DIAGRAMMES VOLUMES 59 + 60, FASCICULE 1, 2008

SUR CERTAINES SOUS-CATEGORIES NON PLEINES DES CATEGORIES DE MODELES

Fascicule 1 :

Enoncés et Preuves

Claude Henry

(maxchen@free.fr)

et

Christian Lair

(lairchrist@aol.com)

A.M.S. Sub. Class. : 18 C 10, 18 C 30, 18 C 35

Introduction.

On sait caractériser sémantiquement certaines sous-catégories *pleines* de la catégorie des modèles d'une théorie du premier ordre (i.e. d'une esquisse) en exprimant que leurs classes d'*objets* constituent des classes de *satifaction* (en particulier, des classes d'*injectivité*) relativement à des familles projectives de flèches de la catégorie initiale. On sait aussi caractériser syntaxiquement ces sous-catégories pleines comme les catégories de modèles des sur-théories obtenues en ajoutant à la théorie initiale des axiomes supplémentaires (mais pas d'autres données).

Par exemple, un ensemble $\boldsymbol{X}$ est (évidemment) *non vide* si, et seulement si, il vérifie l'axiome :

$$\exists x \in \boldsymbol{X} \;\; x = x \;;$$

mais, on peut dire aussi que $\boldsymbol{X}$ est non vide si, et seulement si, en tant qu'objet de la catégorie ***Ens*** de *tous* les ensembles et de *toutes* les applications entre eux, il est *injectif* relativement à la flèche $q : \boldsymbol{\emptyset} \to \{\boldsymbol{\emptyset}\}$, i.e. si et seulement si :

- pour toute application $a : \boldsymbol{\emptyset} \to \boldsymbol{X}$ (évidemment, il n'y en a qu'une !), comme représentée ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{\emptyset} \arrow[l, "a"'] \arrow[d, "q"] \\ & \{\boldsymbol{\emptyset}\} \end{tikzcd}$$

il existe (au moins) une application $a' : \{\boldsymbol{\emptyset}\} \to \boldsymbol{X}$ telle que $a' \circ q = a$, comme représentée ci-dessous :

$$
\begin{tikzcd}
X & \mathbf{0} \arrow[l, "a"'] \arrow[d, "q"] \\
 & \{\mathbf{0}\} \arrow[ul, "a'"]
\end{tikzcd}
$$

De même, un groupe abélien $\boldsymbol{G}$ (noté additivement) est *de torsion* s'il vérifie l'axiome :

$$\forall\ g \in \boldsymbol{G} \quad \bigvee_{n \in \mathbf{N}^*} ng = 0 \ ;$$

mais on peut dire aussi que $\boldsymbol{G}$ est de torsion si, et seulement si, en tant qu'objet de la catégorie $\boldsymbol{Ab}$ de *tous* les groupes abéliens et de *tous* les homomorphismes entre eux, il *satisfait* la famille projective $(q_n : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_{n \in \mathbf{N}^*}$ de flèches de $\boldsymbol{Ab}$ (où les q_n sont les passages aux classes), i.e. si et seulement si :

- pour tout homomorphisme $h : \mathbf{Z} \to \boldsymbol{G}$, comme représenté ci-dessous :

$$
\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{G} & \mathbf{Z} \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "q_n"] & \\
 & & \text{- - - - - - - -}\ \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\ \text{- - - - - - - -} &
\end{tikzcd}
$$

il existe (au moins) un $n \in \mathbf{N}^*$ et au moins un homomorphisme $h'_n : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to \boldsymbol{G}$ tel que $h'_n \circ q_n = h$, comme représenté ci-dessous :

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{G} & \mathbf{Z} \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "q_n"] \\
 & \text{- - - - - - - -}\ \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\ \text{- - - - - - - -} \arrow[ul, "h'_n"]
\end{tikzcd}
$$

Ceci, pour ne citer que deux exemples, parmi une multitude d'autres que le lecteur a certainement déjà en tête ...

Disons maintenant qu'une sous-catégorie d'une catégorie est *co-pleine* si, et seulement si, elle a les mêmes objets . Alors, dans le présent travail, nous caractérisons sémantiquement certaines sous-catégories co-pleines d'une catégorie de modèles d'une quelconque esquisse (i.e. d'une théorie du premier ordre) en exprimant que leurs classes de *flèches* constituent des classes qui *équilibrent* des ensembles de cônes projectifs de la catégorie initiale (en particulier, des classes "*d'orthogonalité*"). Et nous les caractérisons aussi syntaxiquement en prouvant que ce sont les catégories de modèles des sur-esquisses obtenues en ajoutant à l'esquisse initiale des *compléments* à des sous-objets qui y sont spécifiés.

Par exemple, la catégorie ***Ens*** de *tous* les ensembles et de *toutes* les applications entre eux est (équivalente à) la catégorie des modèles de l'esquisse :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "d"] & S \times S \arrow[l, bend right=40, "p_1"'] \arrow[l, bend left=40, "p_2"] \end{tikzcd}$$

(où p_1 et p_2 sont les deux projections et d est la diagonale). Sa sous-catégorie co-pleine ***EnsInj*** , de *tous* les ensembles et des *seules applications injectives*, est la catégorie des modèles de la sur-esquisse :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "d"] & S \times S = S + (\neg S) \arrow[l, bend right=40, "p_1"'] \arrow[l, bend left=40, "p_2"] \\ & \neg S \arrow[u, "\neg d"'] \end{tikzcd}$$

(où d et $\neg d$ sont les deux co-projections) ; mais on peut dire aussi qu'une application $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ est injective si, et seulement si, en tant que flèche de la catégorie ***Ens*** , elle est "*orthogonale"* à l'application $r : \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \to \{\emptyset\}$, i.e. si et seulement si :

- pour tout carré commutatif d'applications tel que ci-dessous :

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \arrow[l, "b"'] \arrow[d, "r"] \\
Y & \{\emptyset\} \arrow[l, "c"]
\end{tikzcd}
$$

il existe (au moins) une application $b' : \{\emptyset\} \to X$ telle que $b' \circ r = b$, comme représentée ci-dessous :

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \arrow[l, "b"'] \arrow[d, "r"] \\
Y & \{\emptyset\} \arrow[l, "c"] \arrow[ul, "b'"]
\end{tikzcd}
$$

De même, la catégorie $\boldsymbol{Ab}$ de *tous* les groupes abéliens et de *tous* les homomorphismes entre eux est (équivalente à) la catégorie des modèles d'une esquisse où on peut toujours faire figurer (parmi d'autres ingrédients que nous laissons au lecteur le soin de détailler) un monomorphisme :

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "j"] & S
\end{tikzcd}
$$

où S représente l'ensemble sous-jacent au groupe abélien ainsi esquissé et T le sous-ensemble de ses éléments de torsion. Alors, si on dit qu'un homomorphisme $k : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{H}$ entre deux groupes abéliens est *de torsion* si, et seulement si, un quelconque élément de $\boldsymbol{G}$ est de torsion dès que son image par k est de torsion, on voit que la sous-catégorie co-pleine $\boldsymbol{AbTor}$ de $\boldsymbol{Ab}$, constituée de *tous* les groupes abéliens et des *seuls homomorphismes de torsion*, est la catégorie des modèles de la sur-esquisse obtenue en rajoutant à l'esquisse des groupes abéliens précédente la somme représentée ci-dessous :

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "j"] & S = T + (\neg T) \\
& \neg T \arrow[u, "\neg j"']
\end{tikzcd}
$$

(où j et $\neg j$ sont les deux co-projections) ; mais on peut dire aussi que $f : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{H}$ est de torsion si, et seulement si, en tant que flèche de la catégorie $\boldsymbol{Ab}$, il *équilibre* la famille projective $(q_n : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})_{n\in\mathbf{N}^*}$ de flèches de $\boldsymbol{Ab}$, i.e. si et seulement si :

- pour tout $m \in \mathbf{N}^*$ et pour tout carré commutatif d'homomorphismes tel que ci-dessous :

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{G} \arrow[d, "f"'] & \mathbf{Z} \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "q_m"] \\
\boldsymbol{H} & \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \arrow[l, "k_m"]
\end{tikzcd}
$$

il existe au moins un $n \in \mathbf{N}^*$ et au moins un homomorphisme $h'_n : \mathbf{Z}_n \to \boldsymbol{G}$ tel que $h'_n \circ q_n = h$, comme représentés ci-dessous :

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{G} \arrow[dd, "f"'] & & \mathbf{Z} \arrow[ll, "h"'] \arrow[dd, "q_m"] \arrow[dl, "q_n"] \\
& \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \arrow[ul, "h'_n"] & \\
\boldsymbol{H} & & \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \arrow[ll, "k_m"]
\end{tikzcd}
$$

Ceci, pour ne citer que deux exemples, parmi une multitude d'autres que nous laisserons au lecteur le soin de détailler ...

Pour rendre la lecture aussi aisée que possible, nous présentons les choses sous-forme de trois fascicules disctincts :

- dans le présent **Fascicule 1** , le lecteur trouvera l'exposé détaillé des résultats obtenus et de leurs démonstrations,

- dans le **Fascicule 2** , "l'**Atlas des Figures**", le lecteur trouvera toutes les figures auxquelles il est fait allusion dans le **Fascicule 1** (il pourra donc consulter d'autant plus facilement les **Fascicules 1** et **2** simultanément pour mettre en regard chaque figure et la partie correspondante du texte où elle est mentionnée),

- dans le **Fascicule 3**, "l'**Appendice**", il trouvera les prérequis (terminologie, notations, constructions, résultats fondamentaux ...), essentiellement de Théorie des Esquisses, que nous utilisons systématiquement dans le **Fascicule 1** (il pourra donc consulter d'autant plus facilement les **Fascicules 1** et **3** simultanément pour mettre en regard chaque définition, chaque terme, chaque construction et chaque résultat fondamentaux et la partie correspondante du texte où ils sont mentionnés).

1. Sous catégories complémentantes.

1.1. Sur-esquisses complémentantes.

Supposons que $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite (voir l'**Appendice - Fascicule 3**).

Si $j : E \to F$ est un monomorphisme potentiel (voir l'**Appendice - Fascicule 3**) de $\boldsymbol{E}$, on note $\texttt{Compl}(\boldsymbol{E}, j)$ la *sur-esquisse de* $\boldsymbol{E}$ *complémentant* j , i.e. l'esquisse petite obtenue, par *complémentation potentielle de* j, en ajoutant à $\boldsymbol{E}$ (voir la **Figure 1 - Fascicule 2**):

- un objet $\neg(E, j)$,

- une flèche $\neg j : \neg(E, j) \to F$,

- la somme potentielle (voir l'**Appendice - Fascicule 3**) ci-dessous :

$$E \xrightarrow{\ j\ } F \xleftarrow{\ \neg j\ } \neg(\boldsymbol{E}, j) \ .$$

Plus généralement, si $\boldsymbol{j}$ est un ensemble de tels monomorphismes potentiels j de $\boldsymbol{E}$, on note $\texttt{Compl}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{j})$ la *sur-esquisse de* $\boldsymbol{E}$ *complémentant* $\boldsymbol{j}$, i.e. l'esquisse petite réunion des $\texttt{Compl}(\boldsymbol{E}, j)$ quand j varie dans $\boldsymbol{j}$.

Alors, on dispose de l'homomorphisme (voir l'**Appendice - Fascicule 3**) injection canonique :

$$\boldsymbol{E} \subseteq \mathtt{Compl}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{j}) : \boldsymbol{E} \to \mathtt{Compl}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{j}) \quad ,$$

donc du foncteur :

$$\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E} \subseteq \mathtt{Compl}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{j}), \boldsymbol{Ens}) : \mathtt{Mod}(\mathtt{Compl}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{j}), \boldsymbol{Ens}) \to \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens}) \ ,$$

induit (voir l'**Appendice - Fascicule 3**) par $\boldsymbol{E} \subseteq \mathtt{Compl}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{j})$, entre les catéories de modèles dans $\boldsymbol{Ens}$ de $\boldsymbol{E}$ et $\mathtt{Compl}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{j})$ (voir l'**Appendice - Fascicule 3**).

Dans ces conditions, il est facile de vérifier que :

- le foncteur $\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E} \subseteq \mathtt{Compl}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{j}), \boldsymbol{Ens})$ a pour image une sous-catégorie $\boldsymbol{M}'$ de $\boldsymbol{M} = \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$ ayant les mêmes objets que $\boldsymbol{M}$,

- le foncteur $\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E} \subseteq \mathtt{Compl}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{j}), \boldsymbol{Ens})$ définit (par restriction) une équivalence sur sa catégorie image $\boldsymbol{M}'$.

1.2. Définition des sous-catégories complémentantes.

Si $\boldsymbol{M}$ est une catégorie esquissable (voir l'**Appendice - Fascicule 3**) et si $\boldsymbol{M}'$ est une sous-catégorie de $\boldsymbol{M}$ ayant les mêmes objets que $\boldsymbol{M}$, nous dirons que $\boldsymbol{M}'$ est une sous-catégorie *complémentante* de $\boldsymbol{M}$ si, et seulement si :

- il existe une esquisse petite $\boldsymbol{E}$ et un ensemble $\boldsymbol{j}$ de monomorphismes potentiels de $\boldsymbol{E}$ tels que le foncteur injection canonique :

$$\boldsymbol{M}' \subseteq \boldsymbol{M} : \boldsymbol{M}' \to \boldsymbol{M}$$

soit équivalent (voir l'**Appendice - Fascicule 3**) au foncteur :

$$\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E} \subseteq \mathtt{Compl}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{j}), \boldsymbol{Ens}) : \mathtt{Mod}(\mathtt{Compl}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{j}), \boldsymbol{Ens}) \to \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens}) \ .$$

2. Sous-catégories résolvantes.

2.1. Résolutions.

Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite et que $\boldsymbol{M}'$ est une sous-catégorie de $\boldsymbol{M}$ ayant les mêmes objets que $\boldsymbol{M}$.

Une *résolution de* $\boldsymbol{M}$ *dans* $\boldsymbol{M}'$ consiste en la donnée (voir la **Figure 2 - Fascicule 2**) :

- d'un ensemble (d'indices) $\boldsymbol{I}$,
- pour tout $I \in \boldsymbol{I}$, d'un objet $R_I \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M})$,
- pour tout $I \in \boldsymbol{I}$, d'un ensemble (d'indices) $\boldsymbol{X}_I$,
- pour tout $I \in \boldsymbol{I}$, d'une famille $P_I = (P_{I,X} \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M}))_{X \in \boldsymbol{X}_I}$ d'objets,
- pour tout $I \in \boldsymbol{I}$, d'une famille $p_I = (p_{I,X} : R_I \to P_{I,X} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}))_{X \in \boldsymbol{X}_I}$ de flèches,

et, ce, de sorte que :

- la condition suivante est vérifiée :

  Résol. 1 : pour tout $I \in \boldsymbol{I}$, la famille de flèches :

$$p_I = (p_{I,X} : R_I \to P_{I,X} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}))_{X \in \boldsymbol{X}_I}$$

  présente la famille d'objets :

$$P_I = (P_{I,X} \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M}') = \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M}))_{X \in \boldsymbol{X}_I}$$

  comme un ensemble de solutions dans $\boldsymbol{M}'$ pour l'objet $R_I \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M})$ relativement au foncteur injection canonique $\boldsymbol{M}' \subseteq \boldsymbol{M}$ (voir l'**Appendice - Fascicule 3** et/ou la **Figure 3 - Fascicule 2**),

- la condition suivante est vérifiée :

  Résol. 2 : pour tout objet $M \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M})$, pour tout objet $N \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M})$, pour toute flèche $m : M \to N \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M})$, pour tout objet $I \in \boldsymbol{I}$ et pour toute flèche $r_I : R_I \to M \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M})$, l'assertion **Assert. 1** ci-dessous implique l'assertion **Assert. 2** ci-dessous (voir la **Figure 4 - Fascicule 2**) :

  Assert. 1 : on a $r_I : R_I \to M \notin \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$,

  Assert. 2 : on a $m.r_I : R_I \to N \notin \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$.

- la condition suivante est vérifiée :

  Résol. 3 : pour tout objet $M \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M})$, pour tout objet $N \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M})$ et pour toute flèche $m : M \to N \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M})$, l'assertion **Assert. 3** ci-dessous implique l'assertion **Assert. 4** ci-dessous (voir la **Figure 5 - Fascicule 2**) :

  Assert. 3 : pour tout objet $I \in \boldsymbol{I}$ et pour toute flèche $r'_I : R_I \to M \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$, on a $m.r'_I : R_I \to N \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$,

  Assert. 4 : on a $m : M \to N \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$.

Formellement, on notera :

$$\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{I}, (R_I)_{I \in \boldsymbol{I}}, (\boldsymbol{X}_I)_{I \in \boldsymbol{I}}, ((P_{I,X})_{X \in \boldsymbol{X}_I})_{I \in \boldsymbol{I}}, ((p_{I,X})_{X \in \boldsymbol{X}_I})_{I \in \boldsymbol{I}})$$

une telle résolution de $\boldsymbol{M}$ dans $\boldsymbol{M}'$.

2.2. Définition des sous-catégories résolvantes.

Si $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite et si $\boldsymbol{M}'$ est une sous-catégorie de $\boldsymbol{M}$ ayant les mêmes objets que $\boldsymbol{M}'$, nous dirons que $\boldsymbol{M}'$ est une sous-catégorie résolvante de $\boldsymbol{M}$ si, et seulement si :

- il existe une résolution de $\boldsymbol{M}$ dans $\boldsymbol{M}'$.

3. Sous-catégories équilibrantes.

3.1. Equilibre.

Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite.

Si $\boldsymbol{Y}$ est un ensemble et si $q = (q_Y : Q \to Q_Y \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}))_{Y \in \boldsymbol{Y}}$ est une famille projective petite (voir l'**Appendice - Fascicule 3**) de flèches, on dit qu'une flèche $m : M \to N \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M})$ *équilibre* q si, et seulement si, la condition suivante est vérifiée :

Equil. 1 : pour toute flèche $s : Q \to M \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M})$, l'assertion **Assert. 5** ci-dessous implique l'assertion **Assert. 6** ci-dessous (voir la **Figure 6 - Fascicule 2**):

Assert. 5 : il existe un $Y_1 \in \boldsymbol{Y}$ et il existe une flèche $t_{Y_1} : Q_{Y_1} \to N \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M})$ tels que $m.s = t_{Y_1}.q_{Y_1}$,

Assert. 6 : il existe un $Y_2 \in \boldsymbol{Y}$ et il existe une flèche $s_{Y_2} : Q_{Y_2} \to M \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M})$ tels que $s = s_{Y_2}.q_{Y_2}$.

Plus généralement, si $\boldsymbol{q}$ est un ensemble de telles familles projectives petites q de flèches de $\boldsymbol{M}$, on dit qu'une flèche $m : M \to N \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M})$ *équilibre* $\boldsymbol{q}$ si, et seulement si, m équilibre toute famille $q \in \boldsymbol{q}$.

Dans ces conditions, il est facile de vérifier que les flèches de $\boldsymbol{M}$ qui équilibrent $\boldsymbol{q}$ sont les flèches d'une sous-catégorie $\mathtt{Equil}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{q})$ de $\boldsymbol{M}$ ayant les mêmes objets que $\boldsymbol{M}$.

3.2. Définition des sous-catégories équilibrantes.

Si $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite et si $\boldsymbol{M}'$ est une sous-catégorie de $\boldsymbol{M}$ ayant les mêmes objets que $\boldsymbol{M}$, nous dirons que $\boldsymbol{M}'$ est une sous-catégorie *équilibrante* de $\boldsymbol{M}$ si, et seulement si :

- il existe un ensemble $\boldsymbol{q}$ de familles projectives petites de flèches de $\boldsymbol{M}$ tel que $\boldsymbol{M}' = \mathtt{Equil}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{q})$.

4. Sous-catégories complémentantes, résolvantes et équilibrantes des catégories esquissables.

4.1. Sous-catégories complémentantes et sous-catégories résolvantes des catégories esquissables.

Montrons que :

Proposition 1. *Si $\boldsymbol{M}$ est une catégorie esquissable et si $\boldsymbol{M}'$ est une sous-catégorie complémentante de $\boldsymbol{M}$, alors $\boldsymbol{M}'$ est une sous-catégorie résolvante de $\boldsymbol{M}$.*

Preuve. Supposons que $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite et que $\boldsymbol{j}$ est un ensemble de monomorphismes potentiels de $\boldsymbol{E}$.

Posons :

- $\boldsymbol{M} = \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens})$,
- $\boldsymbol{M}'' = \mathtt{Mod}(\mathtt{Compl}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{j}), \boldsymbol{Ens})$,
- $\boldsymbol{U} = \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E} \subseteq \mathrm{Compl}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{J}), \boldsymbol{Ens}) : \boldsymbol{M}'' \to \boldsymbol{M}$.

Alors, $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{M}'') = \boldsymbol{M}'$ est une sous catégorie de $\boldsymbol{M}$ ayant les mêmes objets que $\boldsymbol{M}$, la restriction $\boldsymbol{U}' : \boldsymbol{M}'' \to \boldsymbol{M}'$ de $\boldsymbol{U} : \boldsymbol{M}'' \to \boldsymbol{M}$ est une équivalence, de sorte que $\boldsymbol{M}'$ est une sous-catégorie complémentante de $\boldsymbol{M}$.

Il s'agit donc de montrer que $\boldsymbol{M}'$ est une sous-catégorie résolvante de $\boldsymbol{M}$.

Etape 1 : construction d'un ensemble d'indices et d'une famille d'objets.

Pour tout $j : E_j \to F_j \in \boldsymbol{j}$, à l'ensemble $\Delta = \{\delta\}$ on sait associer une famille projective de flèches :

$$(f_{j,H} : \boldsymbol{\Delta} \to R"_{j,H}(F_j) \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{Ens}))_{H \in \boldsymbol{H}_j}$$

présentant la famille d'objets :

$$(R"_{j,H} : \mathtt{Compl}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{j}) \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M}"))_{H \in \boldsymbol{H}_j}$$

comme un ensemble de solutions pour l'objet $\Delta \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{Ens})$ relativement au foncteur $\mathtt{ev}_{F_j} : \boldsymbol{M}" \to \boldsymbol{Ens}$ évaluation en F_j , puisqu'il est esquissable (voir l'**Appendice - Fascicule 3** et/ou la **Figure 7 - Fascicule 2**).

Alors, pour tout $j \in \boldsymbol{j}$ et tout $H \in \boldsymbol{H}_j$, puisque :

$$R"_{j,H} : \mathtt{Compl}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{J}) \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M})$$

est un modèle, on dispose de la somme dans $\boldsymbol{Ens}$ ci-dessous (voir aussi la **Figure 8 - Fascicule 2**) :

$$R"_{j,H}(j) : R"_{j,H}(E_j) \to R"_{j,H}(F_j) \leftarrow R"_{j,H}(\neg(E_j, j)) : R"_{j,H}(\neg j) \ .$$

Ainsi, l'application $f_{j,H} : \Delta \to R"_{j,H}(F_j)$ vérifie une et une seule des deux assertions **Assert. 7** ou bien **Assert. 8** suivantes (voir la **Figure 9 - Fascicule 2**) :

Assert. 7 : il existe un (nécessairement unique) $\delta_{j,H} \in R"_{j,H}(E_j)$ tel que :

$$f_{j,H}(\delta) = R"_{j,H}(j)(\delta_{j,H}) \ ,$$

Assert. 8 : il existe un (nécessairement unique) $\delta_{\neg j,H} \in R"_{j,H}(\neg(E_j, j))$ tel que :

$$f_{j,H}(\delta) = R"_{j,H}(\neg j)(\delta_{\neg j,H}) \ .$$

Alors, on note :

$$\boldsymbol{I} = \left\{ (j, H) \,\middle|\, j \in \boldsymbol{j} \text{ et } H \in \boldsymbol{H}_j \text{ et } f_{j,H} \text{ vérifie } \textbf{Assert. 8} \right\}$$

et, pour tout $(j, H) \in \boldsymbol{I}$, on pose :

$$R_{(j,H)} = \boldsymbol{U}(R"_{j,H}) : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M}) \ .$$

Etape 2 : vérification de la condition Résol. 1.

Pour tout $(j, H) \in \boldsymbol{I}$, à l'objet $R_{(j,H)} : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M})$ on sait associer une famille projective de flèches :

$$(p_{(j,H),X} : R_{(j,H)} \Rightarrow \boldsymbol{U}(P"_{(j,H),X}) : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}))_{X \in \boldsymbol{X}_{(j,H)}}$$

présentant la famille d'objets :

$$(P"_{(j,H),X} : \mathtt{Compl}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{j}) \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M}"))_{X \in \boldsymbol{X}_{(j,H)}}$$

comme un ensemble de solutions pour l'objet $R_{(j,H)} : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M})$ relativement au foncteur $\boldsymbol{U} : \boldsymbol{M}'' \to \boldsymbol{M}$, puisqu'il est esquissé (voir l'**Appendice - Fascicule 3** et/ou la **Figure 10 - Fascicule 2**).

Alors, pour tout $(j,H) \in \boldsymbol{I}$ et tout $X \in \boldsymbol{X}_{(j,H)}$, on pose :

$$P_{(j,H),X} = \boldsymbol{U}(P''_{(j,H),X}) = \boldsymbol{U}'(P''_{(j,H),X}) : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M}) \ .$$

Comme le foncteur $\boldsymbol{U}' : \boldsymbol{M}'' \to \boldsymbol{M}'$ est une équivalence, la famille de flèches :

$$(p_{(j,H),X} : R_{(j,H)} \Rightarrow P_{(j,H),X} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}))_{X \in \boldsymbol{X}_{(j,H)}}$$

présente donc aussi la famille d'objets :

$$(P_{(j,H),X} : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M}') = \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M}))_{X \in \boldsymbol{X}_{(j,H)}}$$

comme un ensemble de solutions pour l'objet :

$$R_{(j,H)} : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M})$$

relativement au foncteur injection canonique $\boldsymbol{M}' \subseteq \boldsymbol{M} : \boldsymbol{M}' \to \boldsymbol{M}$ (voir la **Figure 11 - Fascicule 2**).

Ainsi, la condition **Résol. 1** est établie.

Etape 3 : vérification de la condition Résol. 2.

Supposons que $R, M, N : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M})$ sont trois modèles et que $r : R \Rightarrow M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M})$ et $m : M \Rightarrow N : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M})$ sont deux transformations naturelles.

Notons $R'', M'', N'' : \mathtt{Compl}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{j}) \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M}'')$ trois modèles prolongeant les trois modèles $R, M, N : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M})$ le long de l'homomorphisme injection canonique $\boldsymbol{E} \subseteq \mathtt{Compl}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{j}) : \boldsymbol{E} \to \mathtt{Compl}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{j})$, i.e. tels que $\boldsymbol{U}(R'') = R$, $\boldsymbol{U}(M'') = M$ et $\boldsymbol{U}(N'') = N$: pour ce faire, pour tout $j \in \boldsymbol{j}$, il suffit de prendre successivement (voir la **Figure 12 - Fascicule 2**) :

$$R''(\neg j) = \big(R(F_j) \setminus R(j)(R(E_j)) \subseteq R(F_j)\big) : R(F_j) \setminus R(j)(R(E_j)) \to R(F_j) \ ,$$

$$M''(\neg j) = \big(M(F_j) \setminus M(j)(M(E_j)) \subseteq M(F_j)\big) : M(F_j) \setminus M(j)(M(E_j)) \to M(F_j) \ ,$$

$$N''(\neg j) = \big(N(F_j) \setminus N(j)(N(E_j)) \subseteq N(F_j)\big) : N(F_j) \setminus N(j)(N(E_j)) \to N(F_j) \ .$$

Si, par hypothèse, **Assert. 1** (où on remplace $r_I : R_I \to M$ par $r : R \to M$) est vérifiée, i.e. si

$$r : R \Rightarrow M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \notin \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}') \ ,$$

c'est qu'il n'existe pas de transformation naturelle :

$$r'' : R'' \Rightarrow M'' : \mathtt{Compl}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{j}) \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}'')$$

telle que :

$$\boldsymbol{U}(r") = \boldsymbol{U}'(r") = r \ .$$

Par conséquent, il existe au moins un $j_0 \in \boldsymbol{j}$ pour lequel l'application :

$$r(F_{j_0}) \quad : \quad \begin{array}{c} R(F_{j_0}) = R"(F_{j_0}) \\ = \\ R"(E_{j_0}) + R"(\neg(E_{j_0}, j_0)) \end{array} \xrightarrow{\hspace{3em}} \begin{array}{c} M(F_{j_0}) = M"(F_{j_0}) \\ = \\ M"(E_{j_0}) + M"(\neg(E_{j_0}, j_0)) \end{array} ,$$

qui admet la restriction :

$$r(E_{j_0}) : R(E_{j_0}) \to M(E_{j_0}) \ ,$$

n'admet pas de restriction de la forme (voir la **Figure 13 - Fascicule 2**) :

$$R"(\neg(E_{j_0}, j_0)) \to M"(\neg(E_{j_0, j_0})) \ .$$

Autrement dit, il existe $\varepsilon \in R"(\neg(E_0, j_0))$ et $\varphi \in M"(E_{j_0})$ tels que (voir la **Figure 14 - Fascicule 2**) :

$$r(F_{j_0})[R"(\neg j_0)(\varepsilon)] = M"(j_0)(\varphi) = M(j_0)(\varphi) \ .$$

Il en résulte qu'il existe $\psi = m(E_{j_0})(\varphi) \in N"(E_{j_0}) = N(E_{j_0})$ tel que :

$$(m \ . \ r)(F_{j_0})[R"(\neg j_0)(\varepsilon)] = N"(j_0)(\psi) = N(j_0)(\psi) \ .$$

Par conséquent, l'application :

$$(m \ . \ r)(F_{j_0}) \quad : \quad \begin{array}{c} R(F_{j_0}) = R"(F_{j_0}) \\ = \\ R"(E_{j_0}) + R"(\neg(E_{j_0}, j_0)) \end{array} \xrightarrow{\hspace{3em}} \begin{array}{c} N(F_{j_0}) = N"(F_{j_0}) \\ = \\ N"(E_{j_0}) + N"(\neg(E_{j_0}, j_0)) \end{array} ,$$

qui admet la restriction :

$$(m \ . \ r)(E_{j_0}) : R(E_{j_0}) \to N(E_{j_0}) \ ,$$

n'admet pas de restriction de la forme (voir la **Figure 15 - Fascicule 2**)

$$R"(\neg(E_{j_0}, j_0)) \to N"(\neg(E_{j_0}, j_0)) \ .$$

C'est donc qu'il n'existe pas de transformation naturelle :

$$(m \ . \ r)" : R" \Rightarrow N" : \mathtt{Compl}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{j}) \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}")$$

telle que (voir la **Figure 16 - Fascicule 2**) :

$$\boldsymbol{U}((m \ . \ r)") = \boldsymbol{U}'((m \ . \ r")) = m \ . \ r \ .$$

Ce qui permet d'affirmer que $m \ . \ r : R \Rightarrow N : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \notin \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$, i.e. que **Assert. 2** (où on remplace $m \ r_I : R_I \to N$ par $m \ . \ r : R \to N$) est vérifiée.

Ainsi, la condition **Résol. 2** est vérifiée (si on se contente de prendre pour :

$$r : R \Rightarrow M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}) \setminus \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$$

une quelconque :

$$r_{(j,H)} : R_{(j,H)} \Rightarrow M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}) \setminus \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}') \ ,$$

pour un quelconque $I = (j,H) \in \boldsymbol{I}$).

Etape 4 : début de la vérification de la condition Résol. 3.

Supposons que $M, N : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M})$ sont deux modèles et que $m : M \Rightarrow N : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M})$ est une transformation naturelle vérifiant **Assert. 3**, i.e. telle que, pour tout $(j,H) \in \boldsymbol{I}$ et toute flèche :

$$r_{(j,H)} : R_{(j,H)} \Rightarrow M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}') \ ,$$

on a :

$$m.r_{(j,H)} : R_{(j,H)} \Rightarrow N : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}') \ .$$

Notons $M'', N'' : \mathtt{Compl}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{j}) \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M}'')$ deux modèles prolongeant les deux modèles $M, N : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M})$ le long de l'homomorphisme injection canonique $\boldsymbol{E} \subseteq \mathtt{Compl}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{j}) : \boldsymbol{E} \to \mathtt{Compl}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{j})$, i.e. tels que $\boldsymbol{U}(M'') = M$ et $\boldsymbol{U}(N'') = N$: pour ce faire, pour tout $j \in \boldsymbol{j}$, il suffit de prendre successivement (voir la **Figure 17 - Fascicule 2**) :

$$M''(\neg j) = \big(M(F_j) \setminus M(j)(M(E_j)) \subseteq M(F_j)\big) : M(F_j) \setminus M(j)(M(E_j)) \to M(F_j) \ ,$$

$$N''(\neg j) = \big(N(F_j) \setminus N(j)(N(E_j)) \subseteq N(F_j)\big) : N(F_j) \setminus N(j)(N(E_j)) \to N(F_j) \ .$$

Alors, si $j_0 : E_{j_0} \to F_{j_0} \in \boldsymbol{j}$ et si $\theta \in M''(\neg(E_0, j_0))$, on dispose de l'application "sélectionnant θ " :

$$\begin{array}{llll} s_{j_0,\theta} : & \Delta = \{\delta\} & \to & M''(\neg(E_0, j_0)) \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{Ens}) \\ & \delta & \mapsto & \theta \end{array} .$$

Comme construite dans l'**Etape 1** précédente, la famille projective de flèches :

$$(f_{j_0,H} : \boldsymbol{\Delta} \to R''_{j_0,H}(F_{j_0}) \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{Ens}))_{H \in \boldsymbol{H}_j}$$

présente la famille d'objets :

$$(R''_{j_0,H} : \mathtt{Compl}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{j}) \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M}''))_{H \in \boldsymbol{H}_j}$$

comme un ensemble de solutions pour l'objet $\Delta \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{Ens})$ relativement au foncteur $\mathtt{ev}_{F_{j_0}} : \boldsymbol{M}'' \to \boldsymbol{Ens}$ "évaluation en F_{j_0} ". Il existe donc un $H_\theta \in \boldsymbol{H}_{j_0}$ et une flèche :

$$r''_{j_0,H_\theta} : R''_{j_0,H_\theta} \Rightarrow M'' : \mathtt{Compl}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{j}) \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}'')$$

tels que (voir la **Figure 18 - Fascicule 2**) :

$$r"_{j_0,H_\theta}(F_{j_0}) \circ f_{j_0,H_\theta} = M"(\neg j_0) \circ s_{j_0,\theta} \ .$$

Il en résulte que f_{j_0,H_θ} vérifie l'assertion **Assert. 8** de l'**Etape 1** précédente, i.e. qu'il existe un unique $\delta_{\neg j_0,H_\theta} \in R"_{j_0,H_\theta}(\neg(E_{j_0}, j_0))$ tel que (voir la **Figure 19 - Fascicule 2**) :

$$f_{j_0,H_\theta}(\varepsilon) = R"_{j_0,H_\theta}(\neg j_0)(\delta_{\neg j_0,H_\theta})$$

ce qui implique évidemment que $r"_{j_0,H_\theta}(\neg(E_{j_0}, j_0))(\delta_{\neg j_0,H_\theta}) = \theta$.

En vertu de la construction de $\boldsymbol{I}$ effectuée à l'**Etape 1** précédente, on a donc $(j_0, H_\theta) \in \boldsymbol{I}$. De sorte qu'**Assert. 3** s'applique, en y prenant :

$$(j, H) = (j_0, H_\theta)$$

et :

$$r_{(j_0,H_\theta)} = \boldsymbol{U}(r"_{j_0,H_\theta}) : R_{(j_0,H_\theta)} = \boldsymbol{U}(R"_{j_0,H_\theta}) \Rightarrow \boldsymbol{U}(M") = M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$$

.

Ainsi on a $m \,.\, r_{(j_0,H_\theta)} : R_{(j_0,H_\theta)} \to N : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$. Par conséquent, il existe une unique transformation naturelle :

$$(m \,.\, r_{(j_0,H_\theta)})" : R"_{j_0,H_\theta} \Rightarrow N" : \mathtt{Compl}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{j}) \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}")$$

telle que $\boldsymbol{U}((m \,.\, r_{(j_0,H_\theta)})") = m \,.\, r_{(j_0,H_\theta)}$.

Etape 5 : fin de la vérification de la condition Résol. 3.

Supposons toujours, comme à l'**Etape 4** précédente (dont on reprend toutes les notations, toutes les hypothèses et toutes les conclusions), que $M, N : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M})$ sont deux modèles et que $m : M \Rightarrow N : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M})$ est une transformation naturelle telle que, pour tout $(j, H) \in \boldsymbol{I}$ et toute flèche :

$$r_{(j,H)} : R_{(j,H)} \Rightarrow M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}') \ ,$$

on a :

$$m \,.\, r_{(j,H)} : R_{(j,H)} \Rightarrow N : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}') \ .$$

Alors, pour tout $j_0 \in \boldsymbol{j}$, l'application :

$$\begin{array}{rccc} m"(\neg(E_{j_0}, j_0)) : & M"(\neg(E_{j_0}, j_0)) & \to & N"(\neg(E_{j_0}, j_0)) \\ & \theta & \mapsto & (m \,.\, r_{(j_0,H_\theta)})"(\delta_{\neg j_0,H_\theta}) \end{array}$$

vérifie évidemment l'équation :

$$m(F_{j_0}) \bullet M"(\neg j_0) = N"(\neg j_0) \bullet m"(\neg(E_{j_0}, j_0))$$

(i.e. rend commutatif le "parallélogramme" **P** de la **Figure 20 - Fascicule 2**).

Autrement dit, la transformation naturelle $m : M \Rightarrow N : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ possède un (unique) prolongement $m" : M" \Rightarrow N" : \texttt{Compl}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{j}) \to \boldsymbol{Ens}$ le long de l'homomorphisme injection canonique $\boldsymbol{E} \to \texttt{Compl}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{j})$. C'est dire que $\boldsymbol{U}(m") = m$, de sorte que $m : M \Rightarrow N : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens} \in \texttt{Fl}(\boldsymbol{M}')$.

Ainsi, l'assertion **Assert. 3** de **Résol. 3** implique l'assertion **Assert. 4** de **Résol. 3** et donc **Résol. 3** est vérifiée.

Fin de la preuve.

4.2. Sous-catégories résolvantes et sous-catégories équilibrantes.

Montrons que :

Proposition 2. *Si* $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie localement petite et si* $\boldsymbol{M}'$ *est une sous-catégorie résolvante de* $\boldsymbol{M}$ *, alors* $\boldsymbol{M}'$ *est une sous-catégorie équilibrante de* $\boldsymbol{M}$.

Preuve. Supposons que $\boldsymbol{M}'$ est une sous-catégorie résolvante de $\boldsymbol{M}$ et donc que :

$$\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{I}, (R_I)_{I \in \boldsymbol{I}}, (\boldsymbol{X}_I)_{I \in \boldsymbol{I}}, ((P_{I,X})_{X \in \boldsymbol{X}_I})_{I \in \boldsymbol{I}}, ((p_{I,X})_{X \in \boldsymbol{X}_I})_{I \in \boldsymbol{I}})$$

est une résolution de $\boldsymbol{M}$ dans $\boldsymbol{M}'$.

Etape 1 : construction d'un ensemble de familles projectives de flèches.

Pour tout $I \in \boldsymbol{I}$, posons successivement :

$$\boldsymbol{X}'_I = \left\{ X' \in \boldsymbol{X}_I \,\middle|\, p_{I,X'} : R_I \to P_{I,X'} \in \texttt{Fl}(\boldsymbol{M}') \right\},$$

$$\boldsymbol{X}"_I = \left\{ X" \in \boldsymbol{X}_I \,\middle|\, p_{I,X"} : R_I \to P_{I,X"} \notin \texttt{Fl}(\boldsymbol{M}') \right\}$$

et :

$$p"_I = (p_{I,X"} : R_I \to P_{I,X"} \notin \texttt{Fl}(\boldsymbol{M}'))_{X" \in \boldsymbol{X}"_I} ,$$

de sorte que $\boldsymbol{X}_I = \boldsymbol{X}'_I \bigcup \boldsymbol{X}"_I$ est une réunion disjointe et que $p"_I$ est une famille projective de flèches de $\boldsymbol{M}$ (voir la **Figure 21 - Fascicule 2**).

Alors, $\boldsymbol{p}" = \left\{ p"_I \,\middle|\, I \in \boldsymbol{I} \right\}$ est un ensemble de familles projectives de flèches de $\boldsymbol{M}$ et les sous-catégories $\boldsymbol{M}'$ et $\texttt{Equil}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{p}")$ de $\boldsymbol{M}$ ont, par hypothèse et par construction, même ensemble d'objets que $\boldsymbol{M}$.

Pour montrer que $\boldsymbol{M}'$ est une sous-catégorie équilibrante de $\boldsymbol{M}$, il suffit donc de montrer que $\boldsymbol{M}' = \texttt{Equil}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{p}")$, i.e. que $\texttt{Fl}(\boldsymbol{M}') = \texttt{Fl}(\texttt{Equil}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{p}"))$.

Etape 2 : les flèches de M' équilibrent p'' .

Etablissons que toute flèche $m : M \to N \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$ équilibre $\boldsymbol{p}''$, i.e. équilibre, pour tout $I \in \boldsymbol{I}$, la famille projective $p''_I = (p_{I,X''} : R_I \to P_{I,X''} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}))_{X'' \in \boldsymbol{X}''_I}$ de flèches de $\boldsymbol{M}$.

Pour ce faire, supposons que (voir la **Figure 22 - Fascicule 2**) :

- $m : M \to N \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$,

- $I \in \boldsymbol{I}$,

- $X''_1 \in \boldsymbol{X}''_I$,

- $s : R_I \to M \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M})$,

- $t_{I,X''_1} : P_{I,X''_1} \to N \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M})$,

- $m\ s = t_{I,X''_1}\ p_{I,X''_1}$.

Par construction, comme $X''_1 \in \boldsymbol{X}''_I$, on a $p_{I,X''_1} : R_I \to P_{I,X''_1} \notin \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$. Il en résulte, d'après **Résol. 2** (où M devient P_{I,X''_1} , m devient t_{I,X''_1} et r_I devient p_{I,X''_1}), que l'assertion suivante est vérifiée (voir la **Figure 23 - Fascicule 2**) :

> **Assert. 9 :** on a $m\ s = t_{I,X''_1}\ p_{I,X''_1} : R_I \to N \notin \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$.

Maintenant, en vertu de **Résol. 1**, il existe (au moins) un $X \in \boldsymbol{X}_I$ et (au moins) une flèche $s_{I,X} : P_{I,X} \to M \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$ tels que $s = s_{I,X} \bullet p_{I,X}$ (voir la **Figure 24 - Fascicule 2**).

Si on avait $p_{I,X} : R_I \to P_{I,X} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$, comme $s_{I,X} : P_{I,X} \to M \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$, l'assertion suivante *serait* vérifiée :

> **Assert. 10 :** on a $s = s_{I,X} \bullet p_{I,X} : R_I \to M \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$,

et, puisque $m : M \to N \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$, l'assertion suivante le *serait*, par conséquent, aussi :

> **Assert. 11 :** on a $m\ s = t_{I,X''_1}\ p_{I,X''_1} : R_I \to N \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$,

mais **Assert. 11** est en contradiction avec **Assert. 9** qui *est* vérifiée (voir la **Figure 25 - Fascicule 2**).

On a donc $p_{I,X} : R_I \to P_{I,X} \notin \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$. Ce qui signifie, par construction, que $X = X''_2 \in \boldsymbol{X}''_I$. Autrement dit, que $m : M \to N \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$ équilibre la (sous-) famille projective $p''_I = (p_{I,X''} : R_I \to P_{I,X''} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}))_{X'' \in \boldsymbol{X}''_I}$ (de la famille projective $p_I = (p_{I,X} : R_I \to P_{I,X} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}))_{X \in \boldsymbol{X}_I}$) de flèches de $\boldsymbol{M}$.

Par conséquent, on a $\mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}') \subseteq \mathtt{Fl}(\mathtt{Equil}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{p}''))$.

Etape 3 : les flèches de $\boldsymbol{M}$ équilibrant $\boldsymbol{p}''$ sont des flèches de $\boldsymbol{M}'$.

Etablissons que toute flèche $m: M \rightarrow N \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M})$, dès lors qu'elle équilibre, pour tout $I \in \boldsymbol{I}$, la famille projective $p''_I = (p''_{I,X''}: R_I \rightarrow P_{I,X''} \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}))_{X'' \in \boldsymbol{X}''_I}$ de flèches de $\boldsymbol{M}$, est nécessairement une flèche de $\boldsymbol{M}'$.

Pour ce faire, supposons que (voir la **Figure 26 - Fascicule 2**) :

- $m: M \rightarrow N \in \mathtt{Fl}(\mathtt{Equil}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{p}''))$,

- $I \in \boldsymbol{I}$,

- $r'_I : R_I \rightarrow M \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$.

En vertu de **Résol. 1**, il existe (au moins) un $X \in \boldsymbol{X}_I$ et (au moins) une flèche $t_{I,X} : P_{I,X} \rightarrow N \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$ tels que $m \bullet r'_I = t_{I,X} \bullet p_{I,X}$ (voir la **Figure 27 - Fascicule 2**).

Si on avait $m \bullet r'_I \notin \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$, on aurait nécessairement $p_{I,X} : R_I \rightarrow P_{I,X} \notin \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$ (voir la **Figure 28 - Fascicule 2**), faute de quoi, $m \bullet r'_I = t_{I,X} \bullet p_{I,X}$ serait une flèche de $\boldsymbol{M}'$ puisque composée de deux flèches de $\boldsymbol{M}'$. Par construction, on aurait donc $X = X''_1 \in \boldsymbol{X}''_I$ et, puisque $m: M \rightarrow N \in \mathtt{Fl}(\mathtt{Equil}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{p}''))$ équilibre, en particulier, la famille projective $\boldsymbol{p}''_I = (p_{I,X''} : R_I \rightarrow P_{I,X''} \notin \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}'))_{X'' \in \boldsymbol{X}''_I}$, il existerait au moins un (autre) $X''_2 \in \boldsymbol{X}''_I$ et (au moins) une flèche $r'_{I,X''_2} : P_{I,X''_2} \rightarrow M \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M})$ tels que $r'_I = r'_{I,X''_2} \bullet p_{I,X''_2}$, où $p_{I,X''_2} : R_I \rightarrow P_{I,X''_2} \notin \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$ (voir la **Figure 29 - Fascicule 2**) . Finalement, de **Résol. 2** (où M devient P_{I,X''_2} , N devient M et $r_I : R_I \rightarrow M \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$ devient $p_{I,X''_2} : R_I \rightarrow P_{I,X''_2} \notin \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$) on déduirait que $r'_I : R_I \rightarrow M \notin \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$, en contradiction avec l'hypothèse (voir la **Figure 30 - Fascicule 2**).

On a donc $m \bullet r'_I \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$.

Ainsi, toute flèche $m: M \rightarrow N \in \mathtt{Fl}(\mathtt{Equil}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{p}''))$ vérifie l'assertion **Assert. 3** de **Résol. 3** et donc, d'après **Résol. 3**, elle vérifie aussi l'assertion **Assert. 4**. C'est dire que toute flèche $m: M \rightarrow N \in \mathtt{Fl}(\mathtt{Equil}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{p}''))$ vérifie $m: M \rightarrow N \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$.

par conséquent, on a $\mathtt{Fl}(\mathtt{Equil}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{p}'')) \subseteq \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}')$.

Fin de la preuve.

4.3. Sous-catégories équilibrantes et sous-catégories complémentantes des catégories esquissables.

Montrons que :

Proposition 3. *Si* $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie esquissable et si* $\boldsymbol{M}'$ *est une sous-catégorie équilibrante de* $\boldsymbol{M}$ *, alors* $\boldsymbol{M}'$ *est une sous-catégorie complémentante de* $\boldsymbol{M}$ *.*

Preuve. Supposons que $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite, que $\boldsymbol{M} = \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens})$, que $\boldsymbol{q}$ est un ensemble de familles projectives petites $q = (q_Y : Q \to Q_Y \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}))_{Y \in \boldsymbol{Y}}$ et que $\boldsymbol{M}' = \mathtt{Equil}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{q})$.

Etape 1 : construction et propriétes fondamentales d'une extension de $\boldsymbol{E}$ **.**

Posons :

$$\tilde{\boldsymbol{q}} = \left\{ q' \in \mathtt{Ob}(\boldsymbol{M}) \,\middle|\, \exists q = (q_Y : Q \to Q_Y \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M})_{Y \in \boldsymbol{Y}} \;\; \exists Y' \in \boldsymbol{Y} \;\; q' = q_{Y'} \right\}$$

(de sorte que $\tilde{\boldsymbol{q}}$ est l'ensemble des flèches figurant au moins une fois dans au moins une des familles projectives appartenant à $\boldsymbol{q}$).

On dispose donc de l'esquisse petite $\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{q}) = \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, \tilde{\boldsymbol{q}})$, extension de $\boldsymbol{E}$ par l'ensemble $\tilde{\boldsymbol{q}}$ (voir l'**Appendice - Fascicule 3**).

Ainsi, par construction, on peut affirmer que (voir l'**Appendice - Fascicule 3** et/ou la **Figure 31 - Fascicule 2**):

- $\boldsymbol{E}$ est une sous-esquisse de $\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{q})$,

- à toute famille projective de flèches $q = (q_Y : Q \to Q_Y \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}))_{Y \in \boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{q}$ correspond une famille inductive de flèches $f_q = (f_{q_Y} : F_{Q_Y} \to F_Q \in \mathtt{Fl}(\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{q})))_{Y \in \boldsymbol{Y}}$ (n'appartenant pas à $\boldsymbol{E}$ et où les F_Q et F_{Q_Y} sont les sommets de limites projectives potentielles "canoniques" à bases dans $\boldsymbol{E}$).

On dispose également du foncteur induit par l'homomorphisme injection canonique (voir l'**Appendice - Fascicule 3**) :

$$\begin{array}{c} (-)^{\cup} = \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E} \subseteq \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{q}), \boldsymbol{Ens}) \\ \vdots \\ \mathtt{Mod}(\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{q}), \boldsymbol{Ens}) \\ \downarrow \\ \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens}) = \boldsymbol{M} \end{array}$$

qui, à tout modèle $T : \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{q}) \to \boldsymbol{Ens}$, associe sa restriction $T^{\cup} : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$.

Mais, on dispose aussi du foncteur prolongement canonique (voir l'**Appendice - Fascicule 3**) :

$$\begin{array}{c}(-)^{\cap} = \mathtt{Prol}_{\boldsymbol{E},\tilde{\boldsymbol{q}}}(-) \\ \vdots \\ \boldsymbol{M} = \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens}) \\ \downarrow \\ \mathtt{Mod}(\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{Ens})\end{array}$$

qui, naturellement en tout modèle $M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$, associe son prolongement canonique $M^{\cap} : \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}) \to \boldsymbol{Ens}$, i.e. l'unique modèle prolongeant M et tel que (voir l'**Appendice - Fascicule 3** et/ou la **Figure 32 - Fascicule 2**), notamment :

- pour toute famille projective de flèches $q = (q_Y : Q \to Q_Y \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}))_{Y \in \boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{q}$ et tout $Y \in \boldsymbol{Y}$, on a :

$M^{\cap}(f_{q_Y} : F_{Q_Y} \to F_Q) = \mathtt{Hom}_{\boldsymbol{M}}(q_Y : Q \to Q_Y, M) : \mathtt{Hom}_{\boldsymbol{M}}(Q_Y, M) \to \mathtt{Hom}_{\boldsymbol{M}}(Q, M)$,

Alors, on sait que les deux foncteurs :

$$(-)^{\cap} : \boldsymbol{M} = \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens}) \rightleftarrows \mathtt{Mod}(\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{Ens}) : (-)^{\cup}$$

définissent une équivalence de catégories (voir l'**Appendice - Fascicule 3**).

Etape 2 : construction et propriétés fondamentales d'une sur-extension de $\boldsymbol{E}$.

Désignons, maintenant, par $\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q})$ la *sur-extension de* $\boldsymbol{E}$ *par* $\boldsymbol{q}$, i.e. l'esquisse petite obtenue en ajoutant à $\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q})$ et, ce, pour toute famille projective de flèches $q = (q_Y : Q \to Q_Y \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}))_{Y \in \boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{q}$, les éléments suivants (voir la **Figure 33 - Fascicule 2**):

- la somme potentielle $\sigma_q = (\sigma_{q,Y} : F_{Q_Y} \to \Sigma_q \in \mathtt{Fl}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q})))_{Y \in \boldsymbol{Y}}$,

- la flèche $g_q : \Sigma_q \to F_Q \in \mathtt{Fl}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}))$,

- l'épimorphisme potentiel $e_q : \Sigma_q \to E_q \in \mathtt{Fl}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}))$,

- le monomorphisme potentiel $j_q : E_q \to F_Q \in \mathtt{Fl}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}))$,

- pour tout $Y \in \boldsymbol{Y}$, l'équation $f_{q_Y} = g_q \bullet \sigma_{q,Y}$,

- l'équation $j_q \bullet e_q = g_q$.

On dispose donc du foncteur induit par l'homomorphisme injection canonique :

$$\begin{array}{c}(-)^{\vee} = \mathtt{Mod}(\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}) \subseteq \mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{Ens}) \\ \vdots \\ \mathtt{Mod}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{Ens}) \\ \downarrow \\ \mathtt{Mod}(\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{Ens})\end{array}$$

qui, à tout modèle $V : \mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}) \to \boldsymbol{Ens}$, associe sa restriction $V^{\vee} : \mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}) \to \boldsymbol{Ens}$.

Mais, on dispose aussi du foncteur *prolongement canonique* :

$$\begin{array}{c}(-)^{\wedge}\\ : \\ \mathtt{Mod}(\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{Ens})\\ \downarrow \\ \mathtt{Mod}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{Ens})\end{array}$$

qui, naturellement en tout modèle $T : \mathrm{Ext}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}) \to \boldsymbol{Ens}$, associe son *prolongement canonique* $T^{\wedge} : \mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}) \to \boldsymbol{Ens}$, i.e. l'unique modèle prolongeant T tel que (voir la **Figure 34 - Fascicule 2**) :

- pour toute famille projective de flèches $q = (q_Y : Q \to Q_Y \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}))_{Y \in \boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{q}$, on a :

$$T^{\wedge}(\Sigma_q) = \left\{(s_Y, Y) \,\middle|\, Y \in \boldsymbol{Y} \text{ et } s_Y \in T^{\wedge}(F_{Q_Y}) = T(F_{Q_Y})\right\}$$

(autrement dit, $T^{\wedge}(\Sigma_q) = \bigcup_{Y \in \boldsymbol{Y}} \left(T^{\wedge}(F_{Q_Y}) \times \{Y\}\right) = \bigcup_{Y \in \boldsymbol{Y}} \left(T(F_{Q_Y}) \times \{Y\}\right)$ est bien une somme - précisément, la réunion disjointe - dans $\boldsymbol{Ens}$ de la famille $(T^{\wedge}(F_{Q_Y}))_{Y \in \boldsymbol{Y}}$ d'ensembles),

- pour toute famille projective de flèches $q = (q_Y : Q \to Q_Y \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}))_{Y \in \boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{q}$, tout $Y \in \boldsymbol{Y}$ et tout $s_Y \in T^{\wedge}(F_{Q_Y}) = T(F_{Q_Y})$, on a :

$$T^{\wedge}(\sigma_{q,Y})(s_Y) = (s_Y, Y)$$

(autrement dit, $T^{\wedge}(\sigma_{q,Y}) : T^{\wedge}(F_{Q_Y}) \to T^{\wedge}(\Sigma_q) = \sum_{Y \in \boldsymbol{Y}} T^{\wedge}(F_{Q_Y})$ est bien la co-projection d'indice Y),

- pour toute famille projective de flèches $q = (q_Y : Q \to Q_Y \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}))_{Y \in \boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{q}$, tout $Y \in \boldsymbol{Y}$ et tout $s_Y \in T^{\wedge}(F_{Q_Y}) = T(F_{Q_Y})$, on a :

$$T^{\wedge}(g_q)(s_Y, Y) = T^{\wedge}(g_q)\left(T^{\wedge}(\sigma_{q,Y})(s_Y)\right) = T(f_{q_Y})(s_Y) = T^{\wedge}(f_{q_Y})(s_Y)$$

(autrement dit, on a bien $T^{\wedge}(g_q) \bullet T^{\wedge}(\sigma_{q,Y}) = T^{\wedge}(g_q \bullet \sigma_{q,Y}) = T^{\wedge}(f_{q_Y})$, de sorte que l'application $T^{\wedge}(g_q) : T^{\wedge}(\Sigma_q) \to T^{\wedge}(F_Q)$ est bien l'unique factorisation du cône inductif à base discrète $(T^{\wedge}(f_{q_Y}) : T^{\wedge}(F_{Q_Y}) \to T^{\wedge}(F_Q))_{Y \in \boldsymbol{Y}}$ au travers du cône somme de même base $(T^{\wedge}(\sigma_{q,Y}) : T^{\wedge}(F_{Q_Y}) \to T^{\wedge}(\Sigma_q))_{Y \in \boldsymbol{Y}}$),

- pour toute famille projective de flèches $q = (q_Y : Q \to Q_Y \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}))_{Y \in \boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{q}$, on a :

$$T^\wedge(E_q) = \left\{ s \in T^\wedge(F_Q) \,\middle|\, \exists Y \in \boldsymbol{Y} \ \ \exists s_Y \in T^\wedge(F_{Q_Y}) \ \ T^\wedge(g_q)(s_Y, Y) = s \right\}$$

(autrement dit, $T^\wedge(E_q) \subseteq T^\wedge(F_Q) = T(F_Q)$ est l'image canonique de $T^\wedge(\Sigma_q)$ par l'application $T^\wedge(g_q) : T^\wedge(\Sigma_q) \to T^\wedge(F_Q) = T(F_Q)$),

- pour toute famille projective de flèches $q = (q_Y : Q \to Q_Y \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}))_{Y \in \boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{q}$, tout $Y \in \boldsymbol{Y}$ et tout $s_Y \in T^\wedge(F_{Q_Y}) = T(F_{Q_Y})$, on a :

$$T^\wedge(e_q)(s_Y, Y) = T^\wedge(g_q)(s_Y, Y)$$

(autrement dit, $T^\wedge(e_q) : T^\wedge(\Sigma_q) \to T^\wedge(E_q)$ est bien un épimorphisme, puisque c'est la surjection canonique de $T^\wedge(\Sigma_q)$ sur son image $T^\wedge(E_q)$ par l'application $T^\wedge(g_q) : T^\wedge(\Sigma_q) \to T^\wedge(F_Q) = T(F_Q)$),

- pour toute famille projective de flèches $q = (q_Y : Q \to Q_Y \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}))_{Y \in \boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{q}$, l'application $T^\wedge(j_q) : T^\wedge(E_q) \to T^\wedge(F_Q) = T(F_Q)$ est l'injection canonique de $T^\wedge(E_q) \subseteq T^\wedge(F_Q) = T(F_Q)$ vers $T^\wedge(F_Q) = T(F_Q)$ (c'est donc bien un monomorphisme).

Dans ces conditions, il est facile de vérifier que les deux foncteurs :

$$(-)^\wedge : \mathtt{Mod}(\mathtt{Ext}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{q}), \boldsymbol{Ens}) \underset{\longleftarrow}{\longrightarrow} \mathtt{Mod}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{q}), \boldsymbol{Ens}) : (-)^\vee$$

définissent une équivalence de catégories.

Par conséquent, par composition avec celle obtenue à l'**Etape 1**, les deux foncteurs :

$$((-)^\cap)^\wedge : \boldsymbol{M} = \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens}) \underset{\longleftarrow}{\longrightarrow} \mathtt{Mod}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{q}), \boldsymbol{Ens}) : ((-)^\vee)^\cup$$

définissent une équivalence de catégories.

Etape 3 : complémentation potentielle de la sur-extension de $\boldsymbol{E}$.

Posons $\boldsymbol{j_q} = \left\{ j_q \middle| q \in \boldsymbol{q} \right\}$. Alors, par construction, $\boldsymbol{j_q}$ est un ensemble de monomorphismes potentiels de $\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{q})$, de sorte qu'on peut construire par complémentation potentielle la sur-esquisse petite $\mathtt{Compl}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{q}), \boldsymbol{j_q})$ de $\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{q})$ complémentant $\boldsymbol{j_q}$.

On dispose donc du foncteur :

$$(-)^{\dagger} = \mathtt{Mod}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}) \subseteq \mathtt{Compl}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}), \boldsymbol{j_q}), \boldsymbol{Ens})$$
$$\vdots$$
$$\mathtt{Mod}(\mathtt{Compl}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}), \boldsymbol{j_q}), \boldsymbol{Ens})$$
$$\downarrow$$
$$\mathtt{Mod}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}), \boldsymbol{Ens})$$

qui, à tout modèle $\Omega : \mathtt{Compl}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}), \boldsymbol{j_q}) \to \boldsymbol{Ens}$, associe sa restriction $\Omega^{\dagger} : \mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}) \to \boldsymbol{Ens}$.

A l'inverse, à tout modèle $V : \mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}) \to \boldsymbol{Ens}$, on peut associer son *prolongement canonique* $V^{\neg} : \mathtt{Compl}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}), \boldsymbol{j_q}) \to \boldsymbol{Ens}$, i.e. le modèle tel que (voir la **Figure 35 - Fascicule 2**) :

- pour toute famille projective de flèches $q = (q_Y : Q \to Q_Y \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}))_{Y \in \boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{q}$, on a :

$$\begin{aligned} V^{\neg}(\neg(E_q, j_q)) &= \left\{ s \in V^{\neg}(F_Q) \,\middle|\, \forall Y \in \boldsymbol{Y} \;\; \forall s_Y \in V^{\neg}(F_{Q_Y}) \;\; V^{\neg}(g_q)(s_Y, Y) \neq s \right\} \\ &= \left\{ s \in V(F_Q) \,\middle|\, \forall Y \in \boldsymbol{Y} \;\; \forall s_Y \in V(F_{Q_Y}) \;\; V(g_q)(s_Y, Y) \neq s \right\} \end{aligned}$$

et $V^{\neg}(\neg j_q) : V^{\neg}(\neg(E_q, j_q)) \to V^{\neg}(F_Q) = V(F_Q)$ est l'injection canonique (autrement dit :

$$V^{\neg}(\neg(E_q, j_q)) = V^{\neg}(F_Q) \setminus V^{\neg}(j_q)(V^{\neg}(E_q))$$

et $V^{\neg}(F_Q) = V^{\neg}(E_q) + V^{\neg}(\neg(E_q, j_q)) = V(E_q) + V^{\neg}(\neg(E_q, j_q)) = V(F_Q)$ est bien une somme).

Par contre, un quelconque homomorphisme $v : V \Rightarrow W : \mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}) \to \boldsymbol{Ens}$ ne possède pas nécessairement de prolongement :

$$v^{\neg} : V^{\neg} \Rightarrow W^{\neg} : \mathtt{Compl}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}), \boldsymbol{j_q}) \to \boldsymbol{Ens} \;.$$

Evidemment, il en possède un (unique) si, et seulement si, il vérifie la condition suivante (voir la **Figure 36 - Fascicule 2**) :

Prolong. 1 : pour toute famille $q = (q_Y : Q \to Q_Y \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}))_{Y \in \boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{q}$ et tout $s \in V(F_Q)$, l'assertion **Assert. 12** ci-dessous implique l'assertion **Assert. 13** ci-dessous :

Assert. 12 : pour tout $Y \in \boldsymbol{Y}$ et pour tout $s_Y \in V(F_{Q_Y})$, on a :

$$V(f_{q_Y})(s_Y) = V(g_q)(s_Y, Y) \neq s \;,$$

Assert. 13 : pour tout $Y \in \boldsymbol{Y}$ et pour tout $t_Y \in W(F_{Q_Y})$, on a :

$$W(f_{q_Y})(t_Y) = W(g_q)(t_Y, Y) \neq v(F_Q)(s) \;.$$

ou de manière équivalente (par contraposition) si, et seulement si, la condition suivante est vérifiée :

Prolong. 2 : pour toute famille $q = (q_Y : Q \to Q_Y \in \mathtt{Fl}(\boldsymbol{M}))_{Y \in \boldsymbol{Y}} \in \boldsymbol{q}$ et tout $s \in V(F_Q)$, l'assertion **Assert. 14** ci-dessous implique l'assertion **Assert. 15** ci-dessous :

Assert. 14 : il existe un $Y_1 \in \boldsymbol{Y}$ et il existe un $t_{Y_1} \in W(F_{Q_{Y_1}})$ tels que :

$$W(f_{q_{Y_1}})(t_{Y_1}) = W(g_q)(t_{Y_1}, Y_1) = v(F_Q)(s) \ ,$$

Assert. 15 : il existe un $Y_2 \in \boldsymbol{Y}$ et il existe un $s_{Y_2} \in V(F_{Q_{Y_2}})$, on a :

$$V(f_{q_{Y_2}})(s_{Y_2}) = V(g_q)(s_{Y_2}, Y_2) = s \ .$$

Par conséquent, notant $\mathtt{Mod}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{Ens})'$ la sous-catégorie de $\mathtt{Mod}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{Ens})$ ayant les mêmes objets mais seulement pour flèches les homomorphismes $v : V \Rightarrow W : \mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}) \to \boldsymbol{Ens}$ vérifiant **Prolong. 2** (i.e. possédant un prolongement $v^{\urcorner} : V^{\urcorner} \Rightarrow W^{\urcorner} : \mathtt{Compl}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{j_q}) \to \boldsymbol{Ens}$), on voit que :

- le foncteur $(-)^{\not\urcorner} : \mathtt{Mod}(\mathtt{Compl}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{j_q}),\boldsymbol{Ens}) \to \mathtt{Mod}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{Ens})$ a pour image la sous-catégorie $\mathtt{Mod}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{Ens})'$, de sorte qu'il possède une restriction :

$$(-)^{\not\urcorner}{}' : \mathtt{Mod}(\mathtt{Compl}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{j_q}),\boldsymbol{Ens}) \to \mathtt{Mod}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{Ens})' \ ,$$

- on dispose du foncteur *prolongement canonique* :

$$(-)^{\urcorner} : \mathtt{Mod}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{Ens})' \to \mathtt{Mod}(\mathtt{Compl}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{j_q}),\boldsymbol{Ens}) \ .$$

- ces deux foncteurs :

$$(-)^{\urcorner} : \mathtt{Mod}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{Ens})' \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{}} \mathtt{Mod}(\mathtt{Compl}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{j_q}),\boldsymbol{Ens}) : (-)^{\not\urcorner}{}'$$

définissent une équivalence de catégories.

Ainsi, $\mathtt{Mod}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{Ens})'$ est une sous-catégorie complémentante de la catégorie $\mathtt{Mod}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{Ens})$.

Etape 4 : retour à l'équilibre.

Pour montrer que $\boldsymbol{M}' = \mathtt{Equil}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{q}) = \mathtt{Equil}(\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens}),\boldsymbol{q})$ est une sous-catégorie complémentante de $\boldsymbol{M} = \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$, il suffit de montrer, d'après l'**Etape 3** précédente, que l'équivalence de l'**Etape 2** définie par les deux foncteurs :

$$((-)^{\cap})^{\wedge} : \boldsymbol{M} = \texttt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens}) \underset{\longleftarrow}{\longrightarrow} \texttt{Mod}(\texttt{SurExt}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{q}), \boldsymbol{Ens}) : ((-)^{\vee})^{\cup}$$

se restreint en une équivalence définie par les deux foncteurs restriction :

$$((-)^{\cap})^{\wedge}' : \boldsymbol{M}' \underset{\longleftarrow}{\longrightarrow} \texttt{Mod}(\texttt{SurExt}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{q}), \boldsymbol{Ens})' : ((-)^{\vee})^{\cup}' \ .$$

Or, si $m : M \Rightarrow N : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ est un homomorphisme, on voit que le double prolongement canonique $((m)^{\cap})^{\wedge} : ((M)^{\cap})^{\wedge} \Rightarrow ((N)^{\cap})^{\wedge} : \texttt{SurExt}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{q}) \to \boldsymbol{Ens}$ admet un prolongement :

$$(((m)^{\cap})^{\wedge})^{\neg} : (((M)^{\cap})^{\wedge})^{\neg} \Rightarrow (((N)^{\cap})^{\wedge})^{\neg} : \texttt{Compl}(\texttt{SurExt}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{q}), \boldsymbol{j_q}) \to \boldsymbol{Ens}$$

si, et seulement si, $((m)^{\cap})^{\wedge}$ vérifie la condition **Prolong. 2** de l'**Etape 3** précédente, où on prend donc :

- $V = ((M)^{\cap})^{\wedge}$,

- $W = ((N)^{\cap})^{\wedge}$,

- $v = ((m)^{\cap})^{\wedge}$,

puis, compte tenu de la construction du foncteur prolongement canonique $(-)^{\cap}$ de l'**Etape 1** et de la construction du foncteur prolongement canonique $(-)^{\wedge}$ de l'**Etape 2** :

- $V(F_Q) = ((M)^{\cap})^{\wedge})(F_Q) = \texttt{Hom}_{\boldsymbol{M}}(Q, M)$,

- $W(F_{Q_{Y_1}}) = ((N)^{\cap})^{\wedge})(F_Q) = \texttt{Hom}_{\boldsymbol{M}}(Q, N)$,

- $W(f_{q_{Y_1}}) = ((N)^{\cap})^{\wedge})(f_{q_{Y_1}}) = \texttt{Hom}_{\boldsymbol{M}}(q_{Y_1}, N)$,

- $v(F_{Q_{Y_1}}) = ((m)^{\cap})^{\wedge})(F_{Q_{Y_1}}) = \texttt{Hom}_{\boldsymbol{M}}(Q_{Y_1}, m)$,

- $V(F_{Q_{Y_2}}) = ((M)^{\cap})^{\wedge})(F_{Q_{Y_2}}) = \texttt{Hom}_{\boldsymbol{M}}(Q_{Y_2}, M)$,

- $V(f_{q_{Y_2}}) = ((M)^{\cap})^{\wedge})(f_{q_{Y_2}}) = \texttt{Hom}_{\boldsymbol{M}}(q_{Y_2}, M)$,

mais cela signifie, terme pour terme, que $m : M \Rightarrow N : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ vérifie la condition **Equil. 1** .

Autrement dit , l'homomorphisme $m : M \Rightarrow N : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ équilibre $\boldsymbol{q}$ si, et seulement si l'homorphisme $((m)^{\cap})^{\wedge} : ((M)^{\cap})^{\wedge} \Rightarrow ((N)^{\cap})^{\wedge} : \texttt{SurExt}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{q}) \to \boldsymbol{Ens}$ possède un prolongement $((m)^{\cap})^{\wedge}' : ((M)^{\cap})^{\wedge}' \Rightarrow ((N)^{\cap})^{\wedge}' : \texttt{Compl}(\texttt{SurExt}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{q}), \boldsymbol{j_q}) \to \boldsymbol{Ens}$.

Par conséquent, l'équivalence de l'**Etape 2** définie par les deux foncteurs :

$$((-)^{\cap})^{\wedge} : \boldsymbol{M} = \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens}) \overrightarrow{\longleftarrow} \mathtt{Mod}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{q}), \boldsymbol{Ens}) : ((-)^{\vee})^{\cup}$$

se restreint bien en une équivalence définie par les deux foncteurs restriction :

$$((-)^{\cap})^{\wedge}' : \boldsymbol{M}' \overrightarrow{\longleftarrow} \mathtt{Mod}(\mathtt{SurExt}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{q}), \boldsymbol{Ens})' : ((-)^{\vee})^{\cup}' \ .$$

D'où il résulte que $\boldsymbol{M}'$ est une sous-catégorie complémentante de $\boldsymbol{M} = \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens})$.

Fin de la preuve.

4.4. Conclusion.

Des propositions 1, 2 et 3 résulte évidemment que :

Théorème. *Dans toute catégorie esquissable, les sous-catégories complémentantes, les sous-catégories résolvantes et les sous-catégories équilibrantes sont les mêmes.*