

# STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

ANTONIO BELLACICCO

ANNA LABELLA

**Sur la caractérisation abstraite de la correspondance dans les tableaux de contingence en termes de structures de groupement**

*Statistique et analyse des données*, tome 2, n° 2 (1977), p. 59-72.

[http://www.numdam.org/item?id=SAD\\_1977\\_\\_2\\_2\\_59\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAD_1977__2_2_59_0)

© Association pour la statistique et ses utilisations, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Statistique et analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LA CARACTÉRISATION ABSTRAITE DE LA CORRESPONDANCE DANS LES TABLEAUX DE  
CONTINGENCE EN TERMES DE STRUCTURES DE GROUPEMENT

Antonio Bellacicco (°)

Anna Labella (°°)

### 1. Introduction

Le but de ce travail est de montrer la connexion entre l'analyse classique de la dépendance dans un tableau de contingence et l'analyse de correspondance en termes de structures de groupement. Nous allons montrer que les deux méthodologies sont en vérité les deux aspects du même problème, c'est à dire l'identification de la loi mathématique qui joint deux caractères associés dans un tableau de contingence. De plus, nous allons montrer que l'approche méthodologique, développée par Benzécri, (1), c'est à dire la quantification d'un caractère donné induite par l'analyse des correspondances, peut être aisément comprise dans le cadre de l'identification d'une structure de groupement.

La mesure du degré d'association entre deux caractères associés dans un tableau de contingence sans aucune spécification fonctionnelle a priori de la loi qui est supposée lier les deux caractères a été un sujet d'étude pendant plusieurs années dans le milieu de la statistique descriptive et un grand nombre d'indicateurs de correspondance, c'est-à-dire de dépendance, dans un tableau de contingence, a été proposé par beaucoup d'auteurs; voir par exemple (1), (2), (3) et (4).

En effet, l'analyse de correspondance dans un tableau de dépendance peut être réalisée soit par la recherche d'un indicateur soit par l'identification d'une loi mathématique sous-jacente qui lie les deux caractères X et Y associés dans le tableau de contingence et qui apparaîtra comme une structure de groupement dans le sens des méthodologies de l'analyse du groupement (cluster analysis); voir par exemple (5) et (6).

Nous allons montrer qu'une condition purement suffisante pour l'existence d'une structure de groupement est constituée par l'ordre des modalités de

---

(°) Istituto di Calcolo delle Probabilità Univ. de Rome - Italie -

(°°) Istituto Matematico G. Castelnuovo Univ. de Rome - Italie -

l'un ou de l'autre des deux caractères X et Y, c'est-à-dire l'ordre dans le codage de X et Y, et que le bon ordre est la structure mathématique la plus essentielle pour la définition d'une structure de correspondance.

## 2. La classe de Fréchet

Soient X et Y deux ensembles finis et considérons l'application suivante

$$\{n_{ij}\}: X \times Y \longrightarrow I$$

où I est l'ensemble des nombres naturels. En effet, l'application  $\{n_{ij}\}$  définit un tableau de contingence. Supposons maintenant que sur X et Y soit donnée une structure de bon ordre et qu'à chaque élément de X et de Y soit associé un nombre entier, fixé une fois pour toutes. On appelle classe de Fréchet l'ensemble de toutes les applications  $\{n_{ij}\}, H(X, Y)$ , qui respectent les marges données sur  $\{n_{ij}\}$ . Fréchet a montré que dans la classe  $H(X, Y)$  il y a trois tableaux de contingence particuliers, c'est-à-dire: le tableau d'indépendance statistique, les tableaux  $\{n_{ij}^0\}$  et  $\{n_{ij}^1\}$ , où  $\{n_{ij}^0\}$  correspond à une relation statistique monotone non croissante et  $\{n_{ij}^1\}$  correspond à une relation statistique monotone non décroissante. Fréchet a montré qu'on peut construire les deux tableaux  $\{n_{ij}^0\}$  et  $\{n_{ij}^1\}$  avec des programmes linéaires; voir (7). Considérons maintenant sur le tableau  $\{n_{ij}\}$  la fonction de distance

$$d(X, Y) = \sum_i \sum_j (X_i - Y_j)^2 n_{ij}$$

où  $X = \{X_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, h$  et  $Y = \{Y_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ . On peut montrer que la fonction  $d(X, Y)$  atteint son minimum quand on a:  $\{n_{ij}\} = \{n_{ij}^0\}$  ou  $\{n_{ij}\} = \{n_{ij}^1\}$ ; la démonstration est tout à fait élémentaire et nous la reproduisons dans l'Annexe I à ce papier; voir Castellano (8). A partir de l'égalité suivante:

$$\frac{1}{N} d(X, Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + (\bar{X} - \bar{Y})^2 - 2 r(X, Y) \sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}$$

où  $\text{Var}(\quad)$  indique la variance et  $r(X, Y)$  indique le coefficient de corrélation linéaire, on peut voir que si le minimum de  $d(X, Y)$  est atteint dans le cas  $\{n_{ij}\} = \{n_{ij}^0\}$  on a le maximum de la corrélation négative et viceversa si le minimum de  $d(X, Y)$  est atteint dans le cas  $\{n_{ij}\} = \{n_{ij}^1\}$  on a le maximum de la corrélation positive.

La conséquence immédiate de cette proposition est qu'on peut maximiser le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y en le calculant sur le tableau  $\{n_{ij}^0\}$  ou  $\{n_{ij}^1\}$ . Il découle de cette affirmation qu'on peut toujours construire une correspondance fonctionnelle entre X et Y, c'est à dire une relation monotone, non croissante ou non décroissante, et que la condition essentielle pour qu'on puisse la construire est simplement l'ordre de X et de Y. Viceversa, si on suppose déjà donnée la correspondance fonctionnelle,  $\{n_{ij}^0\}$  ou  $\{n_{ij}^1\}$ , que nous appellerons structure de correspondance, on peut se proposer de caractériser la structure mathématique de X et de Y.

### 3. Structure de groupement dans un tableau de contingence

Considérons deux caractères X et Y avec leur modalités données à priori que nous désignons comme deux partitions  $\pi(x) = \{X_1, X_2, \dots, X_h\}$  et  $\pi(y) = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_k\}$ , dans un tableau de contingence donné, (X, Y):

	$X_1$	$X_2$	$\dots$	$X_j$	$\dots$	$X_h$	
$Y_1$	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="border-right: 1px dashed black; padding-right: 5px; margin-right: 5px;"> <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math> </div> <div style="border-right: 1px dashed black; padding-right: 5px; margin-right: 5px;"> <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math> </div> <div style="border-right: 1px dashed black; padding-right: 5px; margin-right: 5px;"> <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math> </div> <div style="border-right: 1px dashed black; padding-right: 5px; margin-right: 5px;"> <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math> </div> <div style="border-right: 1px dashed black; padding-right: 5px; margin-right: 5px;"> <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math> </div> <div style="border-right: 1px dashed black; padding-right: 5px; margin-right: 5px;"> <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math>  <math>\vdots</math> </div> </div>						$n_{1\circ}$
$Y_2$							$n_{2\circ}$
$\vdots$							$\vdots$
$Y_i$							$n_{i\circ}$
$\vdots$							$\vdots$
$Y_k$	$n_{k\circ}$						
	$n_{\circ 1}$	$n_{\circ 2}$	$\dots$	$n_{\circ j}$	$\dots$	$n_{\circ h}$	N

où  $n_{\circ j} = \sum_i n_{ij}$ ,  $n_{i\circ} = \sum_j n_{ij}$  et  $N = \sum_j n_{\circ j} = \sum_i n_{i\circ}$ .

Dorénavant nous ne supposerons donnée aucune structure mathématique sur X et Y, c'est-à-dire aucune hypothèse sur le niveau de mesure de X et Y. Maintenant, nous considérons le tableau suivant des données, à N lignes et N colonnes, T(X, Y), où  $x_j$  et  $y_j$  sont maintenant considérés seulement comme des éléments d'ensembles quelconques, X et Y:

	$x_1$	$x_1, \dots, x_1$	$x_2$	$x_2, \dots, x_2$	$x_j$	$x_j, \dots, x_j$	$x_h$	$x_h, \dots, x_h$
$y_1$								
$y_1$								
$\vdots$								
$y_1$								
$y_2$								
$\vdots$								
$y_2$								
$\vdots$								
$y_i$					$w_{ij}$			
$\vdots$								
$y_i$								
$\vdots$								
$y_k$								
$\vdots$								
$y_k$								

où l'élément générique  $w_{ij}$  est égal à 1 dans le cas où il-y-a un individu dans l'ensemble  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}$  qui possède les deux modalités  $X_j$  et  $Y_i$ , de façon qu'à une fréquence  $n_{ij} = r$  donnée à l'intersection  $(i, j)$  du tableau  $(X, Y)$  corresponde un bloc carré  $b(r, r)$  de 1 dans le tableau  $T(X, Y)$  qui représente la correspondance entre les éléments de ligne et de colonne et en plus les blocs ne se superposent pas. Voir l'Annexe II pour un exemple de  $T(X, Y)$ .

Viceversa, nous pouvons considérer déjà donné un tableau  $T(X, Y)$  qui peut être considéré comme le produit de deux partitions du même ensemble  $S$

$$\pi(x) = \{X_1, X_2, \dots, X_h\} \text{ et } \pi(y) = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_k\}$$

En effet,  $T(X, Y)$  peut être considéré comme la matrice associée à un graphe avec  $N$  sommets, c'est à dire le graphe associé au produit des deux partitions  $\pi(x)$  et  $\pi(y)$ , construites sur l'ensemble commun  $S$ . En général nous pouvons considérer  $T(X, Y)$  comme le tableau d'association des deux ensembles  $X$  et  $Y$ , dont les éléments sont tous identifiables et sur lequel on va chercher une correspondance qui soit une correspondance fonctionnelle, avec des méthodes de groupement.

Soit  $\mathcal{P}(Y)$  l'ensemble de toute partition possible de l'ensemble  $Y$  et  $f$

une évaluation à interpréter comme la qualité des partitions, du type,

$$f: \Sigma(Y) \longrightarrow R \quad |1|$$

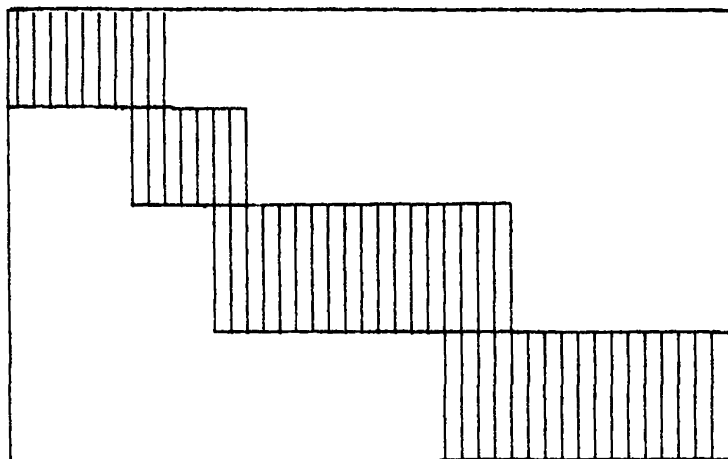
où  $R$  est l'ensemble des nombres réels. Nous avons la définition suivante:

Définition 1: soient  $\Sigma(Y)$  et  $f$ ; une procédure de groupement est un algorithme d'exploration de  $\Sigma(Y)$  capable d'identifier la partition  $\pi^* \in \Sigma(Y)$  telle que  $f(\pi^*) = \max$  sur  $\Sigma(Y)$ .

Définition 2: une structure de groupement sur  $T(X, Y)$  est une partition obtenue par une procédure de groupement sur les lignes de  $T(X, Y)$  telle que chaque classe de  $\pi^*$  induit une bipartition sur les colonnes de  $T(X, Y)$ .

Définition 3: Une structure de correspondance sur  $T(X, Y)$  est une structure de groupement telle que soit minimum le nombre de colonnes qui appartiennent en même temps à deux ou plusieurs  $\pi \in \Sigma(Y)$ .

Une représentation graphique d'une structure de correspondance peut être fournie par le tableau suivant, où nous avons effacé les indications de ligne et de colonne, que nous avons discuté dans un travail précédent, (10):



En effet, l'espace des partitions  $\Sigma(Y)$  ne jouit pas de toutes les propriétés de  $R$  parce qu'il est seulement un ensemble partiellement ordonné. Cependant, il est possible de voir que  $\Sigma(Y)$  peut être envisagé comme un espace topologique qui localement peut jouir d'une structure semblable à la structure de  $R$ , (9). Afin d'avoir une bonne représentation sur  $R$ , qui est un ensemble totalement ordonné, nous devons introduire quelques hypothèses auxiliaires sur

f, c'est-à-dire il est nécessaire de s'assurer que f soit vraiment une valuation monotone. Nous avons le théorème qui établit condition suffisante:

Théorème 1 - Une condition suffisante pour avoir une structure de correspondance est l'existence d'un bon ordre de colonne ou de ligne du tableau même.

Nous ne démontrons pas ici ce théorème, que nous avons déjà démontré en (9). Maintenant nous sommes en face de deux situations:

1. on présuppose l'existence d'une loi mathématique donnée,  $\Phi(T)$ , c'est-à-dire une structure de correspondance sur  $T(X, Y)$ , et nous cherchons à donner une structure mathématique ou à l'ensemble Y des lignes ou à l'ensemble X des colonnes ou aux deux; nous appelons ce problème problème de quantification.
2. on présuppose une structure mathématique  $\Psi(X)$  sur X et/ou  $\Psi(Y)$  sur Y et nous voulons obtenir une structure de correspondance  $\Phi(T)$  sur le tableau  $T(X, Y)$ . Le Théorème 1 en effet nous donne la possibilité de construire une structure de groupement; nous appelons ce problème problème de correspondance.

En réalité le problème de quantification est abordé par la méthode de l'analyse des correspondances qui a été développée par Benzécri, et d'autres, par exemple (11), (12) et (13), qui maximisent le coefficient de corrélation canonique entre l'ensemble de lignes Y et l'ensemble de colonnes X. On peut voir que la quantification donnée aux ensembles Y et X se réduit à considérer X et Y évalués sur R, jouissant en même temps de la même structure de R. Le problème de correspondance, d'un autre côté, constitue soit un chapitre de l'analyse de la dépendance entre deux ensembles X et Y associés dans un tableau de contingence, soit, comme on verra dans le paragraphe suivant, un problème de l'analyse des groupements sur un tableau de données.

#### 4. La préexistence d'une structure de correspondance, $\Phi(T)$ .

Nous allons analyser dans ce paragraphe le problème de quantification d'un point de vue abstrait.

Soit  $T_1 = T(X, Y)$  le produit cartésien  $Y \times X$ , et considérons une application

$$\theta_1 : T_1 \longrightarrow R^+$$

qui représente la structure de correspondance de  $T_1$ , c'est-à-dire  $\Phi(T_1)$ , tel-

le que chaque élément de  $T_i$  est représenté sur  $R^+$ , où  $R^+$  indique l'ensemble des nombres réels non-négatifs<sup>(\*)</sup>.

Considérons de plus l'application

$$g \theta_i: T_i \xrightarrow{\theta_i} R^+ \xrightarrow{g} R^+$$

où  $g$  est une fonction continue avec des propriétés d'invariance fixées. Nous pouvons considérer par exemple une fonction  $g$  qui soit invariante par transformations linéaires. Maintenant nous supposons que  $g \theta_i$  est effectivement donnée a priori, le problème est de montrer que les ensembles  $X$  et  $Y$  jouissent des mêmes propriétés que  $T(X,Y)$  lorsque on lui associe cette fonction  $g \theta_i$ .

Les théorèmes suivants nous donnerons une condition suffisante dans les cas d'invariance topologique et d'ordre partiel.

Theorème 2 - Supposons que l'application  $g \theta_i$  soit donnée; on peut induire sur  $T(X,Y)$  une famille de structures d'espace topologique, subordonnée aux propriétés d'invariance de  $g$  et qui peut aussi être restreinte à  $X$  et  $Y$ .

Dém.  $g \theta_i$  soit donnée; nous pouvons considérer le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} T_i & \longleftrightarrow & T_j \\ \theta_i \downarrow & & \downarrow \theta_j \\ R^+ & \xrightarrow{g} & R^+ \end{array}$$

où  $\theta_j = g \theta_i$ , qui peut être lu de la façon suivante. Donnée une application  $\theta_i$ , considérons l'application continue  $g$ ; en composant les deux nous obtenons une application  $\theta_j$  qui a comme source le même ensemble et comme but  $R^+$ . Mais nous trouvons ici une condition analogue à celle du

---

(\*) Le tableau  $T_i$  est considéré dans ce chapitre seulement comme un support symbolique absolument abstrait qui peut être envisagé comme un ensemble de cellules.



départ et nous pouvons dire cette fois que  $\theta_j$  a comme source  $T_j$  et  $T_j$  est aussi le même ensemble support  $T_i$ , mais muni de l'application  $\theta_j$ . En effet l'application inverse des ouverts de  $R^+$  induit un espace topologique sur  $T_i$  et respectivement sur  $T_j$ . A cause de la commutativité du diagramme il en résulte que les espaces topologiques que nous pouvons obtenir de cette façon sont tels que la fonction identité sur le support est continue; le passage d'un espace à l'autre est induit par une fonction continue sur  $R^+$  et nous avons donc une famille d'espaces topologiques obtenus par ce type de transformations. Par projection sur  $X$  et  $Y$  nous obtenons aisément deux classes de topologies également structurées, (14).

Comme cas particulier nous pouvons considérer des applications qui soient linéairement invariantes ou qui préservent les distances, ou d'autres propriétés que nous ne considérons pas dans ce travail. La conclusion méthodologique que nous pouvons tirer de cette discussion est que les deux ensembles  $X$  et  $Y$  jouissent par projection de la même structure d'invariance que  $g$ . En effet le Théorème 2 est seulement une condition suffisante et il ne donne pas des informations sur l'identification d'une quantification  $g(X)$  et  $g(Y)$ .

Corollaire - Si nous considérons comme donnée une application  $g : R^+ \longrightarrow R^+$  qui préserve l'ordre, nous obtenons sur  $X$  et  $Y$  des classes de structures d'ordre définies, à une fonction monotone près, sur une partition de  $X$  et de  $Y$ .

Il n'est pas nécessaire de donner une démonstration formelle du corollaire, mais il est suffisant de remarquer que les structures qui sont induites sur  $X$  (aussi bien que sur  $Y$ ), sont des ordres qui diffèrent l'un de l'autre par une modification locale.

##### 5. La préexistence d'une structure sur $X$ et/ou sur $Y$ .

La préexistence d'une structure sur  $X$  et/ou sur  $Y$ , c'est-à-dire une structure de bon ordre ou une topologie donnée nous conduit à la recherche d'une structure de correspondance,  $\Phi(T)$ , sur le tableau  $T(X, Y)$ . L'exemple le plus frappant est donné par le tableau,  $\{n_{ij}^1\}$ , dénoté ici  $\overline{(X, Y)}$  qui peut être associé au tableau  $(X, Y)$  en considérant  $X$  et  $Y$  partiellement ordonnés à la condition que les distributions marginales soient les mêmes.

Considérons l'exemple qui suit, où  $X_1 < X_2 < X_3$  et  $Y_1 < Y_2 < Y_3$ :

(X, Y)	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	
Y <sub>1</sub>	2	1	2	5
Y <sub>2</sub>	0	1	0	1
Y <sub>3</sub>	3	1	2	6
	5	3	4	12

(X, Y)	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	
Y <sub>1</sub>	5	0	0	5
Y <sub>2</sub>	0	1	0	1
Y <sub>3</sub>	0	2	4	6
	5	3	4	12

où  $\overline{(X, Y)}$  est obtenu avec une méthode plus simple que celle introduite par Fréchet et qui a été introduite par Salvemini en 1939. Supposons donné un bon ordre de X et Y, remplacer l'élément  $n_{11}$  avec le minimum entre  $n_{10}$  et  $n_{01}$ . Si on a  $n_{10} < n_{01}$  on va comparer  $n_{01} - n_{10}$  avec  $n_{20}$  et dans le cas où  $n_{20}$  est plus petit que  $n_{01} - n_{10}$  on écrit  $n_{20}$  à la place de (2,1), alors que si  $n_{20}$  est plus grand que  $n_{01} - n_{10}$  on écrit la différence  $n_{01} - n_{10}$  à la place de (2, 0). On continue de cette façon à comparer les deux distributions marginales en construisant un tableau qui possède les mêmes distributions marginales que  $(X, Y)$ , c'est à dire le tableau  $\{n_{ij}\}$ . Le tableau  $\overline{(X, Y)}$  est appelé tableau de cograduation et correspond au tableau de Fréchet que nous avons déjà désigné par  $\{n_{ij}^1\}$ . La conséquence immédiate de cette construction est qu'une fois donnée la structure d'ordre linéaire sur X et Y nous pouvons toujours construire une structure de correspondance, c'est à dire une correspondance fonctionnelle entre X et Y qui maximise le coefficient de corrélation linéaire dans la classe de Fréchet,  $H(X, Y)$ . On peut voir aussi que le tableau de cograduation nous montre la structure de groupement qui possède le nombre minimum de classes, c'est à dire qu'il constitue une compression du tableau  $(X, Y)$  lorsque les marges soient données une fois pour toutes. D'autre part, on peut voir que le tableau de cograduation minimise aussi la distance.

$$d^1(X, Y) = \sum \sum |X_i - Y_j| n_{ij}$$

ce qui démontre que la construction d'une correspondance fonctionnelle entre X et Y n'est pas liée à la métrique euclidienne.

La solution du problème de trouver la meilleure structure de groupement sur lignes et colonnes du tableau  $T(X, Y)$ , c'est-à-dire une structure de correspondance, est alors unique car, une fois ordonnées lignes et colonnes, l'association optimale est obtenue avec la règle de cograduation et, vice versa, une fois donnée la correspondance qui est représentée par  $\overline{T(X, Y)}$ , la structure d'ordonnances sur  $X$  et  $Y$  est unique. D'autre part, si nous avons des simples partitions sur  $X$  et  $Y$ , c'est-à-dire

$$\pi(x) = \{X_1, X_2, \dots, X_h\} \quad \text{et} \quad \pi(y) = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_k\}$$

nous avons aussi le théorème qui suit:

Théorème 3 - Etant donnée la classe de Fréchet associée au tableau  $(X, Y)$  et étant donnée la fonction  $d(X, Y)$ ;  $d(X, Y)$  atteint son maximum lorsque le tableau  $T(X, Y)$  est constitué de façon qu'il ne peut pas être changé par aucune permutation de lignes et de colonnes.

La démonstration de ce théorème est immédiate lorsque on pense au tableau au qui représente la condition du Théorème 3, un tableau dans lequel les 1 paraissent à chaque place du type  $(i, j)$ .

On peut voir que ce tableau, que nous désignons par  $T^\circ(X, Y)$ , est le tableau d'indépendance statistique, qui peut être obtenue en multipliant les fréquences marginales du tableau  $(X, Y)$ .

La conclusion de ce travail est donc la suivante:

le tableau  $T^\circ(X, Y)$  représente la structure de correspondance nulle qui est unique pour chaque cardinalité du tableau et en outre nous avons que, si  $T^\circ(X, Y)$  est donné, il n'est possible d'avoir aucune structure sur  $X$  et  $Y$ , qui restent dans ce cas seulement des ensembles purs parce que sur eux toutes les structures seraient équivalentes, et viceversa, s'il n'est possible de donner aucune structure, ou classe de structures, à  $X$  et  $Y$  alors on ne peut construire aucune correspondance entre eux, c'est-à-dire on ne peut construire aucune loi  $\Phi(T)$ .

## ANNEXE I

Dans cette Annexe nous montrons que la fonction de distance Euclidienne entre deux ensembles bien ordonnés, X et Y, est minimum quand on a la cograduation des éléments de X et Y, c'est à dire qu'à l'élément  $x_i$  de X à l'i-ème place est associé l'élément  $y_i$  de Y qui occupe la même place que  $x_i$ .

Supposons  $X = \{x_1, x_2\}$ ,  $Y = \{y_1, y_2\}$ ,  $x_1 < x_2$  et  $y_1 < y_2$ ; on voit tout de suite que

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \neq (x_1 - y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2$$

de telle sorte qu'on peut écrire

$$2 x_1 (y_2 - y_1)^2 - 2 x_2 (y_2 - y_1)^2 \neq 0$$

En effet  $x_1 - x_2 < 0$  entraîne

$$\emptyset(x_1, x_2, y_1, y_2) = 2(y_2 - y_1)(x_1 - x_2) \leq 0$$

La fonction  $\emptyset(x_1, x_2, y_1, y_2)$  atteint son maximum pour  $x_1 = x_2$  ou  $y_1 = y_2$  et en général est négative. En utilisant le principe mathématique d'induction complète on peut montrer pour tout N que la distance Euclidienne entre X et Y,  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  et  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ , atteint son minimum quand on a la cograduation des éléments des deux ensembles.

## ANNEXE II

Nous considérons dans cette Annexe le tableau  $T(X, Y)$  qu'on peut associé soit à un tableau de contingence (X, Y) soit à son tableau de cograduation  $\overline{(X, Y)}$ .

Étant donné le tableau de contingence suivant:

(X, Y)	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$y_1$	2	1	2	5
$y_2$	0	1	0	1
$y_3$	3	1	2	6
	5	3	4	12

nous avons tout de suite le tableau  $T(X, Y)$

$T(X, Y)$	$x_1$	$x_1$	$x_1$	$x_1$	$x_1$	$x_2$	$x_2$	$x_2$	$x_3$	$x_3$	$x_3$	$x_3$
$y_1$	1	1										
$y_1$	1	1										
$y_1$						1						
$y_1$									1	1		
$y_1$									1	1		
$y_2$							1					
$y_3$			1	1	1							
$y_3$			1	1	1							
$y_3$			1	1	1							
$y_3$								1				
$y_3$											1	1
$y_3$											1	1

tandis qu'au tableau  $\overline{T(X, Y)}$  de cograduation associé au tableau  $(X, Y)$  de contingence

$\overline{T(X, Y)}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$y_1$	5	0	0	5
$y_2$	0	1	0	1
$y_3$	0	2	4	6
	5	3	4	12

on peut associer le tableau  $\overline{T(X, Y)}$

$\overline{T(X, Y)}$	$x_1$	$x_1$	$x_1$	$x_1$	$x_1$	$x_2$	$x_2$	$x_2$	$x_3$	$x_3$	$x_3$	$x_3$
$y_1$	1	1	1	1	1							
$y_1$	1	1	1	1	1							
$y_1$	1	1	1	1	1							
$y_1$	1	1	1	1	1							
$y_1$	1	1	1	1	1							
$y_1$	1	1	1	1	1							
$y_2$						1						
$y_3$								1	1			
$y_3$								1	1			
$y_3$										1	1	1
$y_3$										1	1	1
$y_3$										1	1	1
$y_3$										1	1	1

On voit tout de suite que le nombre des blocs carrés du tableau  $\overline{T(X, Y)}$  est minimum, c'est à dire que l'opération de cograduation minimise aussi le nombre des blocs carrés sur les tableaux  $T(X, Y)$ .

REFERENCES

- (1) - G. Saporta - "Dépendence et codage de deux variables aléatoires" Revue de Statistique Appliquée, Vol. XXIII, n. 1, 1975.
- (2) - L. Goodman - "Measures of association for cross classifications" Journal of the American Statistical Association n. 49, 1954.  
W. Kruskal }
- (3) - L. Goodman - "Measures of association for cross classifications" Journal of the American Statistical Association n. 54, 1959.  
W. Kruskal }
- (4) - L. Goodman - "Measures of association for cross classifications" Journal of the American Statistical Association n. 58, 1963.  
W. Kruskal }
- (5) - H.H. Bock - Automatische Klassifikation  
Ruprecht & Vandenhoeck, Zurich, 1974.
- (6) - F. Cailliez - Introduction à l'Analyse des Données  
J.P. Pages } SMASH, Paris, 1976
- (7) - M. Fréchet - "Les tableaux de corrélation et les programmes linéaires"  
Revue Institut Internationale de Statistique, n. 25,  
1957.
- (8) - V. Castellano - Istituzioni di Statistica, Ilardi, Roma, 1973.
- (9) - A. Bellacicco - "Per una teoria formale della classificazione"  
A. Labella } Rendiconti di Matematica, Vol. 9, Serie VI, n. 2, 1976.
- (10) - A. Bellacicco - "Clustering incrociato ed analisi delle corrispondenze"  
J. Mortera }  
Atti delle Giornate AIRO 1976, Taranto, 1976.
- (11) - J. P. Benzécri - L'analyse des Données  
Dunod, Tome II, Paris, 1973.
- (12) - K. S. Srikantan - "Canonical association between nominal measurements"  
Journal of the American Statistical Association n. 329,  
1970.
- (13) - A. Herzel - "Un criterio di quantificazione: aspetti statistici" Metron,  
Vol. XXXII, n. 1-4, 1974.
- (14) - S. H. Willard - General Topology  
Addison Wesley, New York, 1969.