DIAGRAMMES VOLUMES 59 + 60, FASCICULE 3, 2008

SUR
CERTAINES SOUS-CATEGORIES NON PLEINES
DES
CATEGORIES DE MODELES

Fascicule 3 :

Appendice
(terminologie, notations, prérequis)

Claude Henry

(maxchen@free.fr)

et

Christian Lair

lairchrist@aol.com

A.M.S. Sub. Class. : 18 C 10, 18 C 30, 18 C 35

1. Graphes à composition.

1.1. Définition des graphes à composition.

Un *graphe à composition* $\boldsymbol{G}$ est constitué par :

- une classe d'*objets* $\mathtt{Ob}(\boldsymbol{G})$,

- une classe de flèches $\mathtt{Fl}(\boldsymbol{G})$,

- une classe de flèches *identités* $\mathtt{FlId}(\boldsymbol{G})$,

- une classe de *couples composables (de flèches)* $\mathtt{CComp}(\boldsymbol{G})$,

- une application *sélection des domaines (des flèches)* :

$$\mathtt{seldom}(\boldsymbol{G}) : \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}) \to \mathtt{Ob}(\boldsymbol{G}) \ ,$$

- une application *sélection des codomaines (des flèches)* :

$$\mathtt{selcodom}(\boldsymbol{G}) : \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}) \to \mathtt{Ob}(\boldsymbol{G}) \ ,$$

- une application *composition (des couples de flèches composables)* :

$$\mathtt{comp}(\boldsymbol{G}) : \mathtt{CComp}(\boldsymbol{G}) \to \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}) \ ,$$

et, ce, de sorte que :

- les flèches identités sont (évidemment) des flèches, i.e. on a :

$$\mathtt{FlId}(\boldsymbol{G}) \subseteq \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G})$$

- les flèches identités sont des flèches *fermées*, i.e. pour toute flèche identité $g \in \mathtt{FlId}(\boldsymbol{G})$, on a :

$$\mathtt{selcodom}(\boldsymbol{G})(g) = \mathtt{seldom}(\boldsymbol{G})(g) \ ,$$

- les couples de flèches composables sont des couples de flèches consécutives, i.e. on a :

$$\mathtt{CComp}(\boldsymbol{G}) \subseteq \mathrm{CConsec}(\boldsymbol{G}) \ ,$$

où :

$$\mathtt{CConsec}(\boldsymbol{G}) = \left\{ (g_2, g_1) \,\middle|\, g_2 \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}) \; g_1 \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}) \;\; \mathtt{seldom}(\boldsymbol{G})(g_2) = \mathtt{selcodom}(\boldsymbol{G})(g_1) \right\}$$

est la classe de tous les couples de flèches *consécutives de* $\boldsymbol{G}$,

- pour tout couple composable $(g_2, g_1) \in \mathtt{CComp}(\boldsymbol{G})$, on a :

$$\mathtt{selcodom}(\boldsymbol{G})(\mathtt{comp}(\boldsymbol{G})(g_2, g_1)) = \mathtt{selcodom}(\boldsymbol{G})(g_2)$$

et :

$$\mathtt{seldom}(\boldsymbol{G})(\mathtt{comp}(\boldsymbol{G})(g_2, g_1)) = \mathtt{seldom}(\boldsymbol{G})(g_1) \ .$$

1.2. Notations simplifiées pour les graphes à composition.

Si $\boldsymbol{G}$ est un graphe à composition (et s'il n'y a pas risque d'ambiguïté), pour toute flèche $g \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G})$, on note :

$$\mathtt{dom}(g) = \mathtt{seldom}(\boldsymbol{G})(g) \ ,$$

$$\mathtt{codom}(g) = \mathtt{selcodom}(\boldsymbol{G})(g)$$

et on écrit :

$$g : \mathtt{dom}(g) \to \mathtt{codom}(g) \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G})$$

ou, plus simplement encore :

$$g : \mathtt{dom}(g) \to \mathtt{codom}(g) \ .$$

De même, pour tout couple composable $(g_2, g_1) \in \mathtt{CComp}(\boldsymbol{G})$, on note :

$$g_2 \bullet g_1 = \mathtt{comp}(\boldsymbol{G})(g_2, g_1)$$

et, pour tous objets $G_1 \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{G})$ et $G_2 \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{G})$, on pose :

$$\mathtt{Hom}_{\boldsymbol{G}}(G_1, G_2) = \left\{ g \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}) \,\middle|\, \mathtt{dom}(g) = G_1 \text{ et } \mathtt{codom}(g) = G_2 \right\} .$$

1.3. Graphes à composition petits.

On dit qu'un graphe à composition $\boldsymbol{G}$ est *petit* si, et seulement si :

- la classe de ses objets $\mathtt{Ob}(\boldsymbol{G})$ est un ensemble,
- la classe de ses flèches $\mathtt{Fl}(\boldsymbol{G})$ est un ensemble,

(alors, $\mathtt{FlId}(\boldsymbol{G})$, $\mathtt{CComp}(\boldsymbol{G})$ et $\mathtt{CConsec}(\boldsymbol{G})$ sont aussi des ensembles).

1.4. Catégories et graphes à composition.

Evidemment, toute catégorie $\boldsymbol{C}$ s'identifie à un graphe à composition, encore noté $\boldsymbol{C}$, où :

- $\mathtt{FlId}(\boldsymbol{C}) = \left\{ \mathtt{id}(C) \middle| C \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{C}) \right\}$,
- $\mathtt{CComp}(\boldsymbol{C}) = \mathtt{CConsec}(\boldsymbol{C})$,
- les flèches identités sont des éléments neutres locaux pour la composition des flèches,
- la composition des flèches est associative.

Bien entendu, le graphe à composition auquel s'identifie une catégorie petite est un graphe à composition petit.

2. Foncteurs.

2.1. Définition des foncteurs (entre graphes à composition).

Si $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{G}'$ sont deux graphes à composition, un *foncteur* $F : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}'$ *de* $\boldsymbol{G}$ *vers* $\boldsymbol{G}'$ est constitué par :

- une application $\mathtt{Ob}(F) : \mathtt{Ob}(\boldsymbol{G}) \to \mathtt{Ob}(\boldsymbol{G}')$,
- une application $\mathtt{Fl}(F) : \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}) \to \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}')$,
- une application $\mathtt{FlId}(F) : \mathtt{FlId}(\boldsymbol{G}) \to \mathtt{FlId}(\boldsymbol{G}')$,
- une application $\mathtt{CComp}(F) : \mathtt{CComp}(\boldsymbol{G}) \to \mathtt{CComp}(\boldsymbol{G}')$

et, ce, de sorte que :

- pour toute flèche identité $g \in \mathtt{FlId}(\boldsymbol{G}) \subseteq \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G})$, on a :

$$\mathtt{FlId}(F)(g) = \mathtt{Fl}(F)(g) \ ,$$

- pour toute flèche $g \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G})$, on a :

$$\mathtt{Ob}(F)(\mathtt{dom}(g)) = \mathtt{dom}(\mathtt{Fl}(F)(g))$$

et :

$$\mathtt{Ob}(F)(\mathtt{codom}(g)) = \mathtt{codom}(\mathtt{Fl}(F)(g)) \ ,$$

- pour tout couple composable $(g_2, g_1) \in \mathtt{CComp}(\boldsymbol{G})$, on a :

$$\mathtt{CComp}(F)(g_2, g_1) = (\mathtt{Fl}(F)(g_2), \mathtt{Fl}(F)(g_1)) \ ,$$

- pour tout couple composable $(g_2, g_1) \in \mathtt{CComp}(\boldsymbol{G})$, on a :

$$\mathtt{Fl}(F)(g_2 \bullet g_1) = \mathtt{Fl}(F)(g_2) \bullet \mathtt{Fl}(F)(g_1) \ .$$

2.2. Notations simplifiées pour les foncteurs.

Si $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{G}'$ sont deux graphes à composition, si $F : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}'$ est un foncteur (et s'il n'y a pas risque d'ambiguïté), pour tout objet $G \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{G})$, on note :

$$F(G) = \mathtt{Ob}(F)(G)$$

et, pour toute flèche $g \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G})$, on note :

$$F(g) = \mathtt{Fl}(F)(g) \ .$$

2.3. Foncteurs identités et composition des foncteurs entre graphes à composition.

Si $\boldsymbol{G}$ est un graphe à composition, on note $\mathtt{id}(\boldsymbol{G}) : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}$ le *foncteur identité en* $\boldsymbol{G}$, i.e. le foncteur (évidemment bien défini) tel que :

- $\mathtt{Ob}(\mathtt{id}(\boldsymbol{G})) = \mathtt{id}(\mathtt{Ob}(\boldsymbol{G}))$,
- $\mathtt{Fl}(\mathtt{id}(\boldsymbol{G})) = \mathtt{id}(\mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}))$,
- $\mathtt{FlId}(\mathtt{id}(\boldsymbol{G})) = \mathtt{id}(\mathtt{FlId}(\boldsymbol{G}))$,
- $\mathtt{CComp}(\mathtt{id}(\boldsymbol{G})) = \mathtt{id}(\mathtt{CComp}(\boldsymbol{G}))$,

autrement dit, le foncteur tel que :

- pour tout objet $G \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{G})$, on a $\mathtt{id}(\boldsymbol{G})(G) = G$,
- pour toute flèche $g \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G})$, on a $\mathtt{id}(\boldsymbol{G})(g) = g$.

Si $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{G}'$ et $\boldsymbol{G}''$ sont trois graphes à composition et si $F:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}'$ et $F':\boldsymbol{G}'\to\boldsymbol{G}''$ sont deux foncteurs, on note $F'\circ F:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}''$ le foncteur *composé de* F' *et* F , i.e. le foncteur (évidemment bien défini) tel que :

- $\mathtt{Ob}(F'\circ F)=\mathtt{Ob}(F')\circ\mathtt{Ob}(F)$,
- $\mathtt{Fl}(F'\circ F)=\mathtt{Fl}(F')\circ\mathtt{Fl}(F)$,
- $\mathtt{FlId}(F'\circ F)=\mathtt{FlId}(F')\circ\mathtt{FlId}(F)$,
- $\mathtt{CComp}(F'\circ F)=\mathtt{CComp}(F')\circ\mathtt{CComp}(F)$,

autrement dit, le foncteur tel que :

- pour tout objet $G\in\mathtt{Ob}(\boldsymbol{G})$, on a $(F'\circ F)(G)=F'(F(G))$,
- pour toute flèche $g\in\mathtt{Fl}(\boldsymbol{G})$, on a $(F'\circ F)(g)=F'(F(g))$.

On note ***GrphComp*** la catégorie dont les objets sont les graphes à composition petits, dont les flèches sont les foncteurs entre ces graphes à composition petits et où la composition est cette composition des foncteurs.

2.4. Foncteurs entre catégories et foncteurs entre graphes à composition.

Evidemment, tout foncteur $F:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}'$ entre deux catégories s'identifie à un foncteur, encore noté $F:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}'$, entre les graphes à composition auxquels s'identifient les catégories $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{C}'$.

De la sorte, la catégorie ***Cat*** des catégories petites s'identifie à une sous-catégorie pleine de la catégorie ***GrphComp*** .

3. Transformations naturelles.

3.1. Définition des transformations naturelles (entre foncteurs d'un graphe à composition vers une catégorie).

Si $\boldsymbol{G}$ est un graphe à composition, si $\boldsymbol{C}$ est une catégorie, si $F_1:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{C}$ et $F_2:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{C}$ sont deux foncteurs, une *transformation naturelle* $n:F_1\Rightarrow F_2:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{C}$ *de*

F_1 *vers* F_2 est constituée par :

- la donnée, pour tout objet $G \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{G})$, d'une flèche $n(G) : F_1(G) \to F_2(G) \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{C})$

et, ce, de sorte que :

- pour tous objets $G_a \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{G})$ et $G_b \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{G})$ et pour toute flèche $g : G_a \to G_b \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G})$, on a $n(G_b) \bullet F_1(g) = F_2(g) \bullet n(G_a)$.

3.2. Notations simplifiées pour les transformations naturelles.

Si $\boldsymbol{G}$ est un graphe à composition, si $\boldsymbol{C}$ est une catégorie, si $F_1 : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{C}$ et $F_2 : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{C}$ sont deux foncteurs et si $n : F_1 \Rightarrow F_2 : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{C}$ est une transformation naturelle, on note (selon le degré de précision nécessaire et/ou le contexte) :

$$n : F_1 \Rightarrow F_2 \ ,$$

$$n : F_1 \to F_2 : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{C} \ ,$$

$$n : F_1 \to F_2 \ ,$$

$$n = (n(G))_{G \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{G})} = (n_G)_{G \in \mathtt{Ob}(G)} \ .$$

3.3. Transformations naturelles identités et composition latérale des transformations naturelles.

Si $\boldsymbol{G}$ est un graphe à composition, si $\boldsymbol{C}$ est une catégorie et si $F : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{C}$ est un foncteur, on note $\mathtt{id}(F) : F \Rightarrow F : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{C}$ la transformation naturelle *identité de* F , i.e. la transformation naturelle (évidemment bien définie) telle que :

- pour tout objet $G \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{G})$, on a $(\mathtt{id}(F))(G) = \mathtt{id}(F(G)) : F(G) \to F(G)$.

Si $\boldsymbol{G}$ est un graphe à composition, si $\boldsymbol{C}$ est une catégorie, si $F_1 : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{C}$, $F_2 : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{C}$ et $F_3 : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{C}$ sont trois foncteurs et si $n_1 : F_1 \Rightarrow F_2 : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{C}$ et $n_2 : F_2 \Rightarrow F_3 : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{C}$ sont deux transformation naturelles, on note $n_2 \bullet n_1 : F_1 \Rightarrow F_3 : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{C}$ la *transformation naturelle composée (latérale) de* n_2 *et* n_1 , i.e. la transformation naturelle (évidemment bien définie) telle que :

- pour tout objet $G \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{G})$, on a $(n_2 \bullet n_1)(G) = n_2(G) \bullet n_1(G)$.

3.4. Composition longitudinale des transformations naturelles et des foncteurs (entre graphes à composition).

Si $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{G}'$ sont deux graphes à composition, si $\boldsymbol{C}$ est une catégorie, si $F:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}'$, $F'_1:\boldsymbol{G}'\to\boldsymbol{C}$ et $F'_2:\boldsymbol{G}'\to\boldsymbol{C}$ sont trois foncteurs et si $n': F'_1\Rightarrow F'_2:\boldsymbol{G}'\to\boldsymbol{C}$ est une transformation naturelle, on note :

$$n'\circ F : F'_1\circ F \Rightarrow F'_2\circ F : \boldsymbol{G}\to\boldsymbol{C}$$

la *transformation naturelle composée (longitudinale) de* n' *et* F , i.e. la transformation naturelle (évidemment bien définie) telle que :

- pour tout objet $G\in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{G})$, on a $(n'\circ F)(G)=n'(F(G))$.

3.5. Transformations naturelles entre foncteurs d'une catégorie vers une autre et transformations naturelles entre foncteurs d'un graphe à composition vers une catégorie.

Evidemment, toute transformation naturelle $n:F_1\Rightarrow F_2:\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{C}$ entre deux foncteurs d'une catégorie $\boldsymbol{B}$ vers une catégorie $\boldsymbol{C}$ s'identifie à une transformation naturelle, encore notée $n:F_1\Rightarrow F_2:\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{C}$, entre les deux foncteurs, auxquels s'identifient F_1 et F_2 , du graphe à composition auquel s'identifie $\boldsymbol{B}$ vers la catégorie $\boldsymbol{C}$.

4. Catégories de foncteurs (d'un graphe à composition vers une catégorie) et foncteurs induits.

4.1. Catégories de foncteurs (d'un graphe à composition vers une catégorie).

Si $\boldsymbol{G}$ est un graphe à composition petit et si $\boldsymbol{C}$ est une catégorie localement petite, on note $\texttt{Fonct}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{C})$ la catégorie, évidemment localement petite, dont les objets sont les foncteurs de $\boldsymbol{G}$ vers $\boldsymbol{C}$, dont les flèches sont les transformations naturelles entre ces foncteurs de $\boldsymbol{G}$ vers $\boldsymbol{C}$ et où la composition est la composition latérale des transformations naturelles.

4.2. Foncteurs induits entre catégories de foncteurs.

Si $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{G}'$ sont deux graphes à composition petits, si $\boldsymbol{C}$ est une catégorie localement petite et si $F:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}'$ est un foncteur, on note :

$$\texttt{Fonct}(F,\boldsymbol{C}):\texttt{Fonct}(\boldsymbol{G}',\boldsymbol{C})\to\texttt{Fonct}(\boldsymbol{G},\boldsymbol{C})$$

le foncteur *induit par* F, c'est-à-dire le foncteur *composition par* F, i.e. le foncteur (évidemment bien défini) tel que :

- pour tout objet $F'\in\texttt{Ob}(\texttt{Fonct}(\boldsymbol{G}',\boldsymbol{C}))$, i.e. pour tout foncteur $F':\boldsymbol{G}'\to\boldsymbol{C}$, on a :

$$\texttt{Fonct}(F,\boldsymbol{C})(F')=F'\circ F:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{C}\ ,$$

- pour toute flèche $n'\in\texttt{Fl}(\texttt{Fonct}(\boldsymbol{G}',\boldsymbol{C}))$, i.e. pour tous foncteurs $F'_1:\boldsymbol{G}'\to\boldsymbol{C}$ et $F'_2:\boldsymbol{G}'\to\boldsymbol{C}$ et toute transformation naturelle $n':F'_1\Rightarrow F'_2:\boldsymbol{G}'\to\boldsymbol{C}$, on a :

$$\texttt{Fonct}(F,\boldsymbol{C})(n')=n'\circ F:F'_1\circ F\Rightarrow F'_2F:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{C}\ .$$

5. Familles projectives et familles inductives.

5.1. Définition des familles projectives de flèches (d'un graphe à composition).

Si $\boldsymbol{G}$ est un graphe à composition, une *famille projective* f *de flèches de* $\boldsymbol{G}$ est constituée par :

- une classe d'*indexation*, i.e. une classe $\texttt{Index}(f)$,
- une *famille de base*, i.e. une famille d'objets :

$$\texttt{Base}(f)=(\texttt{Base}(f)_X\in\texttt{Ob}(\boldsymbol{G}))_{X\in\texttt{Index}(f)}\ ,$$

- un *sommet*, i.e. un objet $\texttt{Somm}(f)\in\texttt{Ob}(\boldsymbol{G})$,

- une *famille de projections*, i.e. une famille de flèches :

$$\mathtt{proj}(f) = (\mathtt{proj}(f)_X : \mathtt{Somm}(f) \to \mathtt{Base}(f)_X \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}))_{X \in \mathtt{Index}(f)} \ .$$

5.2. Notations simplifiées pour les familles projectives de flèches.

Si $\boldsymbol{G}$ est un graphe à composition et si f est une famille projective de flèches de $\boldsymbol{G}$, pour tout élément $X \in \mathtt{Index}(f)$, on note :

$$\mathtt{proj}(f)_X = f_X$$

et (en identifiant f à sa famille de projections) on note aussi :

$$f = (f_X : \mathtt{Somm}(f) \to \mathtt{Base}(f)_X \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}))_{X \in \mathtt{Index}(f)}$$

ou encore :

$$f = (f_X : \mathtt{Somm}(f) \to \mathtt{Base}(f)_X)_{X \in \mathtt{Index}(f)} \ .$$

5.3. Image d'une famille projective de flèches par un foncteur.

Si $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{G}'$ sont deux graphes à composition, si $F : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}'$ est un foncteur et si f est une famille projective de flèches de $\boldsymbol{G}$, on note $F(f)$ l'*image de* f *par* F, i.e. la famille projective de flèches de $\boldsymbol{G}'$ telle que :

- $\mathtt{Index}(F(f)) = \mathtt{Index}(f)$,

- pour tout élément $X \in \mathtt{Index}(f)$, on a $\mathtt{Base}(F(f))_X = F(\mathtt{Base}(f)_X)$,

- pour tout élément $X \in \mathtt{Index}(f)$, on a $\mathtt{proj}(F(f))_X = F(\mathtt{proj}(f))_X$,

de sorte que, si $f = (f_X : S \to B_X \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}))_{X \in \boldsymbol{X}}$, on a :

$$F(f) = (F(f_X) : F(S) \to F(B_X) \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}'))_{X \in \boldsymbol{X}} \ .$$

5.4. Définition des familles inductives de flèches (d'un graphe à composition).

Si $\boldsymbol{G}$ est un graphe à composition, une *famille inductive* f *de flèches de* $\boldsymbol{G}$ est constituée par :

- une *classe d'indexation*, i.e. une classe $\mathtt{Index}(f)$,
- une *famille de base*, i.e. une famille d'objets :

$$\mathtt{Base}(f) = (\mathtt{Base}(f)_X \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{G}))_{X \in \mathtt{Index}(f)} ,$$

- un *sommet*, i.e. un objet $\mathtt{Somm}(f) \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{G})$,
- une *famille d'insertions*, i.e. une famille de flèches :

$$\mathtt{insert}(f) = (\mathtt{insert}(f)_X : \mathtt{Base}(f)_X \to \mathtt{Somm}(f) \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}))_{X \in \mathtt{Index}(f)} .$$

5.5. Notations simplifiées pour les familles inductives de flèches.

Si $\boldsymbol{G}$ est un graphe à composition et si f est une famille inductive de flèches de $\boldsymbol{G}$, pour tout élément $X \in \mathtt{Index}(f)$, on note :

$$\mathtt{insert}(f')_X = f'_X$$

et (en identifiant f à sa famille d'insertions) :

$$f = (f_X : \mathtt{Base}(f)_X \to \mathtt{Somm}(f) \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}))_{X \in \mathtt{Index}(f)}$$

ou encore :

$$f = (f_X : \mathtt{Base}(f)_X \to \mathtt{Somm}(f))_{X \in \mathtt{Index}(f)} .$$

5.6. Image d'une famille inductive de flèches par un foncteur.

Si $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{G}'$ sont deux graphes à composition, si $F : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}'$ est un foncteur et si f est une famille inductive de flèches de $\boldsymbol{G}$, on note $F(f)$ l'*image de* f *par* F , i.e. la famille inductive de flèches de $\boldsymbol{G}'$ telle que :

- $\mathtt{Index}(F(f)) = \mathtt{Index}(f)$,

- pour tout élément $X \in \mathtt{Index}(f)$, on a $\mathtt{Base}(F(f))_X = F(\mathtt{Base}(f)_X)$,

- pour tout élément $X \in \mathtt{Index}(f)$, on a $\mathtt{insert}(F(f))_X = F(\mathtt{insert}(f))_X$,

de sorte que, si $f = (f_X : B_X \to S \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}))_{X \in \boldsymbol{X}}$, on a :

$$F(f) = (F(f_X) : F(B_X) \to F(S) \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}'))_{X \in \boldsymbol{X}} .$$

5.7. Familles projectives et familles inductives petites.

Si $\boldsymbol{G}$ est un graphe à composition, on dit qu'une famille projective (resp. inductive) f de flèches de $\boldsymbol{G}$ est *petite* si, et seulement si :

- sa classe d'indexation $\mathtt{Index}(f)$ est un ensemble.

6. Cônes projectifs et cônes inductifs.

6.1. Définition des cônes projectifs (d'un graphe à composition).

Si $\boldsymbol{G}$ est un graphe à composition, un *cône projectif* c *de* $\boldsymbol{G}$ est constitué par :

- un *graphe à composition d'indexation*, i.e. un graphe à composition $\mathtt{GIndex}(c)$,

- un *foncteur de base*, i.e. un foncteur $\mathtt{FBase}(c) : \mathtt{GIndex}(c) \to \boldsymbol{G}$,

- un *sommet*, i.e. un objet $\mathtt{Somm}(c) \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{G})$,

- une *famille de projections*, i.e. une famille de flèches :

$$\mathtt{proj}(c) = (\mathtt{proj}(c)_D : \mathtt{Somm}(c) \to \mathtt{FBase}(c)(D) \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}))_{D \in \mathtt{Ob}(\mathtt{GIndex}(c))} ,$$

et, ce, de sorte que :

- pour tous objets $D_1 \in \mathtt{Ob}(\mathtt{GIndex}(c))$ et $D_2 \in \mathtt{Ob}(\mathtt{GIndex}(c))$ et toute flèche $d : D_1 \to D_2 \in \mathtt{Fl}(\mathtt{GIndex}(c))$, on a :

$$((\mathtt{FBase}(c))(d), \mathtt{proj}(c)_{D_1}) \in \mathtt{CComp}(\boldsymbol{G})$$

et :

$$(\texttt{FBase}(c))(d) \bullet \texttt{proj}(c)_{D_1} = \texttt{proj}(c)_{D_2} \ .$$

6.2. Notations simplifiées pour les cônes projectifs.

Si $\boldsymbol{G}$ est un graphe à composition et si c est un cône projectif de $\boldsymbol{G}$, pour tout objet $D \in \texttt{Ob}(\texttt{GIndex}(c))$, on note aussi :

$$\texttt{proj}(c)_D = c_D$$

et (s'il n'y a pas risque de confusion quant à son foncteur base, i.e. en ne mentionnant que ses valeurs sur les objets de $\texttt{GIndex}(c)$ et en se contentant de mentionner - en indice - qu'elles "varient selon les flèches de $\texttt{GIndex}(c)$ "), on note :

$$c = (c_D : \texttt{Somm}(c) \to \texttt{FBase}(c)_D \in \texttt{Fl}(\boldsymbol{G}))_{D \in \texttt{GIndex}(c)}$$

ou encore :

$$c = (c_D : \texttt{Somm}(c) \to \texttt{FBase}(c)_D)_{D \in \texttt{GIndex}(c)} \ .$$

6.3. Image d'un cône projectif par un foncteur.

Si $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{G}'$ sont deux graphes à composition, si $F : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}'$ est un foncteur et si c est un cône projectif de $\boldsymbol{G}$, alors on note $F(c)$ l'*image de c par F* , i.e. le cône projectif de $\boldsymbol{G}'$ (évidemment bien défini) tel que :

- $\texttt{GIndex}(F(c)) = \texttt{GIndex}(c)$,

- $\texttt{FBase}(F(c)) = F \circ \texttt{Base}(c)$,

- $\texttt{Somm}(F(c)) = F(\texttt{Somm}(c))$,

- pour tout objet $D \in \texttt{Ob}(\texttt{GIndex}(F(c)) = \texttt{Ob}(\texttt{GIndex}(c))$, on a :

$$\texttt{proj}(F(c))_D = F(\texttt{proj}(c)_D) \ ,$$

de sorte que, si $c = (c_D : S \to B_D \in \texttt{Fl}(\boldsymbol{G}))_{D \in \boldsymbol{D}}$, on a :

$$F(c) = (F(c_D) : F(S) \to F(B_D) \in \texttt{Fl}(\boldsymbol{G}'))_{D \in \boldsymbol{D}} \ .$$

6.4. Cônes inductifs (d'un graphe à composition).

Si $\boldsymbol{G}$ est un graphe à composition, un *cône inductif* c *de* $\boldsymbol{G}$ est constitué par :

- un *graphe à composition d'indexation*, i.e. un graphe à composition $\mathtt{GIndex}(c)$,

- un *foncteur de base*, i.e. un foncteur $\mathtt{FBase}(c) : \mathtt{GIndex}(c) \to \boldsymbol{G}$,

- un *sommet*, i.e. un objet $\mathtt{Somm}(c) \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{G})$,

- une *famille d'insertions*, i.e. une famille de flèches :

$$\mathtt{insert}(c) = (\mathtt{insert}(c)_D : \mathtt{FBase}(c)_D \to \mathtt{Somm}(c) \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}))_{D \in \mathtt{Ob}(\mathtt{GIndex}(c))} ,$$

et, ce, de sorte que :

- pour tous objets $D_1 \in \mathtt{Ob}(\mathtt{GIndex}(c))$ et $D_2 \in \mathtt{Ob}(\mathtt{GIndex}(c))$ et toute flèche $d : D_1 \to D_2 \in \mathtt{Fl}(\mathtt{GIndex}(c))$, on a :

$$(\mathtt{insert}(c)_{D_2}, (\mathtt{FBase}(c))(d)) \in \mathtt{CComp}(\boldsymbol{G})$$

et :

$$\mathtt{insert}(c)_{D_2} \bullet (\mathtt{FBase}(c))(d) = \mathtt{insert}(c)_{D_1} .$$

6.5. Notations simplifiées pour les cônes inductifs.

Si $\boldsymbol{G}$ est un graphe à composition et si c est un cône inductif de $\boldsymbol{G}$, pour tout objet $D \in \mathtt{Ob}(\mathtt{GIndex}(c))$, on note aussi :

$$\mathtt{insert}(c)_D = c_D$$

et (s'il n'y a pas risque de confusion quant à son foncteur base, i.e. en ne mentionnant que ses valeurs sur les objets de $\mathtt{GIndex}(c)$ et en se contentant de mentionner - en indice - qu'elles "varient "selon les flèches de $\mathtt{GIndex}(c)$ ") :

$$c = (c_D : \mathtt{FBase}(c)(D) \to \mathtt{Somm}(c) \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}))_{D \in \mathtt{GIndex}(c)}$$

ou encore :

$$c = (c_D : \mathtt{FBase}(c)_D \to \mathtt{Somm}(c))_{D \in \mathtt{GIndex}(c)} .$$

6.6. Image d'un cône inductif par un foncteur.

Si $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{G}'$ sont deux graphes à composition, si $F : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}'$ est un foncteur et si c est un cône inductif de $\boldsymbol{G}$, alors on note $F(c)$ l'*image de* c *par* F, i.e. le cône inductif de $\boldsymbol{G}'$ (évidemment bien défini) tel que :

- $\texttt{GIndex}(F(c)) = \texttt{GIndex}(c)$,

- $\texttt{FBase}(F(c)) = F \circ \texttt{Base}(c)$,

- $\texttt{Somm}(F(c)) = F(\texttt{Somm}(c))$,

- pour tout objet $D \in \texttt{Ob}(\texttt{GIndex}(F(c)) = \texttt{Ob}(\texttt{GIndex}(c))$, on a :

$$\texttt{insert}(F(c))_D = F(\texttt{insert}(c)_D) ,$$

de sorte que, si $c = (c_D : B_D \to S \in \texttt{Fl}(\boldsymbol{G}))_{D \in \boldsymbol{D}}$, on a :

$$F(c) = (F(c_D) : F(B_D) \to F(S) \in \texttt{Fl}(\boldsymbol{G}'))_{D \in \boldsymbol{D}} .$$

6.7. Cônes projectifs et cônes inductifs petits.

Si $\boldsymbol{G}$ est un graphe à composition, on dit qu'un cône projectif (resp. inductif) c de $\boldsymbol{G}$ est *petit* si, et seulement si :

- son graphe à composition d'indexation $\texttt{GIndex}(c)$ est petit.

6.8. Cônes et limites.

Parmi tous les cônes projectifs (resp. inductifs) d'une catégorie $\boldsymbol{C}$ certains peuvent évidemment être des *cônes limites projectives* (resp. des *cônes limites inductves*) : nous n'en rappelons pas la définition !

7. Esquisses.

7.1. Définition des esquisses.

Une *esquisse* $\boldsymbol{E}$ est constituée par :

- un graphe à composition *support* $\mathtt{Supp}(\boldsymbol{E})$,

- une classe $\mathtt{CPDist}(\boldsymbol{E})$ de cônes projectifs de $\mathtt{Supp}(\boldsymbol{E})$, dits *distingués* ,

- une classe $\mathtt{CIDist}(\boldsymbol{E})$ de cônes inductifs de $\mathtt{Supp}(\boldsymbol{E})$, dits *distingués*.

7.2. Notations simplifiées pour les esquisses.

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse, on note :

$$\mathtt{Ob}(\boldsymbol{E}) = \mathtt{Ob}(\mathtt{Supp}(\boldsymbol{E}))$$

et on dit de tout objet de $\mathtt{Supp}(\boldsymbol{E})$ que c'est un *objet de* $\boldsymbol{E}$.

De même, on note :

$$\mathtt{Fl}(\boldsymbol{E}) = \mathtt{Fl}(\mathtt{Supp}(\boldsymbol{E})) \ ,$$

$$\mathtt{FlId}(\boldsymbol{E}) = \mathtt{FlId}(\mathtt{Supp}(\boldsymbol{E}))$$

et on dit de toute flèche de $\mathtt{Supp}(\boldsymbol{E})$ que c'est une *flèche de* $\boldsymbol{E}$ et de toute flèche identité de $\mathtt{Supp}(\boldsymbol{E})$ que c'est une *flèche identité de* $\boldsymbol{E}$.

Pareillement, on note :

$$\mathtt{CComp}(\boldsymbol{E}) = \mathtt{CComp}(\mathtt{Supp}(\boldsymbol{E})) \ ,$$

$$\mathtt{CConsec}(\boldsymbol{E}) = \mathtt{CConsec}(\mathtt{Supp}(\boldsymbol{E}))$$

et on dit de tout couple composable de $\mathtt{Supp}(\boldsymbol{E})$ que c'est un *couple composable de* $\boldsymbol{E}$ et de tout couple de flèches consécutives de $\mathtt{Supp}(\boldsymbol{E})$ que c'est un *couple de flèches consécutives de* $\boldsymbol{E}$.

Enfin, on dit de toute famille projective (resp. inductive) de $\mathtt{Supp}(\boldsymbol{E})$ que c'est une *famille projective* (resp. *inductive*) *de* $\boldsymbol{E}$ et de tout cône projectif (resp. inductif) de $\mathtt{Supp}(\boldsymbol{E})$ que c'est un *cône projectif* (resp. *inductif*) *de* $\boldsymbol{E}$.

7.3. Esquisses petites.

On dit qu'une esquisse $\boldsymbol{E}$ est *petite* si, et seulement si :

- son graphe à composition support $\mathtt{Supp}(\boldsymbol{E})$ est petit,

- la classe de ses cônes projectifs distingués $\mathtt{CPDist}(\boldsymbol{E})$ est un ensemble,

- la classe de ses cônes inductifs distingués $\mathtt{CIDist}(\boldsymbol{E})$ est un ensemble,

- le graphe à composition d'indexation $\mathtt{GIndex}(c)$ de tout cône projectif distingué $c \in \mathtt{CPDist}(\boldsymbol{E})$ est petit,

- le graphe à composition d'indexation $\mathtt{GIndex}(c)$ de tout cône inductif distingué $c \in \mathtt{CIDist}(\boldsymbol{E})$ est petit.

8. Homomorphismes entre esquisses.

8.1. Définition des homomorphismes entre esquisses.

Si $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{E}'$ sont deux esquisses, un homomorphisme $H : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$ de $\boldsymbol{E}$ vers $\boldsymbol{E}'$ est constitué par :

- un foncteur *support* $\mathtt{Supp}(H) : \mathtt{Supp}(\boldsymbol{E}) \to \mathtt{Supp}(\boldsymbol{E}')$,

et, ce, de sorte que :

- pour tout cône projectif distingué $c \in \mathtt{CPDist}(\boldsymbol{E})$, on a :

$$(\mathtt{Supp}(H))(c) \in \mathtt{CPDist}(\boldsymbol{E}') \ ,$$

- pour tout cône inductif distingué $c \in \mathtt{CIDist}(\boldsymbol{E})$, on a :

$$(\mathtt{Supp}(H))(c) \in \mathtt{CIDist}(\boldsymbol{E}') \ .$$

8.2. Notations simplifiées pour les homomorphismes entre esquisses.

Si $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{E}'$ sont deux esquisse et si $H : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$ est un homomorphisme, on note :

$$\texttt{Ob}(H) = \texttt{Ob}(\texttt{Supp}(H))$$

et, pour tout objet $E \in \texttt{Ob}(\boldsymbol{E})$:

$$H(E) = \texttt{Supp}(H)(E) \ .$$

De même, on note :

$$\texttt{Fl}(H) = \texttt{Fl}(\texttt{Supp}(H)) \ ,$$

$$\texttt{FlId}(H) = \texttt{FlId}(\texttt{Supp}(H))$$

et, pour toute flèche $e \in \texttt{Fl}(\boldsymbol{E})$:

$$H(e) = \texttt{Supp}(H)(e) \ .$$

Enfin, on note :

$$\texttt{CComp}(H) = \texttt{CComp}(\texttt{Supp}(H)) \ .$$

8.3. Homomorphismes identités et composition des homomorphismes entre esquisses.

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse, on note $\texttt{id}(\boldsymbol{E}) : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ l'*homomorphisme identité en* $\boldsymbol{E}$, i.e. l'homomorphisme (évidemment bien défini) tel que :

- $\texttt{Supp}(\texttt{id}(\boldsymbol{E})) = \texttt{id}(\texttt{Supp}(\boldsymbol{E})) : \texttt{Supp}(\boldsymbol{E}) \to \texttt{Supp}(\boldsymbol{E})$.

Si $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E}'$ et $\boldsymbol{E}''$ sont trois esquisses et si $H : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$ et $H' : \boldsymbol{E}' \to \boldsymbol{E}''$ sont deux homomorphismes, on note $H' \circ H : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}''$ l'homomorphisme *composé de* H' *et* H , i.e. l'homomorphisme (évidemment bien défini) tel que :

- $\texttt{Supp}(H' \circ H) = \texttt{Supp}(H') \circ \texttt{Supp}(H) : \texttt{Supp}(\boldsymbol{E}) \to \texttt{Supp}(\boldsymbol{E}'')$.

On note ***Esq*** la catégorie dont les objets sont les esquisses petites, dont les flèches sont les homomorphismes entre ces esquisses petites et où la composition est cette composition des homomorphismes.

9. Modèles.

9.1. Définition des modèles.

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse et si $\boldsymbol{C}$ est une catégorie, un *modèle* $M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{C}$ *de* $\boldsymbol{E}$ *dans* $\boldsymbol{C}$ est constitué par :

- un foncteur *sous-jacent* $\mathtt{SSJac}(M) : \mathtt{Supp}(\boldsymbol{E}) \to \boldsymbol{C}$,

et, ce, de sorte que :

- pour tout cône projectif distingué $c \in \mathtt{CPDist}(\boldsymbol{E})$, son image $(\mathtt{SSJac}(c))(c)$ est un cône limite projective de $\boldsymbol{C}$,

- pour tout cône inductif distingué $c \in \mathtt{CIDist}(\boldsymbol{E})$, son image $(\mathtt{SSJac}(c))(c)$ est un cône limite inductive de $\boldsymbol{C}$.

9.2. Notations simplifiées pour les modèles.

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse, si $\boldsymbol{C}$ est une catégorie et si $M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{C}$ est un modèle, pour tout objet $E \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})$, on note :

$$M(E) = \mathtt{SSJac}(M)(E)$$

et, pour toute flèche $e \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{E})$, on note :

$$M(e) = \mathtt{SSJac}(M)(e) \ .$$

De même, pour tout cône projectif (resp. inductif) c de $\boldsymbol{E}$ - qu'il soit distingué ou non - on note :

$$M(c) = \mathtt{SSJac}(M)(c) \ .$$

9.3. Composition (longitudinale) des modèles et des homomorphismes (entre esquisses).

Si $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{E}'$ sont deux esquisses, si $H : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$ est un homomorphisme, si $\boldsymbol{C}$ est une catégorie et si $M' : \boldsymbol{E}' \to \boldsymbol{C}$ est un modèle, on note $M' \circ H : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{C}$ le *modèle composé (longitudinal) de* M' *et* H , i.e. le modèle (évidemment bien défini) tel que :

- $\mathtt{SSJac}(M'\circ H) = \mathtt{SSJac}(M')\circ\mathtt{Supp}(H)$,

autrement dit, tel que :

- pour tout objet $E \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})$, on a $(M'\circ H)(E) = M'(H(E))$,

- pour toute flèche $e \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{E})$, on a $(M'\circ H)(e) = M'(H(e))$.

10. Limites potentielles.

10.1. Définition des limites potentielles.

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse, on dit de tout cône projectif (resp. inductif) distingué de $\boldsymbol{E}$ que c'est une *limite projective (resp. inductive) potentielle*, puisque son image par tout modèle est un cône projectif (resp. inductif) "vraiment" limite !

10.2. Produits et sommes potentiels.

On désigne par $\underline{\boldsymbol{2}}$ le graphe à composition (évidemment petit) n'ayant que deux objets 1 et 2 et aucune flèche.

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse, si $E_1 \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})$, $E_2 \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})$ et $F \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})$ sont trois objets et si $e_1 : F \to E_1 \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{E})$ et $e_2 : F \to E_2 \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{E})$ sont deux flèches, on dit et on écrit que :

$$E_1 \xleftarrow{e_1} F \xrightarrow{e_2} E_2$$

est un produit potentiel de $\boldsymbol{E}$

si, et seulement si :

- il existe un cône projectif distingué $c \in \mathtt{CPDist}(\boldsymbol{E})$ (nécessairement unique) tel que :

$$\mathtt{GIndex}(c) = \underline{\boldsymbol{2}} \ ,$$

$$\mathtt{FBase}(c)(1) = E_1 \ ,$$

$$\mathtt{FBase}(c)(2) = E_2 \ ,$$

$$\mathtt{Somm}(c) = F \ ,$$

$$\mathtt{proj}(c)_1 = e_1 \ ,$$

$$\mathtt{proj}(c)_2 = e_2 \ ,$$

autrement dit si, et seulement si :

- $c = (e_D : F \to E_D)_{D \in \underline{\boldsymbol{2}}} \in \mathtt{CPDist}(\boldsymbol{E})$.

Dualement, si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse, si $E_1 \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})$, $E_2 \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})$ et $F \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})$ sont trois objets et si $e_1 : E_1 \to F \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{E})$ et $e_2 : E_2 \to F \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{E})$ sont deux flèches, on dit et on écrit que :

$$E_1 \xrightarrow{e_1} F \xleftarrow{e_2} E_2$$

est une somme potentielle de $\boldsymbol{E}$

si, et seulement si :

- il existe un cône inductif distingué $c \in \mathtt{CIDist}(\boldsymbol{E})$ (nécessairement unique) tel que :

$$\mathtt{GIndex}(c) = \underline{\boldsymbol{2}} \ ,$$

$$\mathtt{FBase}(c)(1) = E_1 \ ,$$

$$\mathtt{FBase}(c)(2) = E_2 \ ,$$

$$\mathtt{Somm}(c) = F \ ,$$

$$\mathtt{insert}(c)_1 = e_1 \ ,$$

$$\mathtt{insert}(c)_2 = e_2 \ ,$$

autrement dit si, et seulement si

- $c = (e_D : E_D \to F)_{D \in \underline{\boldsymbol{2}}} \in \mathtt{CIDist}(\boldsymbol{E})$.

10.3. Monomorphismes et épimorphismes potentiels.

On désigne par $\boldsymbol{V}$ le graphe à composition (évidemment petit) n'ayant que trois objets 0 , 1 et 2 et deux flèches $v_1 : 1 \to 0$ et $v_2 : 2 \to 0$.

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse, si $E \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})$ et $F \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})$ sont deux objets et si $j : E \to F \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{E})$ est une flèche, on dit et on écrit que :

$$j : E \to F$$

est un monomorphisme potentiel de $\boldsymbol{E}$

si, et seulement si :

- il existe un cône projectif distingué $c \in \mathtt{CPDist}(\boldsymbol{E})$ tel que :

$$\mathtt{GIndex}(c) = \boldsymbol{V} \ ,$$

$$\mathtt{FBase}(c)(v_1) = j = \mathtt{FBase}(c)(v_2)$$

$$\mathtt{Somm}(c) = E$$

$$\mathtt{proj}(c)_1 \in \mathtt{FlId}(\boldsymbol{E})$$

$$\mathtt{proj}(c)_2 \in \mathtt{FlId}(\boldsymbol{E}) \ .$$

Dualement, on désigne par Λ le graphe à composition (évidemment petit) n'ayant que trois objets 0 , 1 et 2 et deux flèches $\lambda_1 : 0 \to 1$ et $\lambda_2 : 0 \to 2$.

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse, si $E \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})$ et $F \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})$ sont deux objets et si $e : F \to E \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{E})$ est une flèche, on dit et on écrit que :

$$e : F \to E$$

est un épimorphisme potentiel de $\boldsymbol{E}$

si, et seulement si :

- il existe un cône inductif distingué $c \in \mathtt{CIDIst}(\boldsymbol{E})$ tel que :

$$\mathtt{GIndex}(c) = \Lambda \ ,$$

$$\mathtt{FBase}(c)(\lambda_1) = e = \mathtt{FBase}(c)(\lambda_2) \ ,$$

$$\mathtt{Somm}(c) = F \ ,$$

$$\mathtt{insert}(c)_1 \in \mathtt{FlId}(\boldsymbol{E}) \ ,$$

$$\mathtt{insert}(c)_2 \in \mathtt{FlId}(\boldsymbol{E}) \ .$$

11. Transformations naturelles entre modèles.

11.1. Définition des transformations naturelles entre modèles.

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse, si $\boldsymbol{C}$ est une catégorie, si $M_1 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{C}$ et $M_2 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{C}$ sont deux modèles, une *transformation naturelle* $m : M_1 \Rightarrow M_2 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{C}$ *de* M_1 *vers* M_2 est constituée par :

- la donnée, d'une transformation naturelle *sous-jacente* (entre les foncteurs sous-jacents) :

$$\mathtt{SSJac}(m) : \mathtt{SSJac}(M_1) \Rightarrow \mathtt{SSJac}(M_2) : \mathtt{Supp}(\boldsymbol{E}) \to \boldsymbol{C} \ .$$

11.2. Notations simplifiées pour les transformations naturelles entre modèles.

Si $\boldsymbol{E}$ est un graphe à composition, si $\boldsymbol{C}$ est une catégorie, si $M_1 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{C}$ et $M_2 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{C}$ sont deux modèles et si $m : M_1 \Rightarrow M_2 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{C}$ est une transformation naturelle, on note (selon le degré de précision nécessaire et/ou le contexte) :

$$m : M_1 \Rightarrow M_2 \ ,$$

$$m : M_1 \to M_2 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{C} \ ,$$

$$m : M_1 \to M_2 \ ,$$

$$m = (m(E))_{E \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})} = (m_E)_{E \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})} = (\mathtt{SSJac}(m)_E)_{E \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})} \ .$$

11.3. Transformations naturelles identités et composition (latérale) des transformations naturelles (entre modèles).

Si $\boldsymbol{E}$ est un graphe à composition, si $\boldsymbol{C}$ est une catégorie et si $M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{C}$ est un modèle, on note $\mathtt{id}(M) : M \Rightarrow M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{C}$ la transformation naturelle *identité de* M , i.e. la transformation naturelle (évidemment bien définie) telle que :

- $\mathtt{SSJac}(\mathtt{id}(M)) = \mathtt{id}(\mathtt{SSJac}(M))$,

autrement dit, telle que :

- pour tout objet $E \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})$, on a $(\mathtt{id}(M))(E) = \mathtt{id}(M(E)) : M(E) \to M(E)$.

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse, si $\boldsymbol{C}$ est une catégorie, si $M_1 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{C}$, $M_2 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{C}$ et $M_3 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{C}$ sont trois modèles et si $m_1 : M_1 \Rightarrow M_2 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{C}$ et $m_2 : M_2 \Rightarrow M_3 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{C}$ sont deux transformations naturelles, on note $m_2 \bullet m_1 : M_1 \Rightarrow M_3 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{C}$ la *transformation naturelle composée (latérale) de* m_2 *et* m_1 , i.e. la transformation naturelle (évidemment bien définie) telle que :

- pour tout objet $E \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})$, on a $(m_2 \bullet m_1)(E) = m_2(E) \bullet m_1(E)$.

11.4. Composition (longitudinale) des transformations naturelles entre modèles et des homomorphismes (entre esquisses).

Si $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{E}'$ sont deux esquisses, si $\boldsymbol{C}$ est une catégorie, si $H : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$ est un homomorphisme, si $M'_1 : \boldsymbol{E}' \to \boldsymbol{C}$ et $M'_2 : \boldsymbol{E}' \to \boldsymbol{C}$ sont deux modèles et si $m' : M'_1 \Rightarrow M'_2 : \boldsymbol{E}' \to \boldsymbol{C}$ est une transformation naturelle, on note :

$$m' \circ H : M'_1 \circ H \Rightarrow M'_2 \circ H : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{C}$$

la transformation naturelle composée (longitudinale) de m' *et* H, i.e. la transformation naturelle (évidemment bien définie) telle que :

- $\mathtt{SSJac}(m' \circ H) = \mathtt{SSJac}(m') \circ \mathtt{Supp}(H)$,

autrement dit, telle que :

- pour tout objet $E \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})$, on a $(m' \circ H)(\boldsymbol{E}) = m'(H(E))$.

12. Catégories de modèles et foncteurs induits.

12.1. Catégories de modèles.

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite et si $\boldsymbol{C}$ est une catégorie localement petite, on note $\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{C})$ la catégorie, évidemment localement petite, dont les objets sont les modèles de $\boldsymbol{E}$ vers $\boldsymbol{C}$, dont les flèches sont les transformations naturelles entre ces modèles de $\boldsymbol{E}$ vers $\boldsymbol{C}$ et où la composition est la latérale des morphismes.

12.2. Foncteurs induits entre catégories de modèles.

Si $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{E}'$ sont deux esquisses petites, si $\boldsymbol{C}$ est une catégorie localement petite et si $H : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$ est un homomorphisme, on note :

$$\mathtt{Mod}(H, \boldsymbol{C}) : \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}', \boldsymbol{C}) \to \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{C})$$

le foncteur *induit par* H , c'est-à-dire le foncteur *composition par* H , i.e. le foncteur (évidemment bien défini) tel que :

- pour tout objet $M' \in \mathtt{Ob}(\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}',\boldsymbol{C}))$, i.e. pour tout modèle $M' : \boldsymbol{E}' \to \boldsymbol{C}$, on a :

$$\mathtt{Mod}(H,\boldsymbol{C})(M') = M' \circ H : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{C} \ ,$$

- pour toute flèche $m' \in \mathtt{Fl}(\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}',\boldsymbol{C}))$, i.e. pour tous modèles $M'_1 : \boldsymbol{E}' \to \boldsymbol{C}$ et $M'_2 : \boldsymbol{E}' \to \boldsymbol{C}$ et toute transformation naturelle $m' : M'_1 \Rightarrow M'_2 : \boldsymbol{E}' \to \boldsymbol{C}$, on a :

$$\mathtt{Mod}(H,\boldsymbol{C})(m') = m' \circ H : M'_1 \circ H \Rightarrow M'_2 \circ H : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{C} \ .$$

13. Catégories esquissables et foncteurs esquissables.

13.1. Catégories esquissables.

Si $\boldsymbol{M}$ est une catégorie, on dit que $\boldsymbol{M}$ est *esquissable* si, et seulement si :
- il existe une esquisse petite $\boldsymbol{E}$ telle que les catégories $\boldsymbol{M}$ et $\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$ sont équivalentes.

13.2. Foncteurs esquissables

Si $\boldsymbol{M}_1$ et $\boldsymbol{M}_2$ sont deux catégories et si $U : \boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$ est un foncteur, on dit que U est *esquissable* si, et seulement si :
- il existe une esquisse petite $\boldsymbol{E}_1$, il existe une esquisse petite $\boldsymbol{E}_2$ et il existe un homomorphisme $H : \boldsymbol{E}_2 \to \boldsymbol{E}_1$ tels que les foncteurs $U : \boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$ et $\mathtt{Mod}(H,\boldsymbol{Ens}) : \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{Ens}) \to \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{Ens})$ sont équivalents.

14. Foncteurs évaluation.

14.1. Définition des foncteurs évaluation.

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite et si $E \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})$ est un objet, on note :

$$\mathrm{ev}_{\boldsymbol{E},E} : \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens}) \to \boldsymbol{Ens}$$

le foncteur *évaluation en* E , i.e. le foncteur (évidemment bien défini) tel que :

- pour tout objet $M \in \mathtt{Ob}(\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens}))$, i.e. pour tout modèle $M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$, on a :

$$\mathtt{ev}_{\boldsymbol{E},E}(M) = M(E) \ ,$$

- pour toute flèche $m \in \mathtt{Fl}(\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens}))$, i.e. pour tous modèles $M_1 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ et $M_2 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ et toute transformation naturelle $m : M_1 \Rightarrow M_2 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$, on a :

$$\mathtt{ev}_{\boldsymbol{E},E}(m) = m(E) \ .$$

14.2. Notation simplifiée pour les foncteurs évaluation.

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite et si $E \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})$, on note (s'il n'y a pas risque d'ambiguïté quant à l'esquisse $\boldsymbol{E}$) :

$$\mathrm{ev}_E = \mathrm{ev}_{\boldsymbol{E},E} : \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens}) \to \boldsymbol{Ens} \ .$$

14.3. Esquissabilité des foncteurs évaluation.

On désigne par $\boldsymbol{1}$ l'esquisse (évidemment petite) telle que :

- $\mathtt{Supp}(\boldsymbol{1}) = \underline{1}$ est le graphe à composition ayant pour seul objet 1 et aucune flèche,
- $\mathtt{CPDist}(\boldsymbol{1}) = \emptyset$,
- $\mathtt{CIDist}(\boldsymbol{1}) = \emptyset$.

Alors, il est clair que $\boldsymbol{Ens}$ et $\mathtt{Mod}(\boldsymbol{1}, \boldsymbol{Ens})$ sont isomorphes, de sorte que la catégorie $\boldsymbol{Ens}$ est une catégorie esquissable !

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite et si $E \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})$, on désigne par :

$$\mathtt{select}(\boldsymbol{E}, E) : \boldsymbol{1} \to \boldsymbol{E}$$

l'homomorphisme *sélection de* E *dans* $\boldsymbol{E}$, i.e. l'homomorphisme (évidemment bien défini) tel que :

- $\mathtt{sel}(\boldsymbol{E}, E)(1) = E$.

Alors, il est clair que les foncteurs :

$$\mathtt{ev}_{\boldsymbol{E},E} : \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens}) \to \boldsymbol{Ens}$$

et

$$\mathtt{Mod}(\mathtt{select}(\boldsymbol{E}, E), \boldsymbol{Ens}) : \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens}) \to \mathtt{Mod}(\boldsymbol{1}, \boldsymbol{Ens})$$

sont équivalents (et même "isomorphes") de sorte que le foncteur $\mathtt{ev}_{\boldsymbol{E},E} : \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens}) \to \boldsymbol{Ens}$ est esquissable !

15. Extensions d'esquisses.

15.1. Graphe à composition et foncteurs canoniquement associés à un modèle.

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite et si $M_0 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ est un modèle, on désigne par $\mathtt{GCano}(M_0)$ le *graphe à composition canoniquement associé à* M_0 , i.e. le graphe à composition (évidemment petit) défini comme suit :

- l'ensemble $\mathtt{Ob}(\mathtt{GCano}(M_0))$ de ses objets est l'ensemble des (E, X) où $E \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})$ et $X \in M_0(E)$,
- l'ensemble $\mathtt{Fl}(\mathtt{GCano}(M_0))$ de ses flèches est l'ensemble des :

$$((E_1, X_1), e, (E_2, X_2)) : (E_1, X_1) \to (E_2, X_2)$$

où $(E_1, X_1) \in \mathtt{Ob}(\mathtt{GCano}(M_0))$, $(E_2, X_2) \in \mathtt{Ob}(\mathtt{GCano}(M_0))$, $e : E_1 \to E_2 \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{E})$ et $M_0(e)(X_1) = X_2$,

- l'ensemble $\mathtt{FlId}(\mathtt{GCano}(M_0))$ de ses flèches identités est l'ensemble des :

$$((E, X), e, (E, X)) : (E, X) \to (E, X) \in \mathtt{Fl}(\mathtt{GCano}(M_0))$$

où $e : E \to E \in \mathtt{FlId}(\boldsymbol{E})$,

- l'ensemble $\mathtt{CComp}(\mathtt{GCano}(M))$ de ses couples composables est l'ensemble des :

$$\big(((E_2, X_2), e_2, (E_3, X_3)), ((E_1, X_1), e_1, (E_2, X_2))\big) \in \mathtt{CConsec}(\mathtt{GCano}(M))$$

où $(e_2, e_1) \in \mathtt{CComp}(\boldsymbol{E})$ et, ce, de sorte que :

$$((E_2, X_2), e_2, (E_3, X_3)) \bullet ((E_1, X_1), e_1, (E_2, X_2)) = ((E_1, X_1), e_2\ e_1, (E_3, X_3)) \ .$$

Alors, on désigne par $\mathtt{FCano}(M_0) : \mathtt{GCano}(M_0) \to \mathtt{Supp}(\boldsymbol{E})$ le *foncteur canoniquement associé à* M_0 , i.e. le foncteur (évidemment bien défini) tel que :

- pour tout objet $(E, X) \in \mathtt{Ob}(\mathtt{GCano}(M_0))$, on a $\mathtt{FCano}(M_0)(E, X) = E$,

- pour toute flèche $((E_1, X_1), e, (E_2, X_2)) \in \texttt{Fl}(\texttt{GCano}(M_0))$, on a :

$$\texttt{FCano}(M_0)((E_1, X_1), e, (E_2, X_2)) = e \ .$$

15.2. Extension d'une esquisse par un modèle.

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite et si $M_0 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ est un modèle, on désigne par $\mathrm{Ext}(\boldsymbol{E}, M_0)$ l'esquisse *extension de* $\boldsymbol{E}$ *par* M_0 , i.e. l'esquisse (évidemment petite) obtenue en ajoutant à $\boldsymbol{E}$:

- un objet supplémentaire $F_{M_0} \in \texttt{Ob}(\texttt{Ext}(\boldsymbol{E}, M_0))$,

- pour tout objet $(E, X) \in \texttt{Ob}(\texttt{GCano}(M_0))$, une flèche supplémentaire :

$$p_{M_0,(E,X)} : F_{M_0} \to (E = \texttt{FCano}(M_0)(E, X)) \in \texttt{Fl}(\texttt{Ext}(\boldsymbol{E}, M_0)) \ ,$$

- pour toute flèche $((E_1, X_1), e, (E_2, X_2)) \in \texttt{Fl}(\texttt{GCano}(M_0))$, un couple composable supplémentaire :

$$\big(((E_1, X_1), e, (E_2, X_2)), p_{M_0,(E_1,X_1)}\big) \in \texttt{CComp}(\texttt{Ext}(\boldsymbol{E}, M_0)) \ ,$$

- une limite projective potentielle supplémentaire (autrement dit, un cône projectif distingué supplémentaire), i.e. le cône projectif (évidemment bien défini) :

$$p_{M_0} = (p_{M_0,(E,X)} : F_{M_0} \to E)_{(E,X) \in \texttt{GCano}(M_0)} \in \texttt{CPDist}(\texttt{Ext}(\boldsymbol{E}, M_0)) \ .$$

Alors, on note :

$$\boldsymbol{E} \subseteq \texttt{Ext}(\boldsymbol{E}, M_0) : \boldsymbol{E} \to \texttt{Ext}(\boldsymbol{E}, M_0)$$

l'homomorphisme injection canonique.

15.3. Extension d'une esquisse par une transformation naturelle (entre modèles).

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite, si $M_0 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ et $N_0 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ sont deux modèles et si $m_0 : M_0 \Rightarrow N_0 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ est une transformation naturelle, on désigne par $\texttt{Ext}(\boldsymbol{E}, m_0)$ l'*extension de* $\boldsymbol{E}$ *par* m_0 , i.e. l'esquisse (évidemment petite) obtenue en ajoutant à la réunion $\texttt{Ext}(\boldsymbol{E}, M_0) \cup \texttt{Ext}(\boldsymbol{E}, N_0)$ (qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter) :

- une flèche supplémentaire $f_{N_0} : F_{N_0} \to F_{M_0} \in \mathtt{Fl}(\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, m_0))$,

- pour tout objet $(E, X) \in \mathtt{Ob}(\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, M_0))$, un couple composable :

$$(p_{M_0,X}, f_{m_0}) \in \mathtt{CComp}(\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, m_0))$$

et, ce, de sorte que $p_{M_0,X} \bullet f_{m_0}) = p_{N_0,m_0(E)(X)}$.

Alors, on note :

$$\boldsymbol{E} \subseteq \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, m_0) : \boldsymbol{E} \to \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, m_0) \ ,$$

$$\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, M_0) \subseteq \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, m_0) : \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, M_0) \to \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, m_0) \ ,$$

$$\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, N_0) \subseteq \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, m_0) : \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, N_0) \to \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, m_0) \ ,$$

les homomorphismes injections canoniques.

15.4. Extension d'une esquisse par un ensemble de transformations naturelles (entre modèles).

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite et si $\boldsymbol{m}_0 \subseteq \mathtt{Fl}(\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens}))$ est un ensemble de transformations naturelles entre modèles de $\boldsymbol{E}$ dans $\boldsymbol{Ens}$, on désigne par $\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{m}_0)$ l'*extension de* $\boldsymbol{E}$ *par l'ensemble* $\boldsymbol{m}_0$, i.e. l'esquisse (évidemment petite) :

$$\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{m}_0) = \bigcup_{m_0 \in \boldsymbol{m}_0} \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, m_0) \ .$$

Alors, on note :

$$\boldsymbol{E} \subseteq \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{m}_0) : \boldsymbol{E} \to \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{m}_0) \ ,$$

et, pour toute flèche $m_0 : M_0 \Rightarrow N_0 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \boldsymbol{m}_0 \subseteq \mathtt{Fl}(\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens}))$:

$$\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, M_0) \subseteq \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{m}_0) : \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, M_0) \to \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{m}_0) \ ,$$

$$\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, N_0) \subseteq \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{m}_0) : \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, N_0) \to \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{m}_0) \ ,$$

$$\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, m_0) \subseteq \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{m}_0) : \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, m_0) \to \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{m}_0)$$

les homomorphismes injections canoniques.

16. Prolongements canoniques de modèles.

16.1. Prolongement canonique à l'extension par un modèle.

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite, si $M_0 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ est un modèle ("fixé").et si $M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ est un modèle ("variable"), on désigne par :

$$\mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E},M_0}(M) : \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, M_0) \to \boldsymbol{Ens}$$

le modèle *prolongement canonique de* $M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ *le long de l'homomorphisme injection canonique* $\boldsymbol{E} \subseteq \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, M_0) : \boldsymbol{E} \to \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, M_0)$, i.e. le modèle (évidemment bien défini) tel que :

- $(\mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E},M_0}(M))(F_{M_0}) = \mathtt{Hom}_{\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})}(M_0, M)$:

- pour tout objet $(E, X) \in \mathtt{Ob}(\mathtt{GCano}(M_0))$, autrement dit pour tout objet $E \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})$ et tout $X \in M_0(E)$, on a :

$$\begin{aligned}(\mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E},M_0}(M))(p_{M_0,(E,X)}) : \mathtt{Hom}_{\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})}(M_0, M) &\longrightarrow M(E) \\ (m : M_0 \Rightarrow M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}) &\mapsto m(E)(X)\end{aligned}$$

(de sorte que - classiquement - le cône projectif :

$$(\mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E},M_0}(M))(p_{M_0,(E,X)}) : \mathtt{Hom}_{\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})}(M_0, M) \to M(\boldsymbol{E}))_{(E,X) \in \mathtt{GCano}(M_0)}$$

est bien un cône projectif limite - "canonique" - de $\boldsymbol{Ens}$ et, donc, que $\mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E},M_0}(M)$ est bien un modèle).

16.2. Prolongement canonique à l'extension par une transformation naturelle (entre modèles).

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite, si $M_0 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ et $N_0 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ sont deux modèles ("fixés"), si $m_0 : M_0 \Rightarrow N_0 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ est une transformation naturelle ("fixée") et si $M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ est un modèle, on désigne par :

$$\mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E},m_0}(M) : \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, m_0) \to \boldsymbol{Ens}$$

le modèle *prolongement canonique de* $M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ *le long de l'homomorphisme injection canonique* $\boldsymbol{E} \subseteq \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, m_0) : \boldsymbol{E} \to \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, m_0)$, i.e. le modèle (évidemment bien défini) tel que :

- $\mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E},m_0}(M):\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},m_0)\to \boldsymbol{Ens}$ prolonge $\mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E},M_0}(M):\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},M_0)\to \boldsymbol{Ens}$ le long de l'homomorphisme injection canonique :

$$\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},M_0)\subseteq \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},m_0):\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},M_0)\to \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},m_0)\ ,$$

- $\mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E},m_0}(M):\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},m_0)\to \boldsymbol{Ens}$ prolonge $\mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E},N_0}(M):\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},N_0)\to \boldsymbol{Ens}$ le long de l'homomorphisme injection canonique :

$$\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},N_0)\subseteq \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},m_0):\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},N_0)\to \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},m_0)\ ,$$

- $(\mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E},m_0}(M))(f_{m_0})=\mathtt{Hom}_{\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})}(m_0,M)$.

16.3. Prolongement canonique à l'extension par un ensemble de transformations naturelles (entre modèles).

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite et si $\boldsymbol{m}_0\subseteq \mathtt{Fl}(\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens}))$ est un ensemble de transformations naturelles entre modèles de $\boldsymbol{E}$ dans $\boldsymbol{Ens}$ et si $M:\boldsymbol{E}\to \boldsymbol{Ens}$ est un modèle, on désigne par :

$$\mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E},\boldsymbol{m}_0}(M):\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{m}_0)\to \boldsymbol{Ens}$$

le modèle *prolongement canonique de* $M:\boldsymbol{E}\to \boldsymbol{Ens}$ *le long de l'homomorphisme injection canonique* $\boldsymbol{E}\subseteq \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{m}_0):\boldsymbol{E}\to \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{m}_0)$, i.e. le modèle (évidemment bien défini) tel que :

- pour toute flèche $m_0\in \boldsymbol{m}_0$, le modèle $\mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E},\boldsymbol{m}_0}(M):\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{m}_0)\to \boldsymbol{Ens}$ prolonge le modèle $\mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E},m_0}(M):\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},m_0)\to \boldsymbol{Ens}$ le long de l'homomorphisme injection canonique $\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},m_0)\subseteq \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{m}_0):\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},m_0)\to \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{m}_0)$.

17. Catégories de modèles et catégories de leurs prolongements canoniques.

17.1. Catégories de modèles et catégories de leurs prolongements canoniques aux extensions par un modèle.

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite et si $M_0 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ est un modèle ("fixé"), on désigne par :

$$\mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E},M_0}(-) : \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens}) \to \mathtt{Mod}(\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},M_0),\boldsymbol{Ens})$$

le foncteur *prolongement canonique le long de l'homomorphisme injection canonique :*

$$\boldsymbol{E} \subseteq \mathrm{Ext}(\boldsymbol{E},M_0) : \boldsymbol{E} \to \mathrm{Ext}(\boldsymbol{E},M_0) \ ,$$

i.e. l'unique foncteur (évidemment bien défini) tel que :

- pour tout objet $M \in \mathtt{Ob}(\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens}))$, i.e. pour tout modèle $M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$, on a :

$$(\mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E},M_0}(-))(M) = \mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E},M_0}(M) \ .$$

Alors, il est clair que ce foncteur prolongement canonique :

$$\mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E},M_0}(-) : \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens}) \to \mathtt{Mod}(\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},M_0),\boldsymbol{Ens})$$

et le foncteur induit par l'injection canonique:

$$\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E} \subseteq \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},M_0),\boldsymbol{Ens}) : \mathtt{Mod}(\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},M_0),\boldsymbol{Ens}) \to \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$$

constituent une équivalence de catégories.

17.2. Catégories de modèles et catégories de leurs prolongements par une transformation naturelle (entre modèles).

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite, si $M_0 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ et $N_0 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ sont deux modèles ("fixés") et si $m_0 : M_0 \Rightarrow N_0 : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ est une transformation naturelle ("fixée"), on désigne par :

$$\mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E},m_0}(-) : \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens}) \to \mathtt{Mod}(\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},m_0),\boldsymbol{Ens})$$

le foncteur *prolongement canonique long de l'homomorphisme injection canonique :*

$$\boldsymbol{E} \subseteq \mathrm{Ext}(\boldsymbol{E}, m_0) : \boldsymbol{E} \to \mathrm{Ext}(\boldsymbol{E}, m_0) \ ,$$

i.e. l'unique foncteur (évidemment bien défini) tel que :

- pour tout objet $M \in \mathtt{Ob}(\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens}))$, i.e. pour tout modèle $M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$, on a :

$$(\mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E}, m_0}(-))(M) = \mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E}, m_0}(M) \ .$$

Alors, il est clair que ce foncteur prolongement canonique :

$$\mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E}, m_0}(-) : \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens}) \to \mathtt{Mod}(\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, m_0), \boldsymbol{Ens})$$

et le foncteur induit par l'injection canonique:

$$\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E} \subseteq \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, m_0), \boldsymbol{Ens}) : \mathtt{Mod}(\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, m_0), \boldsymbol{Ens}) \to \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens})$$

constituent une équivalence de catégories.

17.3. Catégories de modèles et catégories de leurs prolongements canoniques par un ensemble de transformations naturelles (entre modèles).

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite, et si $\boldsymbol{m}_0 \subseteq \mathtt{Fl}(\boldsymbol{E})$ est un ensemble ("fixé") de transformations naturelles, on désigne par :

$$\mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{m}_0}(-) : \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens}) \to \mathtt{Mod}(\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{m}_0), \boldsymbol{Ens})$$

le foncteur *prolongement canonique long de l'homomorphisme injection canonique :*

$$\boldsymbol{E} \subseteq \mathrm{Ext}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{m}_0) : \boldsymbol{E} \to \mathrm{Ext}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{m}_0) \ ,$$

i.e. l'unique foncteur (évidemment bien défini) tel que :

- pour tout objet $M \in \mathtt{Ob}(\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens}))$, i.e. pour tout modèle $M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$, on a :

$$(\mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{m}_0}(-))(M) = \mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{m}_0}(M) \ .$$

Alors, il est clair que ce foncteur prolongement canonique :

$$\mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{m}_0}(-) : \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens}) \to \mathtt{Mod}(\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{m}_0), \boldsymbol{Ens})$$

et le foncteur induit par l'injection canonique:

$$\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E} \subseteq \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{m}_0), \boldsymbol{Ens}) : \mathtt{Mod}(\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{m}_0), \boldsymbol{Ens}) \to \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens})$$

constituent une équivalence de catégories.

18. Ensembles de solutions.

18.1. Définition des ensembles de solutions.

Si $\boldsymbol{M}_1$ et $\boldsymbol{M}_2$ sont deux catégories localement petites, si $U : \boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$ est un foncteur, si $\boldsymbol{X}$ est un ensemble, si $L = (L_X \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M}_1))_{X \in \boldsymbol{X}}$ est une famille d'objets, si $S \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M}_2)$ est un objet et si $p = (p_X : S \to U(L_X) \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}_2))_{X \in \boldsymbol{X}}$ est une famille projective de flèches, on dit que *la famille projective de flèches p présente la famille d'objets L comme un ensemble de solutions pour l'objet S relativement au foncteur U* si, et seulement si :

- pour tout objet $M \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M}_1)$ et toute flèche $m : S \to U(M) \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}_2)$ il existe au moins) un $X \in \boldsymbol{X}$ et (au moins) une flèche $m_X : L_X \to M \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}_1)$ tels que :
$$U(m_X).p_X = m \ .$$

18.2. Existence d'ensembles de solutions.

On peut montrer que :

- si $\boldsymbol{M}_1$ et $\boldsymbol{M}_2$ sont deux catégories localement petites et si $U : \boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$ est un foncteur esquissable, alors à tout objet $S \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M}_2)$ on peut associer une famille d'objets $L = (L_X \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M}_1))_{X \in \boldsymbol{X}}$ et une famille projective de flèches $p = (p_X : S \to U(L_X) \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}_2))_{X \in \boldsymbol{X}}$ de sorte que la famille projective de flèches p présente la famille d'objets L comme un ensemble de solutions pour l'objet S relativement au foncteur U .

En particulier, ceci vaut si $\boldsymbol{M}_1 = \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens})$ est la catégorie des modèles d'une esquisse petite $\boldsymbol{E}$, si $\boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{Ens}$ et si :

$$U = \mathtt{ev}_{\boldsymbol{E},E} : (\boldsymbol{M}_1 = \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens})) \to (\boldsymbol{Ens} = \boldsymbol{M}_2)$$

est le foncteur évaluation en un quelconque objet $E \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{E})$ (et plus spécifiquement encore, si $S = \Delta = \{\delta\}$ est une ensemble, choisi arbitrairement, à un seul élément).