \leq t$ c'est-à-dire si

$$(\phi X)_t = \phi(\ldots, X_{t-2}, X_{t-1}, X_t ; t).$$

Si la fonction ϕ du membre de gauche ne dépend pas du temps t, on dit que ϕ est homogène dans le temps. Nous nous intéressons aux fonctions de transfert physiquement réalisables, homogènes dans le temps et linéaires, c'est-à-dire définies par une formule de la forme :

$$(4) \qquad (\phi X)_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \, X_{t-j} , \quad t \in Z.$$

Nous pouvons alors identifier la fonction de transfert ϕ à la suite infinie $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ et nous écrirons

$$\phi = \{\phi_i : i \in N\}$$

Nous ne sommes pas assurés a priori de la convergence du deuxième membre de (4) et c'est une des raisons pour introduire les espaces $P(N)$ et $P_\infty(Z)$. Avant d'étudier l'algèbre des fonctions de transfert, rappelons d'abord quelques généralités sur les séries formelles.

4.2 - Séries formelles, fonctions génératrices

Etant donné une suite de nombres complexes $\phi = \{\phi_i : i \in N\}$ on lui associe la série formelle $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n z^n$ où z est une indéterminée. $\phi(z)$ est conçue comme combinaison linéaire formelle des symboles z^n et l'égalité de deux séries formelles signifie l'égalité de leurs coefficients.

On définit les opérations suivantes sur l'ensemble $\mathcal{B}$ des séries formelles :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_n + \psi_n) z^n$$

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha\phi_n) z^n \quad (\alpha \text{ nombre complexe})$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \phi_i \psi_{n-i}\right) z^n$$

Muni de ces opérations $\mathcal{B}$ est une algèbre commutative sur le corps des nombres complexes. On peut remarquer que le produit de deux séries formelles s'obtient en posant $z^n z^m = z^{n+m}$ et en multipliant formellement. L'élément unité de $\mathcal{B}$ est $z^0 = \{1,0,0,\dots\}$ que l'on identifie avec 1.

L'algèbre $\mathcal{B}$ est sans diviseur de zéro, c'est-à-dire $\phi(z)\psi(z) = 0$ implique $\phi(z) = 0$ ou $\psi(z) = 0$. Supposons en effet $\phi(z) \neq 0$ et $\psi(z) \neq 0$. Si ϕ_n est le premier coefficient non nul de $\phi(z)$ et ψ_m le premier coefficient non nul de $\psi(z)$ alors $\phi(z)\psi(z)$ a comme premier coefficient non nul $(\phi\psi)_{n+m} = \phi_n\psi_m$ donc $\phi(z)\psi(z) \neq 0$.

Soit $\mathcal{H}$ le sous-ensemble des $\phi \in \mathcal{B}$ telles que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n z^n$ (z variable complexe) ait un rayon de convergence > 0. Il est facile de démontrer que $\mathcal{H}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{B}$ que l'on peut identifier avec l'algèbre des fonctions de la variable complexe z qui sont holomorphes dans un voisinage de 0 (germes de fonctions holomorphes en 0).

La série formelle $\phi(z)$, qu'elle soit interprétable ou non comme fonction de $\mathcal{H}$, est appelée la fonction génératrice de la suite de nombres $\phi = \{\phi_n : n \in N\}$. On peut obtenir des identités utiles en utilisant uniquement le fait que $\mathcal{B}$ est une algèbre. Si de plus $\phi \in \mathcal{H}$ cela peut conduire à des expressions analytiques intéressantes pour les coefficients ϕ_n, en utilisant le fait que $\phi_n = \frac{1}{n!} \phi^{(n)}(0)$.

On peut encore considérer des séries formelles $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n z^n$ associées à des suites de nombres complexes $\phi = \{\phi_n : n \in Z\}$. Dans ce cas le produit de deux séries formelles n'est pas toujours défini car les coefficients de la série produit se présentent sous forme de sommes infinies, ce qui pose des problèmes de convergence.

On peut associer à une série formelle $\Sigma\, \phi_n z^n$ (indexée avec N ou Z) la série de Fourier $\Sigma\, \phi_n \exp(in\theta)$, mais les choses sont moins simples que dans le cas des fonctions génératrices.

Remarquons finalement que B étant un opérateur linéaire et ϕ une série formelle, on peut chercher à définir l'opérateur $\phi(B) = \Sigma\, \phi_n B^n$. Ceci est un problème qui ne doit pas être mélangé avec ce qui précède. En particulier ce qui relève d'un calcul relatif aux fonctions génératrices n'a pas besoin d'être interprété en termes d'opérateurs. Une telle interprétation nécessiterait en effet des justifications dont on aurait pu se dispenser.

4.3 - Algèbre $\mathcal{B}$ des fonctions de transfert

Désignons par $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions de transfert définies par des suites $\phi = \{\phi_i : i \in N\}$ comme précisé plus haut, La formule (4) a toujours un sens lorsque $X \in P(N)$ car la série qui est dans le deuxième membre se réduit à une somme finie. Nous allons examiner les propriétés des fonctions de transfert ϕ sans nous soucier des problèmes de convergence, ce qui nous donnera des résultats toujours valides lorsque nous les interpréterons comme opérateurs dans $P(N)$ et valides sous des hypothèses que nous préciserons lorsque nous les interpréterons comme opérateurs sur d'autres espaces de processus.

L'addition et la multiplication par un nombre complexe α se traduisent pour les opérateurs linéaires ϕ, ψ par les formules :

$$(5) \qquad \begin{cases} (\phi + \psi)_n = \phi_n + \psi_n & , \ n \in N \\ (\alpha\phi)_n = \alpha\phi_n & , \ n \in N . \end{cases}$$

Considérons maintenant un système physique constitué par deux filtres ϕ et ψ opérant sur une série. Schématiquement nous avons

$$\xrightarrow{X} \boxed{\ \phi\ } \xrightarrow{Y} \boxed{\ \psi\ } \xrightarrow{Z}$$

et oubliant pour un moment le problème de convergence, nous pouvons écrire

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Y_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi_i X_{t-j-i} \right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} \phi_{n-m} \psi_m \right) X_{t-n} .$$

Ainsi, le filtre résultant qui relie Z à X est défini par la fonction de transfert

$$\left\{ \sum_{m=0}^{n} \phi_{n-m} \psi_m : n \in N \right\} .$$

La composition des opérateurs ϕ et ψ se traduit donc par :

$$(6) \qquad (\psi\phi)_n = \sum_{m=0}^{n} \phi_{n-m} \psi_m \quad , \quad n \in N .$$

Les opérations sur les fonctions de transfert se définissent donc exactement par les mêmes formules que pour les séries formelles. Compte tenu de ce que deux fonctions de transfert définissent le même opérateur si et seulement si elles ont les mêmes coefficients, on peut identifier l'algèbre $\mathcal{B}$ des fonctions de transfert avec l'algèbre des séries formelles. L'ensemble $\mathcal{B}$ est donc une algèbre commutative avec élément unité $1 = \{1,0,0,\dots\}$

Comme nous l'avons dit plus haut, l'algèbre $\mathcal{B}$ opère sur $P(N)$ car le deuxième membre de (4) se réduit à $\sum_{j=0}^{t} \phi_j X_{t-j}$ de sorte qu'il n'y a plus de problème de convergence. Cependant sur $P(Z)$ et même sur $P_\infty(Z)$, le problème de convergence surgit immédiatement.

Finalement, il est intéressant de noter que si $X \in P(N)$ et $\phi \in \mathcal{B}$, l'élément $\phi X \in P(N)$ défini par (4) n'est pas autre chose que le produit formel des séries formelles X et ϕ (la première à coefficients aléatoires et la deuxième à coefficients complexes).

Les éléments $\phi \neq 0$ de l'algèbre $\mathcal{B}$ sont des opérateurs injectifs sur $P(N)$. Soit en effet X un élément non nul de $P(N)$ dont la première composante non nulle est X_m. Si ϕ_n est le premier coefficient non nul de ϕ alors $\phi X \neq 0$ car ϕX a une première composante non nulle qui est $(\phi X)_{n+m} = \phi_n X_m$.

4.4 - L'opérateur B et l'algèbre $\mathcal{B}_0$ des polynômes en B

L'opérateur décalage à gauche B (backward shift operator) est la fonction de transfert définie dans $P(Z)$ par

$$(BX)_t = X_{t-1} . \tag{7}$$

Ainsi, $B = \{0,1,0,0,\dots\}$ de sorte que la série formelle associée à B se réduit à z et par conséquent, B peut être interprété comme opérateur de multiplication par z.

L'opérateur B peut aussi être considéré comme opérateur sur $P(N)$ et sur $P_\infty(Z)$ mais ses propriétés dépendent de l'espace sur lequel on considère qu'il agit.

Comme opérateur sur $P(Z)$ ou $P_\infty(Z)$, B est inversible d'inverse $F = B^{-1}$ (forward shift operator) défini par

$$(FX)_t = X_{t+1} . \tag{8}$$

On voit immédiatement que F n'admet pas de représentation de la forme (4) et par conséquent, F n'est pas physiquement réalisable. Donc, même si l'opérateur B est inversible, son inverse n'est pas dans l'algèbre $\mathcal{B}$.

Comme opérateur sur $P(N)$, B n'est pas inversible car il n'est pas surjectif. En effet, si $X = \{X_0,X_1,X_2,\dots\}$ on a $BX = \{0,X_0,X_1,X_2,\dots\}$, donc un processus $\{Y_0,Y_1,Y_2,\dots\}$ tel que $Y_0 \neq 0$ n'est pas dans l'image de B. Cependant on peut définir F sur $P(N)$ en posant

$$F\{X_0,X_1,X_2,\dots\} = \{X_1,X_2,\dots\} .$$

Il est immédiat de vérifier que $FB = I$, c'est-à-dire que B est inversible à gauche, mais on a $BF \neq I$ car

$$BF\{X_0,X_1,X_2,\dots\} = B\{X_1,X_2,\dots\} = \{0,X_1,X_2,\dots\} .$$

Considérons maintenant un polynôme $p(z)$. D'après la Section 2, l'opérateur $p(B)$ obtenu en substituant B à z est bien défini et il peut être interprété comme opérateur de multiplication par $p(z)$, si l'on écrit X sous forme de série formelle. Il est facile de montrer que l'ensemble des polynômes $p(B)$ constitue une sous-algèbre $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{B}$.

Les éléments de $\mathcal{B}_0$ opèrent sur chacun des trois espaces $P(Z)$, $P_\infty(Z)$ et $P(N)$.

Sur $\mathcal{P}(Z)$, on ne peut pas faire opérer d'autres éléments de $\mathcal{B}$ que les polynômes en B car si $\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n z^n$ n'est pas un polynôme, on peut toujours trouver un processus $X \in \mathcal{P}(Z)$ faisant diverger le deuxième membre de (4).

4.3 - L'algèbre $\mathcal{B}_1$ des fonctions de transfert stables

Etant donné $\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n z^n$, cherchons à quelle condition

$$(\phi X)_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j X_{t-j}$$

converge en moyenne d'ordre 1 pour tout $X \in \mathcal{P}_\infty(Z)$. En prenant X tel que $X_{-n} = X_0 \exp\{-i \arg \phi_n\}$ pour $n > 0$, on obtient $(\phi X)_0 = X_0 \sum_{j=0}^{\infty} |\phi_j|$, ce qui montre qu'il est nécessaire que $\sum_{j=0}^{\infty} |\phi_j| < \infty$. Si cette condition est réalisée, alors il y a convergence pour tout $X \in \mathcal{P}_\infty(Z)$. En effet, on a

$$E[|\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j X_{t-j}|] \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |\phi_j| \, E[|X_{t-j}|]$$

$$\leqslant \sup_{t \in Z} E[|X_t|] \sum_{j=0}^{\infty} |\phi_j| < \infty.$$

De plus, comme $\sum_{j=0}^{\infty} |\phi_j| < \infty$ implique que $\sum_{j=0}^{\infty} |\phi_j|^2 < \infty$, on vérifie également qu'il y a convergence en moyenne quadratique.

Notons $\mathcal{B}_1$ l'ensemble des $\phi \in \mathcal{B}$ tels que $\sum_{j=0}^{\infty} |\phi_j| < \infty$. Il est facile de vérifier que $\mathcal{B}_1$ est une sous-algèbre de $\mathcal{B}$. Nous dirons que les fonctions de transfert dans $\mathcal{B}_1$ sont stables (comme le font Box et Jenkins (1976), chap. 10), la stabilité signifiant que $\mathcal{P}_\infty(Z)$ est conservé.

En résumé, nous avons défini trois algèbres d'opérateurs qui satisfont la relation d'inclusion suivante :

$$\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}.$$

L'algèbre $\mathcal{B}_0$ des polynômes en B agit sur l'ensemble de tous les processus de $\mathcal{P}(Z)$, l'algèbre $\mathcal{B}$ agit sur les processus de $\mathcal{P}(N)$ et l'algèbre $\mathcal{B}_1$ agit sur les processus de $\mathcal{P}_\infty(Z)$ et de $\mathcal{P}(N)$.

5 - STATIONNARITE ET INVERSIBILITE D'UN PROCESSUS ARMA

5.1 - Stationnarité

Soit $A = \{A_t : t \in Z\}$ un bruit blanc c'est-à-dire une suite de variables aléatoires non-corrélées de moyenne 0 et de variance commune σ^2. Un processus ARMA(p,q) est un processus $X = \{X_t : t \in Z\}$ satisfaisant l'équation

(9) $$\phi(B)X = \theta(B)A$$

où $\phi(B) = 1-\phi_1 B-\dots-\phi_p B^p$ est appelé l'opérateur autorégressif et $\theta(B) = 1-\theta_1 B-\dots-\theta_q B^q$ est appelé l'opérateur moyenne mobile.

Nous allons déterminer les conditions de stationnarité en nous limitant aux solutions de (9) en fonction du passé, c'est-à-dire en supposant que le processus A est l'innovation associée à X. Cela revient à supposer que X_t peut être représenté en termes du bruit blanc de la façon suivante :

(10) $$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j A_{t-j} \quad , \ t \in Z.$$

D'après Doob (1953) p. 155, le membre de droite de (10) converge en moyenne quadratique si et seulement si $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$. Et alors, s'il y a convergence en moyenne quadratique, il n'est pas difficile de vérifier que X est stationnaire du second ordre avec

$$\begin{cases} E[X_t] = 0 \\ \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+k}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} , \quad k \geq 0 , \quad t \in Z . \end{cases}$$

Cependant dans le cas d'un processus ARMA admettant la représentation (10), (voir Box et Jenkins (1976) p. 96) les ψ_j satisfont l'équation aux différences

$$\phi(B)\psi_j = 0 \quad , \qquad j > \max\{p-1,q\}$$

et ainsi, d'après la théorie des équations aux différences (voir Jordan (1965)), si l'on écrit $\phi(B) = (1-G_1 B)^{e_1} \dots (1-G_s B)^{e_s}$, ψ_j est une combinaison linéaire de termes de la forme $j^m G_h^{\,j}$ avec $0 \leq m \leq e_h$. Mais comme chacune des séries $(j^m G_h^{\,j})^2$ converge si et seulement si $|G_h| < 1$, il s'ensuit qu'un processus ARMA représentable sous la forme (10) est stationnaire si et seulement si les racines de $\phi(z) = 1-\phi_1 z-\dots-\phi_p z^p$ sont à l'extérieur du cercle unité. De plus chacune des séries $j^m G_h^{\,j}$ étant convergente si et seulement si $|G_h| < 1$ ceci nous permet d'affirmer que selon la représentation (10), un processus ARMA est stationnaire si et seulement si $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$.

5.2 - Inversibilité

Un processus $X = \{X_t : t \in Z\}$ est dit inversible selon Box et Jenkins (1976) p. 50 si X_t admet la représentation

(11) $$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j} + A_t \ , \quad t \in Z$$

avec la condition $\sum_{j=1}^{\infty} |\pi_j| < \infty$ où A est un bruit blanc. Dans le cas d'un processus ARMA admettant la représentation (11), (voir Box et Jenkins (1976) p. 102) les π_j satisfont l'équation aux différences

$$\theta(B)\pi_j = 0 \quad , \qquad j > \max\{p,q\}$$

et par un raisonnement identique à celui fait pour la stationnarité, nous concluons qu'un tel processus est inversible si et seulement si les racines de $\theta(z) = 1-\theta_1 z-\ldots-\theta_q z^q$ sont à l'extérieur du cercle unité.

Plus loin, nous verrons que les condition de stationnarité et d'inversibilité d'un processus ARMA (représentable sous la forme (10) dans le cas stationnaire) correspondent aux conditions d'inversibilité dans $\mathcal{B}_1$ des opérateurs $\phi(B)$ et $\theta(B)$ respectivement.

6 - PROCESSUS ARMA DANS $\mathcal{P}(N)$

6.1 - Inversibilité de l'opérateur autorégressif

Nous considérons l'algèbre $\mathcal{B}$ d'opérateurs sur $\mathcal{P}(N)$. L'équation (9) se traduit alors par le système d'équations

$$(12)\qquad \begin{cases} X_0 = A_0 , \\ \vdots \\ X_{p-1} = A_{p-1} + \phi_1 X_{p-2} + \ldots + \phi_{p-1} X_0 , \\ X_{p+k} = A_{p+k} + \phi_1 X_{p+k-1} + \ldots + \phi_p X_k , \; k > 0. \end{cases}$$

Nous voyons que l'on peut calculer de proche en proche $X_0, X_1, \ldots$ en termes du bruit A, ce qui permet de conclure que tout polynôme $\phi(B) = 1-\phi_1 B-\ldots-\phi_p B^p$ est inversible dans $\mathcal{B}$ (on verrait de la même façon que toute série formelle $\phi(B) = \phi_0 + \phi_1 B + \phi_2 B^2 + \ldots$ telle que $\phi_0 \neq 0$ est inversible). En particulier l'opérateur différence $\nabla = 1-B$ est inversible.

Si $\phi(z) = \prod_{j=1}^{r} (1-G_j z)^{p_j}$, on peut obtenir l'opérateur $\phi(B)^{-1}$ en faisant un développement en série entière de $\frac{1}{\phi(z)}$ (calcul fonctionnel). En décomposant $\frac{1}{\phi(z)}$ en éléments simples, on est ramené au développement de fractions de la forme $(1-Gz)^{-s}$. On a pour une telle fraction :

$$(13)\qquad (1-Gz)^{-s} = 1 + \frac{s}{1!}(Gz) + \frac{s(s+1)}{2!}(Gz)^2 + \ldots$$

et en particulier, $(1-Gz)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (Gz)^n$, donc $(1-GB)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (GB)^n$.
On retrouve ici l'inverse de l'opérateur différence (aussi appelé opérateur de sommation et dénoté S) :

$$\nabla^{-1} = (1-B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B^n = S$$

et sur $\mathcal{P}(N)$, $(SX)_t = X_0 + X_1 + \ldots + X_t$.

6.2 - Simplification d'un facteur commun dans une égalité

Si l'on a dans $\mathcal{P}(N)$ une équation de la forme

$$\phi \, \psi \, X = \phi \, \theta \, A$$

où φ, ψ, $\theta \in \mathcal{B}$ avec $\phi = \phi_0 + \phi_1 B + \ldots \neq 0$, alors cette dernière équation est équivalente à

$$\psi X = \theta A \ ,$$

c'est-à-dire que l'on peut simplifier par ϕ. Cela résulte de ce que tout opérateur $\neq 0$ de de $\mathcal{B}$ est injectif sur $P(N)$ comme nous l'avons indiqué en 4.3.

6.3 - Conditions de stationnarité et d'inversibilité

De façon générale, un processus ARMA dans $P(N)$ n'est pas stationnaire au sens usuel du terme. Considérons un processus AR(1) :

$$(1-\phi B)X = A.$$

Nous pouvons alors écrire

$$X_t = \phi^t A_o + \phi^{t-1} A_1 + \ldots + A_t \quad , \quad t \geqslant 0$$

et il s'ensuit que

$$\begin{cases} E[X_t] = 0 \\ \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+k}) = \sigma^2 \phi^k \dfrac{1-\phi^{2(t+1)}}{1-\phi^2} \end{cases} \quad , \quad k \geqslant 0.$$

Nous constatons alors que X n'est pas stationnaire, cependant, si $|\phi| < 1$,

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+k}) = \frac{\sigma^2 \phi^k}{1-\phi^2} \quad , \quad k \geqslant 0$$

i.e. X est asymptotiquement stationnaire. Ainsi, dans $P(N)$, un processus AR(1) est asymptotiquement stationnaire si et seulement si la racine de $\phi(z) = 1-\phi z$ est à l'extérieur du cercle unité.

D'après un résultat de Parzen (1962), un processus ARMA dans $P(N)$

$$\phi(B)X = \theta(B)A$$

est asymptotiquement stationnaire si les racines de $\phi(z)$ sont à l'extérieur du cercle unité. Nous verrons en 7.1 que ceci correspond à la condition d'inversibilité de l'opérateur $\phi(B)$ dans $\mathcal{B}_1$.

Par contre, dans $P(N)$ un processus ARMA est toujours inversible puisque le fait de commencer à l'origine zéro fait disparaître le problème de convergence. Il s'agit alors d'inversibilité dans l'algèbre $\mathcal{B}$ et non plus dans l'algèbre $\mathcal{B}_1$.

7 - PROCESSUS ARMA DANS $P_\infty(Z)$

7.1 - Inversibilité d'un polynôme dans $\mathcal{B}_1$

Tout polynôme non nul se décomposant en un produit de facteurs du premier degré, il suffit d'examiner si B et 1-GB $(G \neq 0)$ sont inversibles. Nous avons déjà vu que B n'est pas inversible dans $\mathcal{B}$, donc a fortiori dans $\mathcal{B}_1$. Dans $\mathcal{B}$, l'inverse de 1-GB est $\sum_{n=0}^{\infty} (GB)^n$. Ce dernier opérateur est dans $\mathcal{B}_1$ si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} |G|^n < \infty$ c'est-à-dire si et seulement si $|G| < 1$. Ce qui précède permet d'affirmer que le polynôme $\phi(B)$ est inversible dans $\mathcal{B}_1$ si et seulement si le polynôme $\phi(z)$ a toutes ses racines à à l'extérieur du cercle unité.

7.2 - Simplification d'un facteur commun dans une égalité

Si l'on a dans $P_\infty(Z)$ une équation de la forme

$$\phi\psi X = \phi\theta A$$

où ϕ,ψ,θ sont des opérateurs de $\mathcal{B}_1$ avec ϕ polynôme non nul, on peut se demander si cette équation est équivalente à

$$\psi X = \theta A .$$

En décomposant ϕ en un produit de facteurs linéaires, on est ramené à répondre à la question pour $\phi(B) = B-\lambda I$. La réponse est positive pour $\lambda = 0$ car B est injectif. Supposons $\lambda \neq 0$ et cherchons si l'équation

$$(B-\lambda I)Y = 0$$

admet une solution $Y \neq 0$. Si Y est une telle solution, un calcul immédiat montre que l'on doit avoir

$$Y_n = \lambda^{-n} Y_0 , \; n \in Z .$$

Comme $Y_0 \neq 0$, on a un élément de $P_\infty(Z)$ si et seulement si $|\lambda| = 1$.
On en conclut donc qu'on peut simplifier par un polynôme ϕ si et seulement s'il ne possède pas de racine de module 1.

7.3 - Conditions de stationnarité et d'inversibilité

Nous avons vu en 5.1 qu'un processus ARMA représentable sous la forme (10) est stationnaire si et seulement si les racines du polynôme $\phi(z)$ sont à l'extérieur du cercle unité, mais ceci est la condition nécessaire et suffisante pour que $\phi(B)$ soit inversible dans $\mathcal{B}_1$. Donc, nous pouvons conclure qu'un processus ARMA représentable sous la forme (10) est stationnaire si et seulement si l'opérateur autorégressif $\phi(B)$ est inversible dans $\mathcal{B}_1$.

De même, nous pouvons affirmer qu'un processus ARMA est inversible si et seulement si l'opérateur moyenne mobile $\theta(B)$ est inversible dans $\mathcal{B}_1$.

8 - PROCESSUS ARIMA

Considérons un processus ARMA :

$$\phi(B)\ X = \theta(B)A\ .$$

En 5.1, nous avons vu qu'un tel processus supposé représentable sous la forme (10) est stationnaire si et seulement si les racines de $\phi(z)$ sont à l'extérieur du cercle unité.

Si $\phi(z)$ a des racines (supposées non nulles) dans ou sur le cercle unité, on peut écrire

$$\phi(z) = \phi_1(z)\ \phi_2(z)$$

où $\phi_1(z)$ a toutes ses racines dans ou sur le cercle unité et $\phi_2(z)$ toutes ses racines à l'extérieur du cercle unité. Si l'on pose $w = \phi_1(B)\ X$, on a

$$\phi_2(B)w = \theta(B)A$$

donc w est un processus ARMA stationnaire appartenant à $P_\infty(Z)$. Ensuite, d'après ce que l'on a vu en 6.1 et 7.1, la relation $\phi_1(B)\ X = w$ peut être inversée à condition de se placer dans $P(N)$. Le cas particulier $\phi_1(B) = (1-B)^d$ correspond aux processus ARIMA(p,d,q) de Box et Jenkins et $(1-B)^{-1} = S$ est l'opération de sommation.

9 - FONCTION GENERATRICE DES COVARIANCES

Soient X et Y deux processus de $P_\infty(Z)$ vérifiant pour tout $m, n, k \in Z$:

$$\mathrm{Cov}(X_n, Y_m) = \mathrm{Cov}(X_{n+k}, Y_{m+k})\ .$$

Dans ce cas on associe aux covariances la fonction génératrice :

$$\gamma(z;X,Y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Cov}(X_t, Y_{t+n})z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Cov}(X_0, Y_n)z^n.$$

On considère deux fonctions de transfert stables ϕ et ψ, c'est-à-dire telles que $\sum_{i=0}^{\infty} |\phi_i| < \infty$ et $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Alors le calcul qui suit est légitime dans le cadre des séries formelles :

$$\begin{aligned}\gamma(z;\phi X,\psi Y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \phi_i\ \psi_j\ \mathrm{Cov}(X_{-i}, Y_{n-j})z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \phi_i\ \psi_j\ z^j\ z^{-i}\ \mathrm{Cov}(X_{-i}, Y_{n-j})z^{n-j+i} \\ &= \phi(z^{-1})\ \psi(z)\ \ \gamma(z;X,Y).\end{aligned}$$

Nous avons donc démontré la formule suivante :

$$\gamma(z;\phi X,\psi Y) = \phi(z^{-1})\ \psi(z)\ \gamma(z;X,Y)\ .$$

En particulier si $X = Y$ et $\phi = \psi$ on a la formule :

$$\gamma(z;\phi X) = \phi(z^{-1})\ \phi(z)\ \gamma(z;X)$$

qui correspond à l'équation (A3.1.3) de Box et Jenkins (1976).

Si l'on suppose seulement au départ que X et Y sont des processus de $P_\infty(Z)$, on peut introduire la fonction génératrice de deux variables :

$$\gamma(u,v;X,Y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{Cov}(X_n,Y_m)\ u^n\ v^m$$

Un calcul analogue à celui qui précède donne la formule :

$$\gamma(u,v;\phi X,\psi Y) = \phi(u)\ \psi(v)\ \gamma(u,v;X,Y).$$

10 - CONCLUSION

Il se dégage de cet article que lorsqu'on travaille avec un processus ARMA dans $P_\infty(Z)$, on peut simplifier un facteur commun polynômial si et seulement s'il n'a pas de racines sur le cercle unité et qu'un opérateur polynômial est inversible si et seulement si ses racines sont à l'extérieur du cercle unité. En particulier, nous ne pouvons ni simplifier ni inverser l'opérateur différence $\nabla = 1-B$. Donc, pour l'étude des modèles ARIMA non-stationnaires $(d \geq 1)$, il y a un net avantage à se placer dans $P(N)$. En effet, nous avons vu que dans $P(N)$ tout facteur commun non-nul peut être simplifié et que tout opérateur polynomial de la forme $1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p\ B^p$ est inversible.

Un autre argument en faveur de $P(N)$ lorsqu'on étudie les processus ARIMA est le suivant. Considérons un processus X ARIMA(p,1,q). Alors $w = \nabla X$ est ARMA(p,q) stationnaire et la relation suivante nous donne X_t en termes des w_t :

$$X_t = \begin{cases} X_0 + (w_1 + \ldots + w_t)\ , & t \geq 1 \\ X_0 - (w_0 + w_{-1} + \ldots + w_{t+1})\ , & t \leq -1. \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$E[X_t] = E[X_0] + t\ \Gamma_w\ , \quad t \in Z$$

où Γ_w désigne la moyenne de w. D'où il s'ensuit que si $t \to -\infty$ et $\Gamma_w \neq 0$, $E[X_t] \to \pm\infty$. Donc dans ce cas tout au moins, il nous paraît déraisonnable de vouloir représenter X_t en termes des valeurs passées en remontant jusqu'à $-\infty$.

La situation ici peut paraître quelque peu paradoxale. En effet dans le cas stationnaire, il est avantageux d'un point de vue mathématique de se placer dans $P_\infty(Z)$ car les développements mathématiques sont en général plus simples et certains résultats plus élégants. Par contre dans le cas non-stationnaire, c'est tout le contraire. D'une part d'un point de vue concret, on est naturellement porté à considérer une série chronologique dans $P(N)$ et d'autre part, d'un point de vue mathématique, il y a aussi avantage à se situer dans $P(N)$ sinon les difficultés mathématiques deviennent vite insurmontables.

BIBLIOGRAPHIE

BOX, G.E.P., et JENKINS, G.M. (1976). Time Series Analysis Forecasting and Control. Edition revisée. Holden-Day, San Francisco.

CRAMER, H., et LEADBETTER, M.R. (1967). Stationary and Related Stocnastic Processes. Wiley, New York.

DOOB, J.L. (1953). Stochastic Processes. Wiley, New York.

DUNFORD, N., et SCHWARTZ, J.T. (1958). Linear Operators. Tome 1, Interscience Publishers, Inc., New York.

JORDAN, C. (1965). Calculus of Finite Differences. 3e édition. Chelsea Publishing Company, New York.

PAGANO, M. (1973). When is an autoregressive scheme stationary ?. Comm. Statist. 1, 533-544.

PARZEN, E. (1962). Spectral analysis of asymptotically stationary time series. Bull. Inst. Internat. Statist. 39, livraison 2, 87-103.