Statistique et analyse des données

Walter Schlee

Le processus stochastique et multiparamétrique défini par une estimation de la densité de probabilité

Statistique et analyse des données, tome 3, nº 3 (1978), p. 31-43.

<http://www.numdam.org/item?id=SAD_1978__3_3_31_0>

Statistique et Analyse des Données
3 - 1978 pp. 31,43

LE PROCESSUS STOCHASTIQUE ET MULTIPARAMÊTRIQUE DEFINI PAR UNE ESTIMATION DE LA DENSITÊ DE PROBABILITÊ

SCHLEE Walter

Technische Universität München, D-8000 München 2, Arcisstraße 21

Résumé : L'objet de l'étude est une estimation de la densité de probabilité bien adaptée aux besoins du calcul automatique. Cette méthode d'estimation est stimulée par un article de L.I. Boneva, D. Kendall et I. Stefanov: "Spline Transformations: Three New Diagnostic Aids for the Statistical Data-Analyst", Journal of the Royal Statistical Soc. Ser. B 33 (1971), 1-70. Dans le texte ici il est recherché une généralisation multidimensionelle, la loi asymptotique de probabilité et la convergence en moyenne quadratique pour toutes les éléments particuliers de l'espace $\mathbb{R}^q$. De plus la convergence en probabilité du processus stochastique defini par cette estimation de la densité est démontré.

1. L'ESTIMATION DE LA DENSITÊ

Soit $X_1,X_2,\ldots,X_n$ un échantillon d'une population à q dimensions avec la densité f de probabilité. Comme estimateur de cette densité il est proposé:

$$f_n(z_1,\ldots,z_q) = (nh^q)^{-1} \sum_{l=1}^{n} \prod_{j=1}^{q} k\left(\frac{z_j-i_j(x_l)\beta}{h}\right) \qquad (1.1)$$

Cet estimateur peut être transformé à la forme

$$f_n(x_1,\dots,x_q) = h^{-q} \sum_{i_1,\dots,i_q=-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{q} k\left(\frac{x_j-i_j\beta}{h}\right)\Delta_\beta(i_1,\dots,i_q)F_n \quad (1.1')$$

qui est utiliséedans les demonstrations des propriétés statistiques de f_n.

L'explication des paramètres est:

Il est donné une partition du $\mathbb{R}^q$ en intervalles

$$I(i) = \prod_{l=1}^{q} \left](i_l-1)\beta,\ i_l\beta\right]$$

avec longueur du côté $\beta(h)$.

$i(X_l) = (i_1(X_l),\dots,i_q(X_l))$ est le vecteur d'indices de l'intervalle $I(i)$ où l'épreuve X_l se trouve.

h est un paramètre positive. n dénote les nombres des épreuves. Les paramètres n, h,β sont associés par les limites:

$$\lim_{n\to\infty} h(n) = 0, \qquad \lim_{h\to 0} \beta(h)/h = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} nh^q(n) = \infty \qquad (1.2)$$

F_n est la répartition empirique, F est la répartition théorique, f est la densité théorique. On suppose que la fonction $k : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a les propriétés suivantes:

$$k(x) \geq 0,\ k(x) = 0 \qquad \forall\, x : |x| > C_x \qquad (1.3.1)$$

k est Riemann-intégrable (1.3.2)

$$\int_{\mathbb{R}} k(x)dx = 1 \qquad (1.3.3)$$

$$\sup_x |k(x)| \leq C_k \qquad (1.3.4)$$

$\Delta_\beta(i_1,\dots,i_q)g$ dénote la différence à plusieurs dimensions de la fonction $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ relativement à la partition du $\mathbb{R}^q$:

$$\Delta_\beta(i_1,\dots,i_q)g = \sum_{j_1,j_2,\dots,j_q} g((i_1-j_1)\beta,\dots,(i_q-j_q)\beta)(-1)^{j_1+\dots+j_q} \qquad (1.4)$$

où la somme est prise par toutes les valeurs $j_1, j_2, \ldots, j_q = 0,1$.

$\Delta_\beta(i_1,\ldots,i_q)F_n$ resp. $\Delta_\beta(i_1,\ldots,i_q)F$ est la probabilité empirique resp. théorique de l'intervalle $I(i_1,\ldots,i_q)$.

Pour les aises du calcul automatique nous proposons la suivante fonction k:

$$k(z)=\begin{cases} 0 & z \leq -3/2 \\ (z+3/2)^2/2 & -3/2 \leq z \leq -1/2 \\ 3/4 - z^2 & -1/2 \leq z \leq 1/2 \\ (z-3/2)^2/2 & 1/2 \leq z \leq 3/2 \\ 0 & 3/2 \leq z \end{cases} \qquad (1.5)$$

mais toutes les fonctions k sont admissibles satisfaisants les conditions décrites dessus. Cette fonction a eté éprouvé par Monte Carlo èchantillons feignants les lois de probabilité usuelles en statistique et quelques densités qui sont continues par morceaux.

La forme (1.1) d'estimateur f_n met devant les yeux que notre estimateur de "noyau" est different d'estimateur de Cacoullos (1966). L'estimateur de Cacoullos est un estimateur propre de noyau (cf. aussi par exemple Parzen (1962), Rosenblatt (1971)). En effet l'estimateur (1.1) doit être regardé comme un estimateur du noyau discret qui est calculable immédiatement. Par comparaison l'estimateur de Cacoullos est obtenu remplaçant dans (1.1) la quantité $i(X_1)/\beta$ par $X_1 = (X_{11},\ldots,X_{q1})$. Ça implique

$$f_n^c(z_1,\ldots,z_q) = (nh^q)^{-1} \sum_{j=1}^{n} \prod_{l=1}^{q} k\left(\frac{z_l - X_{il}}{h}\right) \qquad (1.6)$$

Pour la calculation cet estimateur f_n^c doit être discretifié, c'est à dire que f_n^c est calculé en points discrets seulement. Par contre à ce fait il suffit à calculer l'estimateur (1.1) en points $i\beta = (i_1\beta,\ldots,i_q\beta)$ pour tous i. Utilisant une fonction k comme (1.5) l'estimateur (1.1) peut être reconstruit entièrement par les valeurs dans ces points. C'est exactement cette forme discrète, qui multiplie les suppositions des théorèmes et augmente les demonstrations en comparaison au texte de Cacoullos. C'est pourquoi les démonstrations ne sont pas données en détail.

2. LES PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES

Les resultats de ce paragraphe sont fondés sur les tres lemmes suivants. On suppose que les propositions (1.3) sont valables pour les tres lemmes.

Lemme 1 :

$\forall\ l \geq 1$

$$\lim_{h\to 0} \sum_{i_1,\dots,i_q} \prod_{i=1}^{q} k^l\left(\frac{x_j - i_j\beta}{h}\right)\left(\frac{\beta}{h}\right)^q = \left(\int k^l(y)dy\right)^q \qquad (2.1)$$

Lemme 2 :

Soit g Riemann intégrable et $\int |g(x)| dx < \infty$

$\xi(i_1,\dots,i_q) \in \prod_{j=1}^{q}](i_j-1)\beta,\ i_j\beta]$ et g continue dans un voisinage de x:

Alors $\forall\ l \geq 1$

$$\lim_{h\to 0} \sum_{i_1,\dots,i_q} \prod_{j=1}^{q} k^l\left(\frac{x_j - i_j\beta}{h}\right)\left(\frac{\beta}{h}\right)^q g(\xi(i_1,\dots,i_q)) = g(x)\left(\int k^l(y)dy\right)^q \qquad (2.2)$$

Lemme 3 :

Soit g Riemann intégrable et $\int |g(x)| dx < \infty$, $(x_1,x_2,\dots,x_q) \neq (y_1,y_2,\dots,y_q)$.

Alors $\forall\ r,s \geq 1$

$$\lim_{h\to 0} \sum_{i_1,\dots,i_q} \prod_{j=1}^{q} k^r\left(\frac{x_j - i_j\beta}{h}\right) k^s\left(\frac{y_j - i_j\beta}{h}\right)\left(\frac{\beta}{h}\right)^q g(\xi(i_1,\dots,i_q)) = 0 \qquad (2.3)$$

Les démonstrations des trois lemmes sont analogiques à les lemmes correspondants de Cacoullos regardant la supposition additionelle d'intégrabilité de Riemann de k et de g. A ce moment là il n'est pas possible à reduire cette condition. Les démonstrations des lemmes 2 et 3 utilisent les lemmes précédants.

On peut considérer ces trois lemmes comme discretes versions des resultats correspondants de Bochner (1960), qui sont déjà appliqués par Parzen (1962) et Cacoullos (1966). Les démonstrations sont analogues à les démonstrations données par Bochner (1960), Parzen (1962) et Cacoullos (1966).

Théorème 1 :

Soit la densité théorique f Riemann intégrable.

L'espérance mathématique de f_n est non biaissée en limite pour tous $x \in \mathbb{R}^q$ où f est continue dans un voisinage de x :

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E} f_n(x) = f(x) . \tag{2.4}$$

En outre il est valable pour la variance :

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\,(\sqrt{nh^q}\; f_n(x)) = f(x) \cdot (\int k^2(y)dy\,)^q \tag{2.5}$$

Si k est symmétrique par rapport à O et f a dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 2 dans un voisinage de x et n est assez grand le biais est

$$b\left[f_n(x)\right] = \mathcal{E}(f_n(x)-f(x)) \approx \frac{h^2}{2} \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\Bigg|_x \int t^2 k(t)dt + \frac{\beta}{h} * \mathrm{const.} \tag{2.6}$$

Les relations (2.5), (2.6) et

$$\mathcal{E}(f_n(x)-f(x))^2 = \mathrm{Var}\,(f_n(x))+(b\left[f_n(x)\right])^2$$

annoncent la convergence en moyenne quadratique de f_n vers f en tous les points x où f a les propriétés ci-dessus.

A demontrer on utilise les lemmes 1,2,et 3 et les relations

$$\mathcal{E}(\beta^{-q}\Delta(i)(F_n-F)) = f(\xi(i))$$
$$\mathcal{E}(n\beta^{-q}(\Delta(i)(F_n-F))^2) = f(\xi(i))(1-\Delta(i)F)$$
$$\mathcal{E}(n\beta^{-q}\Delta(i)(F_n-F)*\Delta(l)(F_n-F)) = -f(\xi(i))f(\xi(l))\beta^q$$

$\xi(i)$ est un valeur propre de l'intervalle $\prod_{l=1}^{q}](i_l -1)\beta,\ i_l\beta]$.

<u>Théorème 2 :</u>

Soient $\tilde{Z}_n = \sqrt{nh^q}\ (f_n - \mathcal{E}f_n)$ et $\lim_{n\to\infty} n(\beta(h(n)))^q < \infty$. Il est supposé que $x, x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^q$, r quelque nombre naturel, dénotent points où la densité f est continue et strictement positive. Alors :

Le vecteur aléatoire $(\tilde{Z}_n(x_1), \ldots, \tilde{Z}_n(x_r))$ converge faiblement vers un vecteur aléatoire gaussien avec espérance O et les variances asymptotiques données par (2.5). Les covariances asymptotiques sont O.

<u>Remarque :</u>

$\tilde{Z}_n$ peut être replacé par $Z_n^* = \sqrt{nh^q}\ (f_n - f)$ seulement si on suppose conditions supplémentaires pour h(n).

La démonstration de ce théorème a besoin

(i) des resultats du théorème 1,

(ii) du lemme 3 pour la calculation des covariances asymptotiques,

(iii) d'un théorème limite centrale à plusieurs dimensions. Appliquant le critère de la convergence vers la loi gaussienne de Loève (1977, p. 307) on établit le resultat:

<u>Lemme 4 :</u>

X_{nk} $k = 1,2,\ldots,n$ soient vecteurs aléatoires independants.

On suppose que l'espérance mathematique de X_{nk} est O. La matrice des covariances soit designée par $\mathcal{C}^{(nk)} = (\sigma_{ij}^{(nk)})$.

X_{ink} denote la i-ième coordonée du vecteur X_{nk}.
Si les relations

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ij}^{(nk)} = 0 \qquad \text{pour } i \neq j \tag{2.7.1}$$

$$\min_{i} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ii}^{(nk)} > 0 \tag{2.7.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \max_{i} \mathcal{E}\left|X_{ink}\right|^3 = 0 \tag{2.7.3}$$

sont valables alors

$Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_{nk}$ converge faiblement vers un vecteur aléatoire gaussien avec espérance mathematique 0 et avec une matrice des covariances qui est diagonale et a les elements diagonaux $\lim_{n} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ii}^{(nk)} = \sigma_i^2$.

Ce lemme implique théorème 2 par la proposition bien connue qu' une vecteur aléatoire a une répartition gaussienne si toutes les applications linéaires de ce vecteur sont variables aléatoires gaussiennes de la dimension un.

3. LE PROCESSUS STOCHASTIQUE

3.1 Un espace propre

Il n'y a que deux textes concernants le processus stochastique defini par l'estimation de densité (Cacoullos (1966), Rosenblatt(1971)). Mais Cacoullos démontre seulement la convergence faible des distributions marginales à dimensions finies du processus stochastique $Z_n^c = \sqrt{nh^q}(f_n^c - \mathcal{E}f_n^c)$. Ce n'est pas assez (Cf. par exemple Billingsley (1968)). En effet il est possible à démontrer complètement la convergence faible du processus Z_n^c, mais dans le texte ici nous considerons seulement le processus $\mathcal{Z}_n$ défini par l'estimateur (1.1). D'autre part Rosenblatt normalise son processus d'une manière, qui est moins praticable.
Les densités théoriques avec discontinuités ne sont pas traitées jusqu'ici. Neanmoins cettes densités sont necessaires pour la pratique. En outre il est

meilleur de considerer l'espace $\mathbb{R}^q$ que l'espace $[0,1]^q$ comme l'espace paramétrique (par contre à Rosenblatt).

L'espace propre est un espace de Skorohod. Nous élaborons cet espace $D(\mathbb{R}^q)$ selon la conception de Straf (1970).

Ajustant la partition de l'intervalle de Neuhaus (1971) à l'espace parametrique $\mathbb{R}^q$ nous parvenons à critères plus pratique que les critères de Straf (1970) pour la convergence du processus stochastique dans $D(\mathbb{R}^q)$.

L'espace $D(\mathbb{R}^q)$ se compose d'un sous-ensemble de l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$. Il est muni d'une métrique qui engendre un espace métrique complet.

A définir la métrique nous utilisons un ensemble des fonctions $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2 \ldots \ldots \Lambda_q$. L'ensemble Λ_i est un ensemble des fonctions strictement croissantes $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui ont une dérivée en tous les points.

En Λ_i nous définissons une norme qui est compatible avec la loi de la composition des fonctions $\lambda \in \Lambda_i$:

$$\|\lambda_i\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left|\log \lambda'(t)\right| + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \sup_{|t| \geq \gamma_j} \left|\log\left|\frac{\lambda(t)}{t}\right|\right| \tag{3.1}$$

où (γ_j) est une séquence strictement croissante des nombres positifs qui ne sont pas bornés.

Il y resulte une norme dans Λ :

$$\|\lambda\| = \max_{i=1,2,..,q} \|\lambda_i\|_i \qquad \forall \; \lambda = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \ldots \times \lambda_q \tag{3.2}$$

En effet il est possible démontrer que $\|\lambda\|_i$ et $\|\lambda\|$ sont normes.

Désormais nous utilisons la dénotation Λ pour le sous-ensemble défini par $\|\lambda\| < \infty$.

Les partitions finies du $\mathbb{R}^q$ à intervalles annoncées ci-dessus sont définies comme suit:

Soient donnés les points $t_1, t_2, \ldots, t_r \in \mathbb{R}^q$. Ces points sont augmentés par les deux points $t_o = (-\infty, \ldots, -\infty)$ et $t_{r+1} = (+\infty, \ldots, +\infty)$. La partition $\mathcal{R}(t_1, t_2, \ldots, t_r)$ engendrée par $t_1, \ldots, t_r$ est l'ensemble de tous les intervalles R :

$$R =]u_1, u_1'\rangle \times \ldots\ldots \times]u_q, u_q'\rangle$$

où "$\rangle$" est egale à "$]$" resp. "$[$" si $u_j < \infty$ resp $= \infty$ (3.3)
et u_j, $u_j' \in K_j = \{t_{oj}, \ldots, t_{r+1j}\}$ et $u_j < u_j'$, $]u_j, u_j'[\cap K_j = \emptyset$.

On dit que la partition $\mathcal{R}'(t_1', \ldots, t_r')$ est plus fine que $\mathcal{R}(t_1, \ldots, t_r)$ si

$$\{t_1, \ldots, t_r\} \subset \{t_1', \ldots, t'_{r'}\} \qquad r' \geq r$$

$$t_1' \leq t_1 \qquad t'_{r'} \geq t_r$$

(où $\leq$ denote l'ordre des vecteurs)

$$m(\mathcal{R}) \geq m(\mathcal{R}')$$

où $m(\mathcal{R})$ est la longueur du plus petit côté entre tous les intervalles finis de $\mathcal{R}$.

La relation "plus fin" est une relation d'ordre dans l'ensemble des partitions $\mathcal{R}(t_1, \ldots, t_r)$ du $\mathbb{R}^q$.

On dit que f: $\mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier s'il existe une partition $\mathcal{R}(t_1, \ldots, t_r)$ tel que f est constante sur chaque intervalle R d'une certaine partition $\mathcal{R}(t_1, \ldots, t_r)$.

Soit $B(\mathbb{R}^q)$ l'ensemble de toutes les fonctions réelles bornées $f : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$. La métrique de Skorohod en $B(\mathbb{R}^q)$ est défini avec l'aide de la norme $\|\ldots\|$ sur Λ selon Straf (1970):

$$d(x,y) = \inf_{\varepsilon} \{ \varepsilon > 0, \exists \lambda \in \Lambda, \|\lambda\| < \varepsilon \text{ et } \sup_t |x(t) - y(\lambda t)| < \varepsilon \} \qquad (3.4)$$

Définition :
$D(\mathbb{R}^q)$ est l'ensemble des fonctions de $B(\mathbb{R}^q)$ qui a une distance Skorohodienne O de l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions en escalier :

$$D(\mathbb{R}^q) = \left\{ x \in B(\mathbb{R}^q),\ d(x,\mathcal{E}) = 0 \right\}$$

Suivant Straf (1970) on démontre que $D(\mathbb{R}^q)$ est un espace (quasi-)métrique complet.

Les elements $f \in D(\mathbb{R}^q)$ peuvent être caractérisés uniquement par un module $w'(f,\delta,\gamma)$. Soit $w(f,R) = \sup \left\{ |f(t)-f(s)| : t,s \in R \right\}$

$$w'(f,\delta,\gamma) = \inf_{\mathcal{R}} \max_{R \in \mathcal{R}} w(f,R) \tag{3.5}$$

où l'infimum est pris dans les partitions $\mathcal{R}(t_1,\ldots,t_r)$ qui a $m(\mathcal{R}) \geq \delta$ et $|t_1|, |t_r| \leq \gamma$.

On a le resultat :

Pour que $f \in D(\mathbb{R}^q)$ il faut et il suffit que $\lim\limits_{(\delta,\gamma)} w'(f,\delta,\gamma) = 0$. La limite est prise en direction de l'ordre des partitions comme il est décrit par δ et γ.

Suivant Straf (1970) et Neuhaus 1971 et utilisant la caracterisation d'un espace relativement compact par Ascoli on parvient à

<u>Théorème 3 :</u>

Pour qu'une suite $\{x_n\}$ des processus stochastiques de $D(\mathbb{R}^q)$ convergent faiblement il faut et il suffit que

les distributions marginales à dimensions finies de X_n convergent faiblement dans un sous-ensemble dense du $\mathbb{R}^q$ (3.6)

et pour tous $\varepsilon > 0$ il existe un $M_\varepsilon \in \mathbb{R}$ avec

$$P(\sup_t |X_n(t)| > M_\varepsilon) < \varepsilon \qquad \forall n \tag{3.7}$$

et pour tous $\varepsilon > 0$

$$\lim_{(\delta,\gamma)} \limsup_{n \to \infty} P(w'(x_n,\delta,\gamma) > \varepsilon) = 0 \tag{3.8}$$

où $\lim\limits_{(\delta,\gamma)}$ est prise en direction de l'ordre des partitions $(\delta \to 0, \gamma \to +\infty)$.

Théorème 4 :

On suppose que

(4.1) la densité théorique f est un element de D($\mathbb{R}^q$) et

(4.2) pour tous les $\delta = m(\mathcal{R})$ assez petits et pour tous les $\gamma = \max(|t_1|, |t_r|)$ assez grands il y a une partition $\mathcal{R}(t_1,\ldots,t_r)$ tellement que f a derivées partielles bornées en toutes les variables dans l'intérieur de chaque $R \in \mathcal{R}$ et

(4.3) la fonction k qui se trouve dans la formule de l'estimateur f_n a une derivée et

(4.4) le paramètre β est une fonction du nombre n d'échantillon tellement que $\beta^q \doteq$ const/n pour tous n assez grands.

A ces conditions l'estimation $\tilde{Z}_n(t) = \sqrt{nh^q}\,(f_n(t) - \mathcal{E}f_n(t))$ considerée comme un processus stochastique q-paramétrique en D($\mathbb{R}^q$) converge faiblement vers un processus aléatoire gaussien.

Démonstration :

Il faut démontrer les suppositions (3.6), (3.7) et (3.8) du théorème 3.

La supposition (3.6) se montre juste parceque sous les conditions (4.1) - (4.3) les points de continuité de f sont dense dans $\mathbb{R}^q$ et le théorème 2 est valable.

En fin les deux lemmes 5 et 6 suivantes établissent les suppositions (3.7) et (3.8).

Les suppositions de théorème 4 soient valables pour les lemmes 5 et 6. A cause de brevité soit

$$\hat{k}(x,i) = \prod_{j=1}^{q} k\left(\frac{x_j - i_j\beta}{h} \right).$$

Lemme 5 :

R est un element de la partition $\mathcal{R}(t_1,\ldots,t_r)$ qui est choisie par rapport à f comme il est décrit en théorème 4.

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{u_1,\ldots,u_q} \sum_{i_1,\ldots,i_q} \hat{k}(u\beta,i)^{2l} f(\xi(i)) \frac{\beta^{2q}}{h^q} = \int_R f dx \left(\int k(y)^{2l} dy\right)^q$$

Lemme 6 :

Il existe une constante propre ρ_{2l} tellement que pour tous v :

$$\text{a) } \mathcal{E}\left|\tilde{Z}_n(t)\right|^{2l} \leq \left(\frac{\beta}{h}\right)^{(l-1)q} \rho_{2l}\Big(\sum_{i_1,\dots,i_q} \hat{k}(t,i)^{2l} f(\xi(i))\left(\frac{\beta}{h}\right)^q + o(\beta^q)\Big)$$

$$\text{b) } \mathcal{E}\left|\tilde{Z}_n(t)-\tilde{Z}_n(s)\right|^{2l} \leq \rho_{2l}\left(\frac{\beta}{h}\right)^{(l-1)q}\Big[\sum_{i_1,\dots,i_q}\left|\hat{k}(t,i)-\hat{k}(s,i+v)\right|^{2l} f(\xi(i+v))\left(\frac{\beta}{h}\right)^q + \sum_{i_1,\dots,i_q} \hat{k}(t,i)^{2l}(f(\xi(i))+f(\xi(i+v)))\left(\frac{\beta}{h}\right)^q + o(\beta^q)\Big].$$

La démonstration du lemme 5 utilise lemme 1 et les suppositions (4.1) et (4.2).

En la démonstration du lemme 6 les moments des variables aléatoires $\tilde{Z}_n(t)$ et $\tilde{Z}_n(t)-\tilde{Z}_n(s)$ sont évalués par raisonner analogiquement à le lemme (5.2) de Neuhaus (1971) et par utiliser les lemmes 1,2,3 ci-dessus et les suppositions des derivées de f.

Par les suppositions (4.2), (4.3) et (4.4) les supremums dans (3.7) et (3.8) sont ramenés à les supremums sur les points de la partition $\mathcal{R}(t_1,\dots,t_r)$ qui existe par (4.2).

RÉFÉRENCES

Billingsley, P. (1968), "Convergence of probability measures", John Wiley, New York.

Bochner, S. (1960), "Harmonic Analysis and the theory of probability", Univ. of California Press.

Cacoullos, T. (1966), "Estimation of a multivariate density", Annals of the Inst. of Statistical Mathematics, Japan, Vol. 18, 179 - 189.

Loève, M. (1977), "Probability theory I", Springer Verlag, Berlin.

Neuhaus, G. (1971), "On Weak Convergence of Stochastic Processes with Multidimensional Time Parameter", The Annals of Mathematical Statistics 42, 1285-1295.

Parzen, E. (1962), "On estimation of a probability density function and mode", Ann. Math. Statistics, Vol. 33, 1065 - 1076.

Rosenblatt, M. (1971), "Curve estimates", The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 42, 1815 - 1842.

Straf, M.L. (1970), "Weak Convergence of stochastic processes with several parameters", Proc. Sixth Berkeley Symposium on Math. Statist. and Prob., Vol. II 187 - 221, University of California Press.